Fonctions convexes et propriété de Radon Nikodym

Abdelhamid Bourass Nourddin Saidou
Abdelfattah Benlarabi

Résumé

Nous mettons en évidence des propriétés géométriques de fonctions convexes semi-continues inférieurement et nous caractérisons les espaces de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodym par des propriétés géométriques des fonctions convexes qui y sont définies.

Abstract

We give geometrical properties of lower semi-continuous convex functions and we obtain a characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property using geometrical properties of convex functions defined on Banach spaces.

Soit X un espace de Banach de dual X'. Pour toute fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ et tout $\alpha \in]-\infty, +\infty]$, on définit les sous-ensembles

$$\text{épif} = \{(x, \lambda) \in X \times R, f(x) \leq \lambda\}, domf = \{x \in X, f(x) < +\infty\}.$$

La conjuguée, ou polaire de f est la fonction $f^\star$ définie sur X' à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ par

$$f^\star(x') = sup\{x'.x - f(x), x \in X\}.$$

Received by the editors December 2001.
Communicated by F. Bastin.
1991 *Mathematics Subject Classification :* 46 B .
Key words and phrases : Fonctions convexes, propriété de Radon Nikodym, dentabilité, rotondité.

C'est une fonction convexe semi-continue inférieurement (s.c.i) lorsque X' est muni de la topologie de la norme ou de la topologie affaiblie $\sigma(X', X)$. Si C est une partie non vide de X, on note classiquement δ_C la fonction indicatrice de C, définie par $\delta_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $\delta_C(x) = +\infty$ sinon. Sa polaire $\delta^\star_C(x')$ est égale à $\delta^\star_C(x') = sup\{x'.x,\ x \in C\}$. Le sous-différentiel d'une fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ en un point $x_0 \in X$ est le sous-ensemble, éventuellement vide, de X' défini par

$$\begin{aligned} \partial f(x_0) &= \{x' \in X', x'.x_0 - f(x_0) \geq x'.x - f(x), \forall x \in X\} \\ &= \{x' \in X', x'.x_0 - f(x_0) = f^\star(x')\} \end{aligned}$$

Le sous-différentiel à r près, $r > 0$ est défini par

$$\partial_r f(x_0) = \{x' \in X', f(x) - f(x_0) \geq x'.x - x'.x_0 - r \quad \forall x \in X\}.$$

Une fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ est ronde en $x_0 \in X$ s'il existe $x' \in X'$ tel que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 \text{ tel que } x'.x_0 - f(x_0) < x'.x - f(x) + r \quad \Rightarrow \quad \|x - x_0\| \leq \varepsilon.$$

La fonction f est faiblement ronde en x_0, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe r tel que $0 \leq r \leq \varepsilon$ et $x' \in \partial_r f(x_0)$ tel que $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ pour tout x vérifiant $x'.x - f(x) \geq f^\star(x') - r$. Elle admet un minimum fort en x_0 si et seulement si i) $f(x_0) \leq f(x), \forall x \in X$ et ii) $\|x_n - x_0\| \to 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ telle que $f(x_n) \to f(x_0)$. Elle admet un minimum faible en $x_0 \in domf$ si et seulement s'il existe $(x'_n)_n$ une suite de X' telle que $|f^\star(x'_n) - (x'_n - f)(x_0)| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ et $\|x_n - x_0\|$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour toute suite $(x_n)_n$ de X vérifiant $|(x'_n - f)(x_n) - f^\star(x'_n)| \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. La suite $(x'_n)_n$ sera dite une suite faiblement minimisante de f.

Il est clair que si $f - x'$ admet un minimum fort en x_0, alors f admet un minimum faible et la suite $x'_n = x', n \in N$ est faiblement minimisante.

Soit A une partie convexe fermée non vide de X, la tranche définie par $x' \in X'$ et $\alpha > 0$ est l'ensemble $T(A, x', \alpha) = \{x \in A, x'.x \geq \delta^\star_A(x') - \alpha\}$. Un élément $e \in A$ est un point de dentabilité de A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une tranche de A contenant e de diamètre plus petit que ε. Un élément $e \in A$ est un point fortement exposé de A si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée

a) Il existe $x' \in X'$ tel que le diamètre de la tranche $T(A, x', \alpha)$ tend vers 0 lorsque $\alpha \to 0$, et $e \in T(A, x', \alpha)$.

b) Il existe $x' \in X'$ tel que $\delta^\star_A(x') = < x'.e >$ et $\|x_n - e\| \to 0$ pour toute suite $(x_n)_n$ telle que, $x'.x_n \to x'.e$.

On notera s-exp(A) (resp dent(A)) l'ensemble des points fortement exposés (resp. de dentabilité) de A. Un espace X possède la propriété de Radon- Nikodym (P.R.N) si tout convexe fermé borné de X admet un point de dentabilité. Dans [9, cor.3-2], la P.R.N est caractérisée par une propriété quantitative sur les normes équivalentes à la norme initiale. Notre objectif est de caractériser les espaces de Banach ayant la P.R.N par des propriétés géométriques des fonctions convexes définies sur l'espace. Nos démonstrations sont élémentaires et l'aspect qualitatif du corollaire 3-2 de [9] en est un cas particulier. Pour d'autres caractérisations de ces propriétés, on renvoie aux ouvrages de Diestel-Uhl[6], de Bourgin[3] et de Phelps[7]. Nos premiers résultats établissent le lien entre les trois notions, minimum fort, rotondité et fortement exposé d'une part, et le lien entre les trois autres notions plus faibles, minimum faible, dentabilité et rotondité faible d'autre part.

Proposition 1. *Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe propre s.c.i. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) Il existe $x' \in \partial f(x_0)$ tel que $f - x'$ admet un minimum fort en x_0.
2) Il existe $x' \in X'$ tel que $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé par $(x', -1)$ dans épif.
3) La fonction f est ronde en x_0.

Preuve. On montre successivement les implications 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Pour la première implication, si $x' \in \partial f(x_0)$ est tel que $f - x'$ admet un minimum fort en x_0, soit $\varepsilon > 0$ et $r \leq min(\frac{\varepsilon}{2\|x'\|}, \varepsilon)$. D'après la propriété ii) de la définition, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - x'.x - f(x_0) + x'.x_0| \leq \delta \Rightarrow \|x - x_0\| \leq r.$$

On vérifie alors que la tranche $T(epif, (x', -1), \alpha)$ est de diamètre inférieur à ε pourvu que $\alpha \leq min(\frac{\varepsilon}{2}, \delta)$. Si maintenant $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé par $(x', -1)$ dans épi$f$, fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\alpha > 0$ tel que la tranche $T(epif, (x', -1), \alpha)$ soit de diamètre inférieur à ε. Comme tout couple $(x, f(x))$ tel que $f(x) < x'.x - f(x_0) - x'.x_0 + \alpha$ est dans $T(epif, (x', -1), \alpha)$, on en déduit que $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la rotondité de f en x_0. Enfin, pour la troisième implication, remarquons que l'élément x' qui intervient dans la définition de la rotondité est dans $\partial f(x_0)$. La condition ii) se déduit ensuite d'une simple écriture de la rotondité.

Proposition 2. *Soit f une fonction convexe propre s.c.i définie de $X \to]-\infty, +\infty]$, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) f admet un minimum faible en x_0.
2) le point $(x_0, f(x_0))$ est un point de dentabilité dans épif.
3) f est faiblement ronde en x_0.

Preuve. Commençons par l'équivalence de 2) et 3). Supposons que f est faiblement ronde en x_0 et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour tout x tel que $\|x - x_0\| \leq \delta$, et en utilisant la faible rotondité en x_0 pour $\varepsilon_1 = min(\delta, \frac{\varepsilon}{4})$, on démontre que le diamètre de la tranche $T(epif, (x', -1), r)$ est inférieur à ε pourvu que $r \leq \varepsilon_1$ et $x' \in \partial_r f(x_0)$.
Réciproquement si $(x_0, f(x_0))$ est un point de dentabilité dans épi$f$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x' \in X'$ et r $\leq \varepsilon$ tels que $T(epif, (x', -1), r)$ contient $(x_0, f(x_0))$ et est de diamètre inférieur à ε. On vérifie facilement que $x' \in \partial_r f(x_0)$ et si x est tel que $x'.x - f(x) > f^\star(x') - r$ alors $(x, f(x)) \in T(epif, (x', -1), r)$ et par conséquent $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$, ce qui implique que f est faiblement ronde en x_0. Montrons que 1) est équivalente à 3). Supposons que f est faiblement ronde en x_0. Alors pour tout n $\in N$ il existe $x'_n \in \partial_{\frac{1}{n}} f(x_0)$ tel que pour tout $x \in X$, $(x'_n - f)(x) \geq f^\star(x'_n) - 1/n \Rightarrow \|x - x_0\| \leq 1/n$. Comme $x'_n \in \partial_{\frac{1}{n}} f(x_0)$, on a $inf_X(f - x'_n) \leq (f - x'_n)(x_0) \leq inf_X(f - x'_n) + 1/n$. Ce qui implique que $|(f - x'_n)(x_0) - inf_X(f - x'_n)| \to 0$. Si maintenant $(x_n)_n$ est une suite dans X telle que $|inf_X(f - x'_n) - (f - x'_n)(x_n)| \to 0$, alors pour n assez grand, on a $f(x_n) - x'.x_n \leq inf_X(f - x'_n) + \frac{1}{n}$. C'est à dire que

$f^\star(x'_n) - \frac{1}{n} \leq x'_n.x_n - f(x_n)$. Ce qui implique que $\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n}$.
Réciproquement, supposons que f admet un minimum faible en x_0 et soit $\varepsilon > 0$ et $(x'_n)_n$ une suite faiblement minimisante de f. Fixons n assez grand tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ et $x'_n \in \partial_\varepsilon f(x_0)$ et soit $x \in X$ tel que $x'_n.x - f(x) \geq f^\star(x'_n) - \varepsilon$. Comme $f^\star(x'_n) \geq x'_n.x - f(x)$, on a $|(x'_n - f)(x) - f^\star(x'_n)| \leq \varepsilon$ ce qui implique que $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ par définition du minimum faible.

Dans l'étude des points fortement exposés, on peut se restreindre à une classe particulière de formes linéaires sur X×R qui sont exposantes. De façon plus précise on a le lemme ci-dessous. Introduisons auparavant le sous-ensemble de l'épigraphe de f défini par $S(f, \alpha) = \{(x, r) \in epif, f(x) \leq r\}$. Remarquons que si $\alpha = +\infty$ alors $S(f, \alpha) = epif$.

Lemme 3. *Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe, $\alpha \in]-\infty, +\infty]$ et $x_0 \in domf$ tel que $f(x_0) < \alpha$. Le couple $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé dans $S(f, \alpha)$ si et seulement s'il existe $x' \in \partial f(x_0)$ tel que $(x', -1)$ expose fortement $(x_0, f(x_0))$ dans $S(f, \alpha)$.*

Preuve. Elle repose sur le fait que si $(y', \lambda) \in X' \times R$ expose fortement un point de épi$f$, alors $(\frac{y'}{\lambda}, -1)$ l'expose fortement également, ainsi que sur le lemme suivant.

Lemme 4. *Avec les mêmes données que dans le lemme 3, si $x' \in X'$ est tel que $x'.x_0 - f(x_0) > x'.x - r$ pour tout $(x, r) \in S(f, \alpha)$ avec $(x, r) \neq (x_0, f(x_0))$, alors $x'.x_0 - f(x_0) > x'.x - r$ pour tout $(x, r) \in$ épif avec $(x, r) \neq (x_0, f(x_0))$ et on a $x' \in \partial f(x_0)$.*

La proposition suivante joue un rôle clé dans la démonstration du résultat principal de cette note. Il est clair que si $x_0 \in A \subset B$ est fortement exposé dans B, il l'est également dans A. La réciproque est vraie dans les épigraphes.

Proposition 5. *Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$, convexe propre s.c.i, et x_0 un point de l'intérieur de $domf$. Alors $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé (resp. de dentabilité) dans épif si et seulement si $\forall\alpha > f(x_0)$(ou $\exists\alpha > f(x_0)$) on a $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé (resp. de dentabilité) dans $S(f, \alpha)$.*

Indications sur la démonstration. Si $(x_0, f(x_0))$ est fortement exposé dans $S(f, \alpha)$ il existe $x' \in \partial f(x_0)$ tel que $(x', -1)$ expose fortement $(x_0, f(x_0))$ dans $S(f, \alpha)$ (Lemme 3). Soit $(x_n, r_n)_n$ une suite dans épi$f$ telle que $lim[x'.x_n - r_n] = x'.x_0 - f(x_0)$ et $M > 0$ tel que $\alpha < M$ et $|r_n| \leq M, \quad \forall n \in N$. Utilisant la convexité de f, une suite $(\xi_n, t_n)_n$ dans $S(f, \alpha)$ telle que $lim_n[x'.\xi_n - t_n] = x'.x_0 - f(x_0)$ et la suite $(y_n, s_n)_n$ avec $y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)\xi_n$ et $s_n = \alpha_n r_n + (1 - \alpha_n)t_n$ où $\alpha_n = (\alpha - t_n)/(M - t_n)$, on montre qu' à partir d'un certain rang on a $(x_n, r_n)_n \in S(f, \alpha)$. On conclut alors en faisant appel à la deuxième caractérisation (b) des points fortement exposés.

Il est bien connu qu'un espace de Banach est d'Asplund si et seulement si son dual a la propriété de Radon-Nikodym [3] et [7]. En d'autres termes, la propriété de Radon-Nikodym du dual d'un espace de Banach peut se caractériser par une propriété de différentiabilité des fonctions convexes définies sur le Banach. Notre résultat principal a pour objet de caractériser la PRN par une propriété de régularité des fonctions convexes définies sur l'espace et non pas sur le prédual.

Théorème 6. *Un espace de Banach X possède la propriété de Radon Nikodym si et seulement si toute fonction $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe propre s.c.i bornée inférieurement vérifie l'une des propriétés suivantes*
1) f admet un point de rotondité.
2) Il existe $\alpha \in R$ tel que $S(f, \alpha)$ admet un point fortement exposé.
3) Il existe $x' \in X'$ tel que $f - x'$ admet un minimum fort.
4) f admet un point de rotondité faible.
5) Il existe $\alpha \in R$ tel que $S(f, \alpha)$ admet un point de dentabilité.
6)f admet un minimum faible.

Preuve. Pour montrer que la condition est suffisante, il suffit de montrer que 4) implique la P.R.N, puisque chacune des conditions entraîne 4). Soit C un convexe fermé borné de X. Sa fonction indicatrice δ_C est convexe propre s.c.i et inf-bornée. Supposons qu'elle admet un point de rotondité faible en x_0. D'après la proposition 2, $(x_0, \delta_C(x_0)) = (x_0, 0)$ est un point de dentabilité de $epi\delta_C = C \times [0, +\infty[$. On vérifie facilement que si le diamètre d'une tranche $T(C \times [0, +\infty[, (x', -1), \alpha)$ où $\alpha > 0$ et $(x', -1) \in X' \times R$ est plus petit que $\varepsilon > 0$ donné, alors la tranche $T(C, x', \alpha)$ l'est aussi et ainsi $x_0 \in$ Dent(C). Donc X est de Radon Nikodym . La nécessité fait appel aux résultats que nous avons établis plus haut. Soit $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convexe propre s.c.i et inf-bornée et soit $\alpha > inf\{f(x), x \in X\}$. Montrons que l'ensemble $\{(x, \lambda), f(x) \leq \lambda \leq \alpha\}$ admet un point fortement exposé $(x_0, f(x_0))$ avec $f(x_0) < \alpha$, et on conclut en faisant appel successivement aux propositions 4) et 1). D'après les hypothèses faites sur f, l'ensemble $S(f, \alpha)$ est une partie convexe fermée bornée non vide de $X \times R$. Comme $X \times R$ est de Radon Nikodym, l'ensemble $s - exp[S(f, \alpha)]$ est non vide et on a $S(f, \alpha) = \overline{co}[s - exp(S(f, \alpha)]$, (Bourgin[3], Phelps[7]) où $\overline{co}$ désigne l'enveloppe fermée convexe. Si tous les éléments $(x, f(x))$ de $s - exp[S(f, \alpha)]$ sont tels que $f(x) = \alpha$, on aura $S(f, \alpha) \subset \overline{co}[(x, \alpha), f(x) = \alpha] = \{(x, \alpha), f(x) \leq \alpha\}$ ce qui est absurde car d'après le choix de α, il existe $x \in X$ tel que $f(x) < \alpha$. Par conséquent épi$f$ admet un point fortement exposé, et d'après les propositions 1) et 2), les six assertions du théorème sont vérifiées.

Références

[1] E. Asplund,1968, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta. Math 121

[2] J. Bourgain,1979, *La propriété de Radon-Nikodym*, Pub .Math de l'université Pierre et Marie curie. N 36.

[3] R.D Bourgin,1983, *Geometric aspects of convex sets with the Radon Nikodym property*. Lect Notes in Math - N 993 Springer Verlag.

[4] J.B Collier,1976, *The dual of a space with the Radon-Nikodym Property*, Pacific J Math 64, 103-106.

[5] J. Diestel,1985, *Geometry of Banach spaces* (selected topics Lect notes in math N 485 Springer Verlag).

[6] J. Diestel, J.J Uhl,1977, *Vector measures*, Math. Surveys 15 ,A.M.S.

[7] R.R. Phelps,1974, *Dentability and extreme points in Banach spaces* (J. Functional Analysis 1 ;7, 78-90).

[8] R.R. Phelps,1988, *Convex functions, monotone operators and differentiability*, Lect notes in math (R.Phelps),1364 page 82,83.

[9] W. Schachermayer, A. Sersouri and E. Werner, 1989, *Moduli of non-dentability and the Radon-Nikodym property in Banach spaces*, Israel Journal of mathematics, vol 65 Number 3.

Département de mathématiques.
Faculté des sciences Rabat, B.P 1014 -Rabat- Maroc.
Email : bourass@fsr.ac.ma