Tôhoku Math. Journ.
35 (1983), 513-517.

SUR UNE CAPACITÉ DÉFINIE PAR LA FORME DE DIRICHLET ASSOCIÉE AUX FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

Dédié à Professeur Tamotsu Tsuchikura à l'occasion de son 60e anniversaire

MASAMI OKADA

(Reçu le 7 février 1983)

0. Introduction. Le but de cette note est d'étudier des quantités extrémales définies par une famille de la forme de Dirichlet associée à une fonction plurisousharmonique.

Nous remercions MM. B. Gaveau et J. Siciak pour les discussions stimulantes et également M. U. Cegrell qui m'a signalé une erreur dans le manuscrit.

1. Notation et définition. Soit D un domaine strictement pseudo-convexe borné et soit $K \subset D$ un compact. On note par PSH(D) l'ensemble de toutes les fonctions plurisousharmoniques et on définit $C_1(K)$ et $C_2(K)$ respectivement par

$$C_1(K) = \sup_{p \in \mathscr{P}} \inf_{u \in \mathscr{D}_K} \int_D du \wedge d^c u \wedge (dd^c p)^{n-1}$$

$$C_2(K) = \inf_{u \in \mathscr{D}_K} \sup_{p \in \mathscr{P}} \int_D du \wedge d^c u \wedge (dd^c p)^{n-1} ,$$

où $\mathscr{P} = \{p \in \mathrm{PSH}(D); 0 < p < 1\}$ et $\mathscr{D}_K = \{u \in C_0^\infty(D); u \geqq 1 \text{ sur } K\}$.

2. Propriétés capacitaires de C_1.

Montrons d'abord la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *On se donne une suite décroissante des compacts K_n telle que $\bigcap_{n=1}^\infty K_n = K$. Alors on a, $C_1(K_n) \to C_1(K)$ $(n \to \infty)$.*

PREUVE. Fixons d'abord un élément p de $\mathscr{P}$ et posons

$$C^p(K) = \inf_{u \in \mathscr{D}_K} \int du \wedge d^c u \wedge (dd^c p)^{n-1} .$$

Alors pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un élément u_0 de $\mathscr{D}_K$ tel que

$$C^p(K) + \varepsilon \geqq \int du_0 \wedge d^c u_0 \wedge (dd^c p)^{n-1} .$$

Ensuite puisque $K_n \downarrow K$ il existe n_0 qui ne dépend pas de p tel que l'on ait,

$$u_0 \geqq 1 - \varepsilon \text{ sur } K_n \text{ pour tout } n \geqq n_0 .$$

Par conséquent, $(1-\varepsilon)^{-1}u_0$ étant un élément de $\mathscr{D}_{K_n}$, on a par la définition de C^p,

$$\int du_0 \wedge d^c u_0 \wedge (dd^c p)^{n-1} \geqq (1-\varepsilon)^2 C^p(K_n) ,$$

d'où

$$C^p(K) + \varepsilon \geqq (1-\varepsilon)^2 C^p(K_n) .$$

Donc pour tout $n \geqq n_0$

$$C_1(K) + \varepsilon = \sup_{p \in \mathscr{P}} C^p(K) + \varepsilon \geqq (1-\varepsilon)^2 \sup_{p \in \mathscr{P}} C^p(K_n) \geqq (1-\varepsilon)^2 C_1(K_n) .$$

Ceci n'est rien d'autre que

$$C_1(K) + \varepsilon = (1-\varepsilon)^2 \limsup_{n \to \infty} C_1(K_n) ,$$

et ε étant un nombre positif quelconque, on en déduit la conclusion.

Définissons maintenant la capacité extérieure C_1^* par

$$C_1^*(E) = \sup_{K \subset E} C_1(K), \text{ pour une partie quelconque } E \text{ de } D .$$

On remarque alors que $C_1^*(K) = C_1(K)$.

Montrons que C_1^* satisfait à la

PROPOSITION 2. *On se donne un ensemble E et une suite croissante des ensembles E_n tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Alors on a,*

$$C_1^*(E_n) \to C_1^*(E) \qquad (n \to \infty) .$$

PREUVE. Remarquons d'abord que $C_1^*(E) = \sup_{p \in \mathscr{P}} \sup_{K \subset E} C^p(K) \equiv \sup_{p \in \mathscr{P}} C^{p*}(E)$ par définition. Ensuite C^p étant une capacité, on a $C^{p*}(E_n) \to C^{p*}(E)$. Voir par exemple [3]. D'où la conclusion.

Comme un corollaire des propositions précédentes on a le

THÉORÈME 1. *C_1 définit une capacité.*

3. Equivalence des trois quantités. Montrons que C_1 et C_2 sont équivalentes à la capacité de Bedford-Taylor [1].

On se rappelle d'abord que la fonction capacitaire de Siciak $u_K^*(z)$ est définie par

$$u_K^*(z) = \limsup_{\zeta \to z} \sup\{p(\zeta);\, p \in \mathrm{PSH}(D),\ p < 0 \text{ dans } D,\ p < -1 \text{ sur } K\} .$$

Ensuite la capacité de Bedford-Taylor $C(K, D)$ est définie par

$$C(K, D) = \sup_{p \in \mathscr{P}} \int_K (dd^c p)^n = \int_D (dd^c u_K^*)^n .$$

Enonçons alors un résultat sur l'équivalence des trois quantités. Voir aussi [5].

THÉORÈME 2. *Il existe une constante absolue* a_n $(\leqq n!/2)$ *telle que l'on ait*

$$C(K, D) \leqq C_1(K) \leqq C_2(K) \leqq a_n C(K, D) .$$

PREUVE. La première inégalité s'obtient immédiatement de l'égalité suivante [6]: $C(K, D) = C^{p_0}(K)$, où $p_0 = u_K^*$.

Ensuite on a la deuxième par la définition même de C_1 et C_2.

$1^{\text{ére}}$ étape. On définit d'abord une suite décroissante des ouverts $\{O_j\}_{j=1}^{\infty}$ par

$$O_j = \{z \in D; \operatorname{dist}(z, K) < 1/j\} ,$$

et $u_{O_j}^*$ est définie de façon analogue à u_K^*. Ensuite posons une régularisation de $u_{O_j}^*$ par

$$v \equiv v_\varepsilon^j = \chi_\varepsilon * u_{O_j}^* ,$$

qui est définie dans $D_\varepsilon = \{z \in D; \operatorname{dist}(z, \partial D) > \varepsilon\}$. Ceci nous donne une fonction plurisousharmonique v telle que $v = -1$ sur K pour $\varepsilon \leqq \varepsilon_0$, avec ε_0 un nombre positif assez petit.

Et puis on définit une fonction ξ par

$$\xi(t) = \begin{cases} \{(-t-\delta)/(1-\delta)\}^\alpha & \cdots \ -1 \leqq t \leqq -\delta \\ 0 & \cdots \ -\delta \leqq t \leqq 0 , \end{cases}$$

où $\delta \geqq \varepsilon_0$ est un nombre positif et α est un nombre $> n/2$.

Alors $u = \xi(v)$ est un élément de $\mathscr{D}_K$ tel que

$$\operatorname{supp} u \subset \{v \leqq \delta\} \subset D_\beta \subset D , \quad \text{avec } D_\beta = \{v < -\beta\} \text{ où } 0 < \beta < \delta .$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} C_2(K) &\leqq \sup_{p \in \mathscr{P}} \int_D du \wedge d^c u \wedge (dd^c p)^{n-1} \\ &= \sup_{p \in \mathscr{P}} \int (\xi')^2 dv \wedge d^c v \wedge (dd^c p)^{n-1} . \end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ étape. Tout d'abord on fixe un élément p de $\mathscr{P}$ et on pose

$$L = \int_D (\xi')^2(v) dv \wedge d^c v \wedge (dd^c p)^{n-1} .$$

Ensuite en posant $\varphi = (\xi')^2$ on remarque que

$$\varphi' \leqq 0, \varphi'' \geqq 0, \cdots (-1)^n \varphi^{(n-2)} \geqq 0 \text{ sur } [-1, 0] .$$

Et puis on applique le théorème de Stokes à

$$L = \int_D \varphi dv \wedge d^c v \wedge dd^c(p-1) \wedge w_{n-2} , \quad \text{avec } w_{n-2} = (dd^c p)^{n-2}$$

en tenant compte du fait que $\varphi(v)$ a le support compact et v est une fonction plurisousharmonique lisse. Alors L équivaut à

$$\int (1-p)(\varphi dd^c v + \varphi' dv \wedge d^c v) \wedge dd^c v \wedge w_{n-2}$$
$$\leqq \int \varphi (dd^c v)^2 \wedge w_{n-2} .$$

Et puis on pose

$$M = \int \varphi (dd^c v)^2 \wedge w_{n-2} = \int \varphi dd^c p \wedge w_{n-1} \text{ avec } w_{n-1} = (dd^c v)^2 \wedge (dd^c p)^{n-3} .$$

Alors par le même calcul on a

$$M = \int p(\varphi' dd^c v + \varphi'' dv \wedge d^c v) \wedge w_{n-1} .$$

En répétant cet argument ceci se majore par

$$\int_D \varphi^{(n-2)} (dd^c v)^n = \int_D (\xi'^2)^{(n-2)} (dd^c v_\varepsilon^j)^n \leqq \sup |(\xi'^2)^{(n-2)}| \int_D (dd^c v_\varepsilon^j)^n .$$

$3^{\text{ème}}$ étape. D'abord en faisant α tendre vers $n/2$,

$$(\xi'^2)^{(n-2)} \to n\, n!/(4(n-1)(1-\delta)^n) = n!/2(1-\delta)^n .$$

Ensuite d'après [1], on a

$$(dd^c v_\varepsilon^j)^n \to (dd^c u_{O_j}^*)^n \qquad (\varepsilon \downarrow 0) ,$$

d'où

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_{D_\beta} (dd^c v_\varepsilon^j)^n \leqq \int_{\bar{D}_\beta} (dd^c u_{O_j}^*)^n = \int_D (dd^c u_{O_j}^*)^n = C(O_j, D) .$$

Finalement p et δ étant quelconques on arrive à l'inégalité cherchée: $C_2(K) = (n!/2) C(K, D)$, car on a, $C(O_j, D) \to C(K, D)$ $(j \to \infty)$ [1].

4. **Remarques.** (1) Théorème 2 montre que lorsque $n=2$, on a l'égalité: $C(K, D) = C_1(K) = C_2(K)$, donc C_2 définit aussi une capacité [5].

(2) Une étude probabiliste de la capacité entre autres est effectuée dans [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BEDFORD ET B. A. TAYLOR, Some potential theoretic properties of plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[2] U. CEGRELL, Capacities and extremal plurisubharmonic functions on subsets of C^n, Ark. Mat.

[3] M. FUKUSHIMA, Dirichlet Forms and Markov Processes, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[4] M. FUKUSHIMA ET M. OKADA, à paraître dans J. Functional Analysis, 1984.

[5] B. GAVEAU ET J. ŁAWRYNOWICZ, Intégrale de Dirichlet sur une variété complexe, I, Séminaire P. Lelong—H. Skoda, Lecture Notes in Math. N°919, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1982, 131-167.

[6] M. OKADA, Espaces de Dirichlet généraux en analyse complexe, J. Functional Analysis 46 (1982), 396-410.

[7] J. SICIAK, Extremal Plurisubharmonic Functions and Capacities in C^n, Lecture Notes N°14, Sophia Univ., Tokyo, 1982.

INSTITUT MATHÉMATIQUES
TÔHOKU UNIVERSITÉ
980 SENDAI
JAPON