

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET SUITES EXACTES SUR UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE

H. GUGGENHEIMER

(Received June 1, 1956)

Index

Chap. I. Les Opérateurs différentiels.

1. Rappel de notions et de résultats.
2. Les opérateurs-classe.

Chap. II. Groupes d'homologie.

1. Groupes d'homologie.
2. Sous-variétés.
3. Suites exactes.
4. Modifications kählériennes.
5. Applications.

Chap. I. Les opérateurs différentiels.

1. Rappel de notions et de résultats. [1, 2]. Une variété kählérienne M est une variété à structure analytique complexe, sur laquelle la forme extérieure hermitique associée à la métrique est close. Comme la variété est complexe, on peut décomposer toute forme différentielle extérieure en une somme de formes, chacune desquelles est homogène, dans un système de coordonnées locales complexes $z_1, \dots, z_n$, et dans les dz_i et dans les $\overline{dz_i}$. Cette décomposition est invariante par rapport à tout changement analytique des coordonnées. Une telle forme homogène dans les dz_i et les $\overline{dz_i}$ sera notée $\varphi_{(s)}^r$, si son degré total est r et son degré dans les $\overline{dz_i}$ (son *type*) est s . Il est évident que l'on peut décomposer l'opérateur d de différentiation extérieure :

$$d = d^0 + d^1$$

tel que les d^r sont homogènes par rapport au type :

$$d^0 \varphi_{(s)}^r = \varphi_{(s)}^{r+1},$$

$$d^1 \varphi_{(s)}^r = \varphi_{(s+1)}^{r+1}.$$

De la relation classique $dd = 0$ on déduit

$$d^0 d^0 = d^1 d^1 = 0, \tag{1}$$

$$d^0 d^1 + d^1 d^0 = 0. \tag{2}$$

On peut obtenir ces opérateurs encore d'une autre façon : On définit un

opérateur anti-linéaire C par

$$C\varphi_{(s)}^r = (\sqrt{-1})^r (-1)^s \bar{\varphi}_{(s)}^r$$

et un opérateur de différentiation $\bar{d} = CdC$. Comme

$$CC\varphi_{(s)}^r = (-1)^r \varphi_{(s)}^r$$

on a

$$\bar{d}\bar{d} = 0, \quad (3)$$

$$d\bar{d} + \bar{d}d = 0. \quad (4)$$

Les opérateurs ainsi introduits sont reliés par

$$d^0 = \frac{1}{2}(d + \sqrt{-1}\bar{d}) \quad (5)$$

$$d^1 = \frac{1}{2}(d - \sqrt{-1}\bar{d}). \quad (6)$$

Sur une variété riemannienne, en notre cas de dimension paire $2n$, on définit encore l'adjointe de Hodge-de Rham, qui est une forme $\ast\varphi^r$ de degré $2n - r$ associée à φ^r , et la codifférentielle $\delta = -\ast d\ast$. Si la variété V est en outre compacte, on définit le produit scalaire

$$(\alpha^r, \beta^r) = \int_V \alpha^r \wedge \ast \beta^r$$

qui jouit des propriétés

$$(\alpha^r, \beta^r) = \overline{(\beta^r, \alpha^r)} \quad (7)$$

et

$$(d\alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta\beta^{r+1}). \quad (8)$$

Comme on a en outre $C\ast = \ast C$, on définit

$$\bar{\delta} = C\delta C = -\ast\bar{d}\ast, \quad (9)$$

$$\delta^0 = \frac{1}{2}(\delta - \sqrt{-1}\bar{\delta}), \quad (10)$$

$$\delta^{-1} = \frac{1}{2}(\delta + \sqrt{-1}\bar{\delta}), \quad (11)$$

ce qui nous donne

$$\delta = \delta^0 + \delta^{-1} \quad (12)$$

$$(\bar{d}\alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \bar{\delta}\beta^{r+1}), \quad (13)$$

$$(d^0\alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta^0\beta^{r+1}), \quad (14)$$

$$(d^1\alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta^{-1}\beta^{r+1}). \quad (15)$$

On démontre encore que

$$d\bar{\delta} + \bar{\delta}d = 0 \quad (16)$$

soit

$$d^0\delta^{-1} + \delta^{-1}d^0 = d^1\delta^0 + \delta^0d^1 = 0, \quad (17)$$

$$d^0\delta^0 + \delta^0d^0 = d^1\delta^{-1} + \delta^{-1}d^1. \quad (18)$$

Une forme différentielle est dite *harmonique*, si elle est annulée par le

laplacien généralisé $\Delta = d\delta + \delta d$. Toute forme possède une décomposition unique en φ^r (théorème de Hodge)

$$\alpha = \varphi^r + \Delta\beta^r, \quad \Delta\varphi^r = 0,$$

de laquelle on déduit que le groupe des formes harmoniques est isomorphe au groupe de cohomologie de même degré, à coefficients réels (toujours sur une variété compacte). On définit d'autres laplaciens par

$$\bar{\Delta} = \bar{d}\bar{\delta} + \bar{\delta}\bar{d}, \quad \Delta^0 = d^0\delta^0 + \delta^0d^0 = d^1\delta^{-1} + \delta^{-1}d^1, \quad (19)$$

qui sont tous essentiellement identiques :

$$\Delta = 2\Delta^0 = -\bar{\Delta}. \quad (20)$$

2. Les opérateurs-classe. Les opérateurs différentiels introduits au No. 1 sont essentiellement liés à la notion de type. Nous avons déjà signalé en [1] que la notion de *classe* présente beaucoup d'analogies formelles avec celle de type. Nous nous proposons dans ce numéro d'établir cette analogie dans le domaine des opérateurs différentiels.

Soit Ω la forme hermitique extérieure qui définit la structure kählérienne. On pose

$$L\varphi^r = \varphi^r \wedge \Omega,$$

$$\Lambda\varphi^r = (-1)^r * L * \varphi^r,$$

et une forme φ_k^r sera dite de *classe* k , si

$$\varphi_k^r = L^k \varphi_0^{r-2k}, \quad \Lambda\varphi_k^r = 0.$$

On démontre [3]

$$d\varphi_k^r = \psi_k^{r+1} + \psi_{k+1}^{r+1}. \quad (21)$$

On a alors la possibilité de définir des opérateurs différentiels

$$d = d_0 + d_1, \quad (22)$$

$$d_0\varphi_k^r = \psi_k^{r+1}, \quad (23)$$

$$d_1\varphi_k^r = \psi_{k+1}^{r+1} \quad (24)$$

de la manière suivante : Introduisons d'abord un automorphisme des formes différentielles par

$$A\varphi_k^r = (-1)^k \varphi_k^r. \quad (25)$$

Cet automorphisme est alors défini pour toute forme, comme il existe une décomposition unique en somme de formes de classe définie [1]. Posons

$$\hat{d} = AdA, \quad (26)$$

nous avons

$$d_0 = \frac{1}{2}(d + \hat{d}), \quad (27)$$

$$d_1 = \frac{1}{2}(d - \hat{d}). \quad (28)$$

De $dd = 0$ on obtient

$$d_0d_0 = d_1d_1 = 0, \quad (29)$$

$$d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0. \quad (30)$$

Comme $AA = \text{identité}$,

$$\hat{d} \hat{d} = 0 \quad (31)$$

et

$$d \hat{d} + \hat{d} d = 0. \quad (32)$$

Passons maintenant à considérer les codifférentielles. Par la formule (2.14) de [3], $*A = (-1)^{n-r} A^*$, et on définit

$$\hat{\delta} \varphi^r = -* \hat{d} * \varphi^r = A \delta A \varphi^r, \quad (33)$$

$$\delta_0 \varphi_k^r = \frac{1}{2} (\delta + \hat{\delta}) \varphi_k^r = \psi_k^{r-1}, \quad (34)$$

$$\delta_1 \varphi^r = \frac{1}{2} (\delta - \hat{\delta}) \varphi^r = \psi_{k-1}^{r-1}. \quad (35)$$

La formule (8) jointe au théorème 17 de [1] donne immédiatement

$$(d_0 \alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta_0 \beta^{r+1}), \quad (36)$$

$$(d_1 \alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta_1 \beta^{r+1}). \quad (37)$$

Afin de trouver des relations entre d_i et δ_i , il nous faut calculer δ_1 à l'aide de la formule fondamentale

$$\bar{d} = L\delta - \delta L. \quad (38)$$

On y voit apparaître les opérateurs barrés. Pour obtenir les formules que nous cherchons, il nous faut ou introduire des opérateurs $\bar{d}_i$, ou décomposer les d^i en des opérateurs d_i^j homogènes et dans le type et dans la classe. Nous choisissons cette dernière possibilité et écrivons

$$d = d_0^0 + d_1^0 + d_0^1 + d_1^1 \quad (39)$$

avec

$$d_0^0 \varphi_{k(s)}^r = \varphi_{k(s)}^{r+1},$$

$$d_1^0 \varphi_{k(s)}^r = \varphi_{k+1(s)}^{r+1},$$

$$d_0^1 \varphi_{k(s)}^r = \varphi_{k(s+1)}^{r+1},$$

$$d_1^1 \varphi_{k(s)}^r = \varphi_{k+1(s+1)}^{r+1}.$$

On définit de même des δ_j^i .

A partir de (1) et (2), ou de (31) et (32), on obtient

$$d_j^i d_j^i = 0, \quad (40)$$

$$d_j^i d_k^i + d_k^i d_j^i = 0, \quad (41)$$

$$d_j^i d_j^k + d_j^k d_j^i = 0, \quad (42)$$

$$d_0^0 d_1^1 + d_0^1 d_1^0 + d_1^0 d_0^1 + d_1^1 d_0^0 = 0, \quad (43)$$

et les formules analogues en δ_j^i . (38) se décompose en

$$\sqrt{-1} d_0^0 = \delta_{-1}^{-1} L - L \delta_{-1}^{-1}, \quad (44)$$

$$\sqrt{-1} d_1^0 = \delta_0^{-1} L - L \delta_0^{-1}, \quad (45)$$

$$\sqrt{-1} d_0^1 = L \delta_{-1}^0 - \delta_{-1}^0 L, \quad (46)$$

$$\sqrt{-1} a_1^1 = L \delta_0^0 - \delta_0^0 L. \quad (47)$$

De ces formules, nous déduisons les relations cherchées

$$a_j^i \delta_{j-1}^{i-1} + \delta_{j-1}^{i-1} a_j^i = 0, \quad (48)$$

$$a_0^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 a_0^0 - a_1^1 \delta_{-1}^{-1} - \delta_{-1}^{-1} a_1^1 + a_1^0 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 a_1^0 - a_0^1 \delta_0^{-1} - \delta_0^{-1} a_0^1 = 0. \quad (49)$$

Un autre groupe de relations qui ne s'obtiendrait par calcul direct qu'après des transformations fort longues, peut être établi comme suit : On a démontré ([1] Lemme p. 273, (91) p. 280) que

$$\Delta \varphi_{k(s)}^r = \psi_{k(s)}^r. \quad (50)$$

Si nous écrivons maintenant Δ^0 en terms des a_j^i , on obtient

$$\Delta^0 = a_0^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 a_0^0 + a_0^1 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 a_0^1 + a_1^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 a_1^0 + a_1^1 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 a_1^1,$$

ce qui ne peut satisfaire à (50) qui si

$$a_0^1 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 a_0^1 = 0, \quad (51)$$

$$a_1^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 a_1^0 = 0. \quad (52)$$

De la même façon, on obtient

$$a_0^1 \delta_{-1}^{-1} + \delta_{-1}^{-1} a_0^1 = 0, \quad (53)$$

$$a_1^0 \delta_0^{-1} + \delta_0^{-1} a_1^0 = 0 \quad (54)$$

de façon que, finalement, on a pour les laplaciens

$$\begin{aligned} \Delta^0 &= a^0 \delta^0 + \delta^0 a^0 = a_0^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 a_0^0 + a_1^0 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 a_1^0 \\ &= a_1^1 \delta_{-1}^{-1} + \delta_{-1}^{-1} a_1^1 + a_0^1 \delta_0^{-1} + \delta_0^{-1} a_0^1 \end{aligned} \quad (55)$$

et on a pour les a_i toutes les formules analogues aux formules établies pour a^i .

Par (36) et (37), on a

$$(a_j^i \alpha^r, \beta^{r+1}) = (\alpha^r, \delta_{-j}^{-i} \beta^{r+1}). \quad (56)$$

Il faut remarquer que l'analogie entre type et classe ne peut pas être poussée plus loin, en particulier, on ne peut pas donner de formule analogue à (19). En effet, pour une fonction scalaire (0-forme), on a

$$\Delta f = (a_0 \delta_0 + \delta_0 a_0) f,$$

mais

$$(a_1 \delta_{-1} + \delta_{-1} a_1) f = 0.$$

Ceci provient du fait qu'une forme de degré p peut être de type p , mais seulement de classe $\left[\frac{p}{2} \right]$.

Si nous définissons un opérateur différentiel comme endomorphisme du groupe de toutes les formes différentielles, et de carré nul, alors on peut dériver des a_j^i de nouveaux opérateurs, comme

$$D_{01}^{00} = a_0^0 a_1^1, \quad D_{0(-1)}^{0(0)} = a_0^0 \delta_{-1}^0 \quad (57)$$

ou

$$D_{0101}^{0011} = a_0^0 a_1^1 a_0^1 a_1^1. \quad (58)$$

Nous reviendrons à l'étude de ces opérateurs plus tard, si nous aurons illustré leur importance dans l'étude des variétés kählériennes. Pour le moment, contentons-nous de signaler que l'opérateur défini par (58) est, au signe près, celui qui permet de dériver la forme de courbure $R_{i\bar{j}k\bar{l}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \wedge dz^k \wedge d\bar{z}^l$ de la diastase U (potentiel de la métrique) ([1] (25c)), et que, par conséquent, il ne s'annule pas identiquement.

Chap. II. Groupes d'homologie.

1. Groupes d'homologie. Nous allons construire des groupes isomorphes aux groupes de de Rham (groupes de cohomologie à coefficients réels) d'une variété kählérienne compacte, en suivant un procédé que nous avons utilisé déjà plusieurs fois [2]. Un exposé détaillé des calculs de [2] est contenu dans [4], de façon qu'il sera possible d'indiquer ici seulement les grandes lignes du raisonnement.

Remarquons d'abord que l'on a

$$d_j^i \Delta = \Delta d_j^i, \quad (59)$$

$$\delta_j^i \Delta = \Delta \delta_j^i, \quad (60)$$

de façon qu'une forme harmonique φ est aussi caractérisée par le fait que

$$d_j^i \varphi = \delta_j^i \varphi = 0$$

pour toute combinaison possible des indices.

De l'expression (55) du laplacien et du théorème de Hodge, nous avons une décomposition de toute forme différentielle α^r

$$\begin{aligned} \alpha^r &= \varphi^r + (d_0^0 \delta_0^0 + \delta_0^0 d_0^0 + d_1^0 \delta_{-1}^0 + \delta_{-1}^0 d_1^0) \beta^r \\ &= \varphi^r + (d_1^1 \delta_{-1}^{-1} + \delta_{-1}^{-1} d_1^1 + d_0^0 \delta_0^{-1} + \delta_0^{-1} d_0^0) \beta^r, \quad \Delta \varphi^r = 0 \end{aligned}$$

et par (56) et les relations de commutation des opérateurs différentiels on obtient, par le procédé indiqué en [4],

que $d_0^0 \alpha^1 = 0$ implique $\alpha^r = \varphi^r + d_0^0 \mu + d_1^0 \nu + \delta_{-1}^0 \sigma$,
et de même,

que $d_1^0 \alpha^r = 0$ implique $\alpha^r = \varphi^r + d_0^0 \mu + \delta_0^0 \gamma + d_1^0 \sigma$,

$d_1^1 \alpha^r = 0$ implique $\alpha^r = \varphi^r + d_1^1 \mu + d_0^0 \gamma + \delta_0^{-1} \sigma$, etc.

Le groupe de cohomologie, sur une variété compacte, est isomorphe au groupe des formes harmoniques. Tout groupe isomorphe à ce dernier est par conséquent isomorphe au groupe de cohomologie de la dimension en question. Dans ce qui suit, nous donnons une liste partielle de tels groupes. La justification des assertions est immédiate dans les implications que nous venons d'établir. Convention: $i + i' = 1$.

$$H^r(j) = \{\alpha^r | d_j^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_j^i \beta + d_j^i \gamma + \delta_j^{-i} \varepsilon; d_j^i (d_j^i \gamma + \delta_j^{-i} \varepsilon) = 0\} \quad (61)$$

$$H^r(j) = \{\alpha^r | \delta_j^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = \delta_j^i \beta + \delta_{-(-j)}^i \gamma + d_{(-j)}^{-i} \varepsilon; \delta_j^i (\delta_{-(-j)}^i \gamma + d_{(-j)}^{-i} \varepsilon) = 0\} \quad (62)$$

$$H^r(i) = \{\alpha^r | d_0^i \alpha^r = d_1^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^i \beta\} \quad r \geq 2 \quad (63)$$

$$H^r(i) = \{\alpha^r | \delta_0^i \alpha^r = \delta_{-1}^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = \delta_0^i \beta\} \quad r \leq n - 2 \quad (64)$$

$$\bar{H}^{(i)}_{(01)} = \{\alpha^r | d_0^i d_1^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^i \beta + d_1^i \gamma\} \quad r \leq n-2 \quad (65)$$

$$\bar{H}^{(i)}_{(0-1)} = \{\alpha^r | \delta_0^i \delta_{-1}^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = \delta_0^i \beta + \delta_{-1}^i \gamma\} \quad r \geq 2 \quad (66)$$

$$\bar{H}^{(i)}_{(0-1)} = \{\alpha^r | d_0^i \delta_{-1}^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^i \beta + \delta_{-1}^i \gamma\} \quad (67)$$

$$H^{(i)}_{(0-1)} = \{\alpha^r | d_0^i \alpha^r = \delta_{-1}^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^i \delta_{-1}^i \beta\} \quad (68)$$

$$H^{(i)}_{(0)1} = \{\alpha^r | \delta_0^i \alpha^r = d_1^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = \delta_0^i d_1^i \beta\} \quad (69)$$

$$\bar{H}^{(i)}_{(0)1} = \{\alpha^r | \delta_0^i d_1^i \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = \delta_0^i \beta + d_1^i \gamma\} \quad (70)$$

$$H^{(0011)}_{(0101)} = \{\alpha^r | d_j^i \alpha^r = 0 (i, j = 0, 1)\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^0 d_1^0 d_0^1 \beta\} \quad r \geq 4 \quad (71)$$

$$\bar{H}^{(0011)}_{(0101)} = \{\alpha^r | d_0^0 d_1^0 d_0^1 d_1^1 \alpha^r = 0\} / \{\alpha^r | \alpha^r = d_0^0 \beta + d_1^0 \gamma + d_0^1 \varepsilon + d_1^1 \eta\} \quad r \leq n-4. \quad (72)$$

On peut s'affranchir des limitation des dimensions, à condition de changer un peu les définitions dans les dimensions exclues, p. ex.

$$H^{(i)}_{(01)} = \{\alpha^1 | d_0^i \alpha^1 = d_1^i \alpha^1 = 0\} / \{\alpha^1 | \alpha^1 = d_0^i \beta^0 = d_1^i \gamma^0\} \quad (73)$$

$$H^{(0011)}_{(0101)} = \{\alpha^3 | d_j^i \alpha^3 = 0\} / \{\alpha^3 | \alpha^3 = d_0^0 d_1^0 d_0^1 \beta^0 = d_0^0 d_1^0 d_1^1 \gamma^0 = d_0^0 d_1^0 d_1^1 \varepsilon^0 = d_1^0 d_0^1 d_1^1 \eta^0\} \quad (74)$$

Une analyse détaillée de l'appareil algébrique des démonstrations est donnée dans [4].

Tous les opérateurs qui apparaissent dans les définitions (61) à (74) sont homogènes dans le type et la classe. Par conséquent, tous ces groupes se décomposent de façon naturelle dans une somme directe de groupes composés uniquement de formes *simples*, voir de type et de classe définies :

$$H^{(a\beta\ldots)}_{(s)} = \sum_{s=0}^r \sum_{k=0}^{[r/2]} H^{(a\beta\ldots)}_{k(s)} \quad (75)$$

Or, le rang de $H^{(a\beta\ldots)}_{k(s)}$ est égal au nombre $p_{k(s)}^s$ de formes harmoniques de degré r , type s et classe k , et ce nombre à son tour est égal au nombre $p_{r-s-k, s-k}$ de formes harmoniques de degré $r-2k$, type $s-k$ et classe 0. L'étude des nombres de Betti d'une variété kählérienne est donc réduite à celle des nombres $\rho_{a,b}$, dont l'importance a été souligné par M. Hodge [5].

2. Sous-variétés. Afin de construire des suites exactes à partir des groupes d'homologie (61) à (74), il nous faut définir des opérateurs de restriction et d'extension convenables, qui respectent la classe et le type d'une forme.

Une sous-variété analytique V , de dimension complexe v , est donnée localement par un système de $n-v$ équations analytiques dans la variété M en considération. Comme nous supposons V être sans singularités, le jacobien de ces équations

$$\begin{aligned} \zeta^1(z_1, \dots, z_n) &= 0, \\ &\vdots \\ \zeta^{n-v}(z_1, \dots, z_n) &= 0 \end{aligned}$$

est de rang maximum au moins dans un voisinage convenable de l'origine, et l'on peut compléter le système des par fonctions $\zeta^i(z_1, \dots, z_n)$ $i = n-v+1, \dots, n$, telles que le déterminant fonctionnel $\left| \frac{\partial \zeta^i}{\partial z_j} \right|$ soit différent de zéro

dans tout le voisinage. Nous allons travailler toujours dans le système de coordonnées ζ , dans lequel V est donné par $\zeta^1 = \dots = \zeta^{n-v} = 0$.

La forme kählérienne définie sur M

$$\Omega = \sqrt{-1} \sum_{i, k=1}^n g_{i\bar{k}} d\zeta^i \wedge d\bar{\zeta}^{\bar{k}} \quad (76)$$

avec sa métrique associée

$$ds^2 = \sum g_{i\bar{k}} d\zeta^i d\bar{\zeta}^{\bar{k}} \quad (77)$$

définissent de façon naturelle une structure kählérienne sur V donnée par

$$\omega = \sum_{\alpha, \beta=n-v+1}^n g_{\alpha\bar{\beta}} d\zeta^\alpha \wedge d\bar{\zeta}^{\bar{\beta}} \quad (78)$$

et la métrique correspondante.

De cette façon, toute forme différentielle φ^r sur M donne une forme sur V , sa *restriction*, définie par

$$R\varphi^r = \varphi^r \Big|_{\substack{\zeta^1 = \dots = \zeta^{n-v} = 0 \\ d\zeta^1 = \dots = d\zeta^{n-v} = d\bar{\zeta}^1 = \dots = d\bar{\zeta}^{n-v} = 0}} \quad (79)$$

Il est clair de la définition que

$$R\varphi_{(s)}^r = \varphi_{(s)}^r \Big|_{\substack{\zeta=0 \\ d\zeta=0}}, \quad (80)$$

c'est à dire qu'une forme ne peut que conserver son type sous restriction, ou s'annuler. De

$$\varphi_k^r = \Omega^k \wedge \varphi_0^{r-2k}$$

on tire

$$R\varphi_k^r = \omega^k \wedge R\varphi_0^{r-2k},$$

donc : la restriction d'une forme ne peut diminuer la classe. Il s'ensuit qu'il y aura intérêt à considérer la classe filtrée, une forme $\varphi_{[k]}^r$ étant de classe filtrée k si

$$\varphi_{[k]}^r = \sum_{l \geq k} \varphi_l^r$$

On pourra dire alors que la restriction conserve la classe filtrée. Ici, nous n'allons pas poursuivre cette voie.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^r(p, d\zeta) = \sum_{\alpha, \beta=n-v+1}^n \alpha(\zeta^{n-v+1}, \dots, \zeta^n, \bar{\zeta}^{n-v+1}, \dots, \bar{\zeta}^n)_{\alpha_1 \dots \alpha_{s\beta_1} \dots \beta_{r-s}} \\ \cdot d\zeta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\zeta^{\alpha_s} \wedge d\bar{\zeta}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{\zeta}^{\beta_{r-s}} \end{aligned}$$

une forme définie sur V . Nous voulons définir une *extension* de cette forme en une forme définie sur M .

Supposons V *paracompacte*, et couvrons V par un recouvrement localement fini, dont tout voisinage est la restriction à V d'un voisinage $\mathfrak{B}$, de M muni de coordonnées ζ^i , à indices i dans un ensemble *bien ordonné* I . Dans tout

voisinage, on définit une fonction non négative, finie et indéfiniment différentiable h_i , que nous noterons où $h_i(p)$, $p \in \mathfrak{B}_i$, où en coordonnées $h_i(\zeta^1, \dots, \zeta^n, \bar{\zeta}^1, \dots, \bar{\zeta}^n)$. En outre, elle sera soumise aux conditions

$$a) h_i(0, \dots, 0, \zeta^{n-v+1}, \dots, \zeta^n, 0, \dots, 0, \bar{\zeta}^{n-v+1}, \dots, \bar{\zeta}^n) > 0, \quad \sum_{\alpha=n-v+1}^n \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\alpha < K_i,$$

$$b) h_i(\zeta^j, \bar{\zeta}^j) = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{A=1}^{n-v} \zeta^A \bar{\zeta}^A > \varepsilon_i \quad \text{ou} \quad \sum_{\alpha=n-v+1}^n \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\alpha > K'_i > K_i,$$

et on choisira les constantes K_i de façon à avoir

c) pour tout $p \in V$ il existe i avec $h_i(p) > 0$.

Toute fonction $h_i(p)$ peut être étendue à M entière par

b') $h_i(p) = 0$, $p \notin \mathfrak{B}_i$.

Par suite de la paracompacité, la fonction

$$H(p) = \begin{cases} 0; & p \notin \bigcup_i \mathfrak{B}_i, \\ \frac{\sum_i h_i(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-v}, \zeta^{n-v+1}, \dots, \zeta^n, \bar{\zeta}^1, \dots, \bar{\zeta}^n)}{\sum_i h_i(0, \dots, 0, \zeta^{n-v+1}, \dots, \zeta^n, 0, \dots, 0, \bar{\zeta}^{n-v+1}, \dots, \bar{\zeta}^n)}; & p = (\zeta^i) \in \mathfrak{B}_i, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

est définie dans M , positive sur V , et partout finie et indéfiniment différentiable sur M . Si pour tout point

$$p = (\zeta^1, \dots, \zeta^n, \bar{\zeta}^1, \dots, \bar{\zeta}^n) \in \mathfrak{B}_i$$

nous posons

$$\tilde{p} = (0, \dots, 0, \zeta^{n-v+1}, \dots, \zeta^n, 0, \dots, 0, \bar{\zeta}^{n-v+1}, \dots, \bar{\zeta}^n) \in V,$$

la définition de $H(p)$ peut être écrite

$$H(p) = \begin{cases} 0, & p \notin \bigcup_i \mathfrak{B}_i, \\ \frac{\sum_i h_i(p)}{\sum_i h_i(\tilde{p})} & p \in \bigcup_i \mathfrak{B}_i, \end{cases} \quad (81)$$

et une extension possible d'une forme est

$$e\tilde{\varphi}^r = \begin{cases} 0, & p \notin \bigcup_i \mathfrak{B}_i, \\ H(p)\tilde{\varphi}^r(\tilde{p}, d\zeta^i), & p \in \bigcup_i \mathfrak{B}_i, \end{cases} \quad (82)$$

où $\tilde{p}$ dans $\tilde{\varphi}$ est formé pour le premier i avec $p \in \mathfrak{B}_i$.

A partir de la définition, on vérifie que l'extension conserve le type, et que

$$R\varphi = \varphi \quad (83)$$

et, comme la restriction ne diminue pas la classe, l'extension ne peut augmenter la classe d'une forme. En particulier, l'extension d'une forme de classe zéro sur V (c'est-à-dire de classe zéro par rapport à ω (78)) est encore une forme de classe zéro sur M (par rapport à Ω). Soit maintenant une forme de classe k sur V

$$\tilde{\varphi}_k = \omega^k \wedge \tilde{\varphi}_0^{-2k},$$

notre définition finale de l'extension sera donnée par

$$E\tilde{\varphi}_k^r = \Omega^k \wedge e\tilde{\varphi}_0^{r-2k}. \quad (84)$$

Comme on a encore

$$RE\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi} \quad (83')$$

nous avons finalement le théorème :

Les opérations R et E conservent type et classe.

3. Suites exactes. Nous allons montrer qu'à toute paire de groupes $H_{k(s)}^r$ ($\alpha, \dots$) et $\bar{H}_{k(s)(\beta, \dots)}^r$ (cf. (61) à (72)) est associée une suite exacte relative à l'immersion de V dans M dans le cas de V et M compactes. Pour ne pas exhauster la patience du lecteur, nous donnons les démonstrations complètes pour deux cas typiques seulement.

Prenons d'abord le cas des groupes $H_{k(s)(01)}^{r(00)}$, et partons du groupe $H_{k(s)(01)}^{r(00)}(M)$ défini par les formes sur M . Comme R annule toutes les différentielles qui ne sont pas contenues dans le dual de l'espace tangent en un point de V , on a, pour les points de V ,

$$Rd = dR \quad (85)$$

et, par le théorème à la fin du No. 2, R opère un homomorphisme

$$R^* : \bar{H}_{k(s)(01)}^{r(00)}(M) \longrightarrow \bar{H}_{k(s)(01)}^{r(00)}(V).$$

Soit $H^{\dots}(M, V)$ un groupe construit sur des formes définies sur M dont le R est nul. Nous définissons un homomorphisme

$$D_{01}^{00*} : \bar{H}_{k(s)(10)}^{r(00)}(V) \longrightarrow H_{k+1(s)(10)}^{r+2(00)}(M, V)$$

en associant à toute forme $\tilde{\varphi}_{k(s)}^r$ sur V la forme $D_{01}^{00} E \tilde{\varphi}_{k(s)}^r$. D'après (85), c'est une transformation linéaire qui transforme une forme quelconque dans une forme avec $d_0^0 = d_1^0 = 0$, dont le R est nul. Un cobord, c'est une forme $\tilde{\varphi}_{k(s)}^r = d_0^0 \tilde{\beta} + d_1^0 \tilde{\gamma}$ est transformé dans une forme qui, d'après (85), est dans la même classe de cohomologie que l'extension de $D_{01}^{00} \tilde{\varphi} = 0$, c'est donc un cobord dans $H_{k+1(s)(10)}^{r+2(00)}(M, V)$, et nous avons bien un homomorphisme des groupes de cohomologie. D'autre part, soit $D_{01}^{00} E \tilde{\varphi}$ un cocycle, voir $D_{01}^{00} E \tilde{\varphi} = D_{01}^{00} \beta$, $R\beta = 0$. Il s'ensuit que

$$E\tilde{\varphi} = \beta + \chi, \quad D_{01}^{00} \chi = 0,$$

ou

$$\tilde{\varphi} = R\chi$$

c'est à dire que la suite

$$H_{k(s)(10)}^{r(00)}(M) \xrightarrow{R^*} \bar{H}_{k(s)(10)}^{r(00)}(V) \xrightarrow{D_{01}^{00*}} H_{(k+1)(s)(10)}^{r+2(00)}(M, V)$$

est exacte.

Définissons enfin un homomorphisme

$$J^* : H_{k(s)(10)}^{r(00)}(M, V) \longrightarrow \bar{H}_{k(s)(01)}^{r(00)}(M)$$

en combinant l'injection naturelle

$$I^*: H_{k(s)}^{r(00)}(M, V) \longrightarrow \bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(M)$$

avec l'isomorphisme canonique sur M compact

$$K^*: H_{k(s)}^{r(00)}(M) \xrightarrow{\cong} \bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(M)$$

donné par l'égalité des formes harmoniques dans les deux groupes. En travaillant avec les formes harmoniques, on obtient selon le procédé usuel l'exactitude de la suite

$$\begin{aligned} J^* \rightarrow \bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(M) \xrightarrow{R^*} \bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(V) \xrightarrow{(D_{01}^{00})^*} H_{k+1(s)}^{r+2(00)}(M, V) \xrightarrow{J^*} \end{aligned} \quad (86)$$

où l'on a inséré les groupes modifiés selon (73) etc. dans les dimensions très petites et très grandes.

Afin d'établir la suite exacte

$$\begin{aligned} J^* \rightarrow H_{k(s)}^{r(00)}(M) \xrightarrow{R^*} \bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(V) \xrightarrow{(D_{0(-1)}^{00})^*} H_{k-1(s)}^{r(00)}(M, V) \xrightarrow{J^*} \end{aligned} \quad (87)$$

on peut suivre la voie indiquée pour la démonstration de (86), en remarquant que de la définition de δ et de la formule (cf. [1](92))

$$*\varphi_k^r = \varepsilon \frac{k!}{(n-r+k)!} L^{n-r} C\varphi_k^r \quad |\varepsilon| = 1,$$

on peut déduire de

$$\delta(\omega^* \wedge \widetilde{\varphi}_0^r) = 0 \quad \text{sur } V$$

que l'on a également

$$\delta(\Omega^* \wedge \widetilde{\varphi}_0^r) = 0 \quad \text{sur } M$$

comme, dans les deux cas, $\delta\varphi = 0$ équivaut à $d^*\varphi = 0$. La démonstration procède alors comme auparavant.

Il convient encore de signaler la suite

$$J^* \rightarrow \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(M) \xrightarrow{R^*} \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(V) \xrightarrow{(D_{0101}^{0011})^*} H_{k+2(s+2)}^{r+4(0011)}(M, V) \xrightarrow{J^*} \quad (88)$$

Par la définition de la notion de classe, et les théorèmes de Hodge, on a

$$H_{k+2(s+2)}^{r+4(0011)}(M) = \Omega^2 \wedge H_{k(s)}^{r(0011)}(M) \quad (89)$$

de façon que l'on peut écrire (88) en explicitant les relations multiplicatives

$$\begin{aligned} \rightarrow \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(M) \rightarrow \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(V) \rightarrow H_{k+2(s+2)}^{r+4(0011)}(M, V) \rightarrow \Omega^2 \wedge \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(M) \rightarrow \\ \rightarrow \omega^2 \wedge \bar{H}_{k(s)}^{r(0011)}(V) \rightarrow. \end{aligned} \quad (90)$$

On peut encore étudier plus en détail les groupes relatifs. Comme on construit les fonctions h_i dans l'espace cartésien des variables ζ^i , on peut encore choisir, pour tout voisinage, un $\varepsilon'_i < \varepsilon_i$, et demander la condition additionnelle

$$d) \quad \frac{\partial h_i(\zeta^i, \bar{\zeta}^i)}{\partial \zeta^A} = \frac{\partial h_i(\zeta^i, \bar{\zeta}^i)}{\partial \bar{\zeta}^A} = 0, \quad A = 1, \dots, n-v, \quad \sum_{A=1}^{n-v} \zeta^A \bar{\zeta}^A < \varepsilon'_i.$$

Comme nous ne traitons maintenant que de variétés *compactes*,

$$\min \varepsilon'_i > 0$$

et, si nous désignons par $\mathfrak{B}_\varepsilon(V)$ l'ensemble des points dont le maximum de la distance de V , calculé dans la métrique euclidienne des $\mathfrak{B}_i$, dont le point fait part, soit inférieur à ε , notre construction nous donne en vérité un homomorphisme

$$\bar{H}_{k(s)}^{r(00)}(V) \rightarrow H_{k+1(s)}^{r+2(00)}(M - \mathfrak{B}_\varepsilon)_c$$

ou le second groupe est calculé dans l'espace $M - \mathfrak{B}_\varepsilon$ avec les formes à support compact. Comme en tout cas les formes qui ne sont pas annulées par J sont à supports compacts, on peut représenter les groupes relatifs par une *limite directe*

$$H_{k(s)}^{r(00)}(M, V) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{k(s)}^{r(00)}(M - \mathfrak{B}_\varepsilon)_c, \quad (91)$$

avec des relations analogues pour les groupes à autres indices.

4. Modifications kählériennes. Rappelons la notion de modification kählérienne: Une variété kählérienne M (de dimension $2n$) et une variété kählérienne M' (de même dimension) sont dites modifications kählériennes l'une de l'autre, s'ils existent une sous-variété V (de dimension $2v$) de M , et une sous-variété V' (de dimension $2v'$) de M' , toutes les deux analytiques (par conséquent kählériennes), telles qu'il existe un homéomorphisme analytique complexe de $M - V$ sur $M' - V'$. Dans le cas des variétés algébriques, les transformations birationnelles dans lesquelles les sous-variétés des éléments exceptionnels sont non-singulières, sont des exemples de modifications kählériennes.

Il se pose le problème de déterminer les relations entre les nombres $\rho_{a,b}$ attachés respectivement à M, M', V, V' . Nous démontrerons que l'on a toujours

$$\rho_{a,b}(M) - \rho_{a,b}(V) = \rho_{a,b}(M') - \rho_{a,b}(V') \quad (92)$$

et, par conséquent, on a aussi pour les nombres de Betti

$$b_r(M) - b_r(V) = b_r(M') - b_r(V') \quad (93)$$

Ces relations ont été établies antérieurement pour les variétés de dimensions ≤ 4 seulement.

Selon (91), une modification kählérienne induit un isomorphisme

$$H_{k(s)}^r(\dots)(M, V) \cong H_{k(s)}^r(\dots)(M', V') \quad (92)$$

et, soit de (91), soit des suites exactes, on voit que les rangs $p_{k(s)}^r(\dots)(M, V)$ des groupes $H_{k(s)}^r(\dots)(M, V)$ sont finis, et l'on a

$$p_{k(s)}^r(\dots)(M, V) = p_{k(s)}^r(\dots)(M', V'). \quad (92')$$

La suite exacte (86) représente en vérité toute une série de suites, dont chacune commence par

$$0 \rightarrow H_{0(s)}^{r(00)}(M, V) \rightarrow \dots \quad (93)$$

Écrivons l'interprétation d'une telle suite en termes de caractéristiques d'Euler, en rappelant que la dimension de $H_{k(s)}^r(\dots)(M)$ est $\rho_{r-s-k, s-k}$, avec $a = r - s$, $b = s$:

$$\sum (-1)^i \rho_{a+i, b-i}(M) - \sum (-1)^i \rho_{a+i, b-i}(V) - \sum (-1)^i \rho_{i(b)}^{r+b+2i} \binom{11}{01} = 0. \quad (94)$$

La première somme dans (94) est, pour la suite (93):

$$\rho_{r-s, s}(M) - \rho_{r-s+1, s-1}(M) + \rho_{r-s+2, s-2}(M) - \dots$$

Le terme

$$\rho_{r-s+1, s-1}(M) - \rho_{r-s+2, s-2}(M) + \dots$$

apparaît encore dans la formule (94) pour la suite

$$0 \rightarrow H_{0(s-1)}^r \binom{00}{01} (M, V) \rightarrow \dots$$

ce qui donne une possibilité de procéder par récurrence.

En effet, introduisons les nombres

$$r_{a,b} = \rho_{a,b}(M) - \rho_{a,b}(V) - \rho_{a,b}(M') + \rho_{a,b}(V') \quad (95)$$

et retranchons la formule (94) pour M' , V' , de (94) pour M , V . Par (92'), on a

$$\sum (-1)^i r_{a+i, b-i} = 0. \quad (96)$$

Par passage au complexe-conjugué on obtient la suite

$$\rightarrow \bar{H}_{k(s)}^r \binom{11}{01} (M) \rightarrow \bar{H}_{r(s)}^k \binom{11}{01} (V) \rightarrow H_{k+1(s+2)}^{r+2} \binom{11}{01} (M, V) \rightarrow \dots \quad (97)$$

et

$$\sum (-1)^i r_{a-i, b+i} = 0. \quad (98)$$

Dans (96) et (98) on prend les sommes pour a, b quelconques et on somme sur tous les termes non-négatifs. Ainsi, on obtient d'abord

$$r_{a,0} = r_{0,b} = 0. \quad (99)$$

puis

$$r_{a,1} - r_{a+1,0} = 0; \quad r_{1,b} - r_{0,b+1} = 0$$

ce qui donne, joint à (99)

$$r_{a,1} = r_{1,b} = 0$$

et, par récurrence, on a enfin

$$r_{a,b} = 0 \quad (100)$$

ce qui est identique à la formule (92) et constitue le *théorème principal* de ce travail.

5. Applications. Dans l'interprétation du théorème principal et dans toutes les applications on tiendra toujours en vue que nous avons supposé les variétés V et V' être sans singularités.

Sur une variété kählérienne compacte, le nombre de Betti b_r est égale à la somme des $p_{a,b}$, nombre des formes harmoniques de type (a, b) , $a + b = r$. On a, pour les dimensions petites

$$p_{a,b} = \sum_{i \geq 0} \rho_{a-i, b-i}, \quad a + b \leq n, \quad (101)$$

et pour toutes les dimensions [1]

$$p_{a,b} = p_{n-a,n-b}. \quad (102)$$

I. Dans la suite

$$0 \rightarrow H_{0(0)}^n(i)(M, V) \rightarrow H_{0(0)}^n(i)(M) \rightarrow \dots$$

tous les groupes sur V sont nuls par des raisons de dimension. Il s'ensuit que

$$H_{k(k)}^{n+k}(i)(M) \cong H_{k(k)}^{n+k}(i)(M, V)$$

et

$$\rho_{a,0}(M) = \rho_{a,0}(M') \quad (103)$$

De (99) et de cette *invariance des genres géométriques* qui a été établie antérieurement [5] on déduit

$$\rho_{a,0}(V) = \rho_{a,0}(V') \quad (104)$$

c'est à dire que deux variétés V et V' ne peuvent se *correspondre dans une modification kählérienne que si leurs* $\rho_{a,0}$ (leurs genres géométriques) *coincident*.

II. Supposons $v = v'$. Nous allons retrouver une partie d'un théorème connu en démontrant que dans ce cas

$$\rho_{a,b}(V) = \rho_{a,b}(V'). \quad (105)$$

En effet, posons

$$\mu_{a,b} = p_{a,b}(M) - p_{a,b}(M')$$

et

$$\nu_{a,b} = p_{a,b}(V) - p_{a,b}(V')$$

on a

$$\mu_{a,b} = \nu_{a,b} \quad a + b \leq v$$

($\rho_{a,b}(V) = 0$ pour $a + b > v$ selon la théorie des formes harmoniques).

Soit d'abord $v < \frac{n}{2}$, voir $n - v > \frac{n}{2} > v$. Appliquons (102) il vient

$$\nu_{a,b} = \mu_{a,b} = \mu_{n-a,n-b}.$$

Mais les $p_{a,b}$ sont les rangs, sur une variété kählérienne compacte, des groupes $H_{(b)}^{i+b}(i) = \sum_k H_{k(b)}^{i+b}(i)$ construites sur l'opérateur de type d^i (ou d^0) et dans la suite exacte

$$\rightarrow H_{(s)}^i(i)(M) \rightarrow H_{(s)}^i(i)(V) \xrightarrow{(d^i)^*} H_{(s)}^{i+1}(i)(M, V) \rightarrow \quad (106)$$

les groupes $H_{(b)}^{i+b}(i)(V)$ sont nulles pour a ou $b > v$, on a donc

$$H_{(n-b)}^{2n-(a+b)}(M) \cong H_{(n-b)}^{2n-(a+b)}(M, V) \cong H_{(n-b)}^{2n-(a+b)}(M', V') \cong H_{(n-b)}^{2n-(a+b)}(M')$$

et

$$p_{n-a,n-b}(M) = p_{n-a,n-b}(M')$$

c'est à dire $\nu_{a,b} = 0$.

Si $v \geq \frac{n}{2}$, on peut arriver à la même conclusion en utilisant (102) dans

$V(V')$ et dans $M(M')$ de la façon suivante: Comme $p_{a,b} = p_{b,a}$, nous pouvons supposer $b < a$. Alors on obtient selon le procédé utilisé que

$$\mu_{a,b} = 0 \quad a > v$$

c'est à dire

$$\nu_{a,b} = 0 \quad a < n - v.$$

Soit maintenant, pour un b fixe

$$\nu_{a_0,b} > 0,$$

$$\nu_{a,b} = 0, \quad a < a_0$$

on a

$$\mu_{a,b} = 0, \quad a < a_0$$

et par (102)

$$p_{n-a,n-b}(M) > p_{n-a_0,n-b}(M')$$

$$p_{n-a,n-b}(M) = p_{n-a,n-b}(M') \quad a < a$$

ce qui donne, par la combinaison des deux suites (106)

$$p_{n-a_0,n-b}(V) > p_{n-a_0,n-b}(V')$$

et, par (102)

$$p_{v-n+a_0,v-n+b}(V) > p_{v-n+a_0,v-n+b}(V')$$

en contradiction avec notre hypothèse.

III. Soit maintenant $v < \frac{n}{2}$. Si nous excluons le cas trivial $v' = v$, nous disons *qu'il est impossible que l'on ait* $v' < n - v - 1$. Nous pouvons supposer $v' > v$.

Soit d'abord $v < v' < \frac{n}{2}$. Nous obtenons de la suite (106)

$$\mu_{v'+1,v'+1} = \mu_{v'+2,v'+2} = \dots = \mu_{n,n} = 0$$

et, par (102)

$$\mu_{n',v'} = 0$$

ce qui ne peut pas être parce $\mu_{v',v'} = 1$, comme la classe de ω^k n'est pas homologue à zéro dans M' pour aucun k .

De la même façon, on a pour $\frac{n}{2} \leq v' < n - v - 1$

$$\mu_{v',v'} = \mu_{n-v',n-v'} = 1$$

et, comme $n - v' - 1 > v$, on a encore

$$\mu_{n-v'-1,n-v'-1} \geq 1$$

ce qui donne le résultat impossible

$$\mu_{v'+1,v'+1} \geq 1.$$

[1] H. GUGGENHEIMER, Comment. Math. Helv. 25(1951), 257-297.

[2] ———, Bull. Res. Council Israel 5A(1955/6), 20-25.

- [3] ———, Tôhoku Math. J., 2nd. Ser., 4(1952), 157-171.
- [4] ———, Complexes avec automorphismes non admissibles, Bull. Res. Counc. Israel 6A(1956/7), No. 1.
- [5] ———, Boll. Un. Mat. Ital. (3) X(1955), 153-160.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, BAR ILAN UNIVERSITY, RAMAT GAN.