У ИСТОКОВ АКСИОМАТИК ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ДОСТИЖЕНИЯ ГЕРМАНА И РОБЕРТА ГРАССМАНОВ[1]

Л. Г. БИРЮКОВА

&

Б. В. БИРЮКОВ

119 кв. 253, Проспект Вернадского
117571 Москва
Россия

Abstract. The axiomatic source of fundamental algebraic structures, such as groups and rings, is traced to the achievements of the brothers Hermann and Robert Grassmann. Algebra is the source of model structures for the theory of algorithms. In this respect, the work of the Grassmann brothers is the basis, for example, of Markov's constructivist theory of algorithms.

The concept of the semigroup is to be traced to Hermann and Robert Grassmann's general doctrine of forms, or *Formenlehre*, as developed in Robert Grassmann's *Die Begriffslehre oder Logik: Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*; and in such of Hermann Grassmann's works as the *Ausdehnungs-*

---

[1] Статья представляет собой расширенный и исправленный вариант публикации авторов «Алгоритмические проблемы XX века и становление фундаментальных алгебраических структур: вклад Германа и Роберта Грассманов» в книга «Методологический анализ оснований математики», с. 164-171 (напечататнной, к сожалению, с изобилием опечаток, М., Наука, 1988).

Данная публикация подготовлена в рамках проекта, финанируемого Международным научным фондом «культурная инициатива».

lehre is to be found the definition of an abstract group (ten years before Cayley's work on groups), and the concept of ring is developed, yielding both left and right rings. In addition to semigroups, quasigroups, groups, rings, and fields, a more general development in the *Formenlehre* provides the axiomatic basis for lattices and Boolean algebra.

В литературе по основаниям математики неизменно подчеркивается связь конструктивного направления с теорией алгоритмов и концепцией эффективной вычислимости. Реже обращают внимание на отношение этого направления к алгебре. Между тем учет этого отношения существенен, так как значительная часть результатов, относящихся к неразрешимым массовым проблемам — алгоритмической неразрешимости, — получилась и получается математиками, работающими с теми или иными алгебраическими структурами.

Возникновение и развитие конструктивного направления тесно связано с изучением объектов алгебраической природы. Достаточно сказать, что теория нормальных алгоритмов, разработанная основополо-жником математического конструктивизма в России — А. А. Марковым, во многом выросла из проблематики алгоритмической неразрешимости — расрешимости.

1. Алгебра как источник модельных структур для теории алгоритмов.

Рассматривая историю общематематической (и общелогической) проблемы разрешимости, мы обнаруживаем важную роль, которую в ее динамике сыграло установление невозможности алгоритма, разрешающего вопрос о «тождестве слов» в ассоциативных исчислениях. Вопрос этот легко переводим на алгебраический язык, а именно, на язык полугрупп. Мы начинаем наш разговор о проблеме «алгебра — алгоритм» именно с полугрупп не случайно. Ведь полугрупп — это наиболее бедная свойствами алгебраическая структура из числа тех внелогических структур, на которых отрабатывались представления об алгоритмической разрешимости — неразрешимости. Опыт, приобретенный на этом пути, получил развитие в аналогичной теоретико-групповой проблематике. Но сначала несколько слов о становлении конструктивного направления.

Идейно связанный с интуиционизмом, конструктивизм сложился, как известно, после формулировки точного понятия алгоритма. Ориентация на алгоритмические методы — это главное, что отличает конструктивистскую математику от интуиционистского направления. Для развития констуктивистких концепций в нашем веке решающим оказалось открытие алгоритмически неразрешимых массовых проблем. Каждая массовая проблема охватывает бесконечный класс конкретных задач, которые различаются значениями некоторого параметра (параметров), фигурирующего в условии (условиях), задающем данную массовую проблему. По определению, массовая проблема разрешима, т.е. имеет решение, когда каждая конкретная задача — задача, получающаяся после выбора какого-либо значения (значений) параметра (параметров) массовой проблемы, — получает решение в результате применения единообразного (регулярного, как выражался, например, Н. Н. Лузин) метода. При этом требуемый результат получается за конечное число шагов применения метода — число это может быть, правда, очень большим, но от этого отвлекаются: производят так называемую абстракцию потенциальной осуществимости [Марков *1954*, 15; Марков & Нагорный *1984*, 35]. Регулярность метода состоит в его эффективности: он должен «перерабатывать» конструктивные объекты (объекты однозначно различаемые и отождествляемые), быть детерминированным и целенаправленным. Детерминированность состоит в том, что в работе «исполнительного устройства», реализующего метод, не допускается никакого «произвола», — в обязательном решении исследуемой конкретной задачи, если решение это в принципе возможно для выбранного значения параметра (параметров). Понятие алгоритма как «точного предписания, определяющего вычислительный процесс, ведущий от варьируемых исходных данных к искомому результату», как разъясняет это понятие А. А. Марков [Марков *1954*, 3], — и служит экспликации представлений о такого рода регулярном методе. Массовая проблема разрешима (или, говоря более развернуто, алгоритмически разрешема), если такого рода метод существует, и неразрешима, если его не может быть; массовая проблема называется иначе алгоритмической проблемой, поскольку искомый разрешающий метод должен быть алгоритмом. Экликации понятия алгоритма, в 30-х — 40-х годах поразному разроботанные рядом математиков и логиков[2], оказались равносильными в том смысле, что они описывают по существу одинаковый процесс: вычисление, построесние, дедуктивное доказательство и т.п., осуществляемое по четким правилам. Открытие этой равносильности оказалось примечательным математико-логическим достижением, явившимся своего рода реакцией на неразрешимость некоторых массовх проблем.

Первые неразрешимые проблемы, как известно, были найдены непосредственно в математической логике. В 1936 г. А. Чёрч показал неразрешимость массовой проблемы, смысл которой состоял в установлении того, является ли произвольная формула исчисления предикатов первого порядка — без кванторов по предикатам — доказуемой (или нет), После разработки (в середине 30-х годов) теории алгоритмов (теории, занимающейся уточнением понятия алгоритма) неразрешимые массовые проблемы были открыты в самой этой теории. Наиболее известной из них является алгоритмическая проблема распознавания того, примененим ли произвольный алгоритм данного вида (скажем, нормальный алгорифм Маркова) к самому себе как некоторому конструктивномы объекту или нет.

Стоит, однако, отметить, что математическая логика и теория алгоритмов в некотором смысле, «экзоточны» — далеки от «традиционных» математических дисциплин. Поэтому возникал вопрос: а не есть ли алгоритмическая неразрешимость выражение именно этой «экзотичности». В пользу этой гипотезы говорила, как будто, и специфичность первых найденных неразрешимых проблем, например, их «самоссылочность» — сходство со знаменитым «парадоксом лжеца».

Вопрос о том, имеются ли в «обычных» математических теориях такие массовые проблемы, для которых невозможен решающий их алгоритм, не сразу получил ответ. Прошло более десяти лет, пока, наконец, А. А. Марков и Э. Пост не дали на него утвердительного ответа. Это произошло в одном и том же 1947 году, и соответсвующие результаты были получены независимо одним от другого.

Проблема, о которой идеет речь, была сформулирована А. Туэ в 1914 г. [Thue *1914*], применительно к теории полугрупп и заключалась в решении для нее упомянутой ***проблемы***

---

[2] Не останавливаясь на этих экспликациях, мы отсылаем читателя к книгам [Клини *1957*], [Марков & Нагорный *1984*].

тождества слов. Исследуя проблему Туэ, А. А. Марков ввел понятие *ассоциативного исчисления* — исчисления, которое служило для задание конечно определенных полугрупп. Напомним: ассциативное исчисление имеет следующий вид. Предполагается, (конечный) алфавит (букв), из которых строятся слов в этом алфавите. Предполагается, далее, конечный перечень формул подстановок (под)слов в слова, то эсть правил вида $PQ_1R \leftrightarrow PQ_2R$, имеющих смысл: в слов PQ_1R мы имеем право заменить (под)слово Q_1 (под)словом Q_2, а в слове PQ_2R (под)слово Q_2 — (под)словом Q_1. Так, если задан алфавит A (например, состоящий из всех строчных букв кириллицы) и некоторый перечень формул подстановок (скажем *аб* ↔ *ба*, *ав* ↔*ва*, *гб* ↔ *бг*, *гв* ↔ *вг*, *дба* ↔ *бд*, *дбг* ↔ *гд*, *бба* ↔ *ббад*), любая из которых может быть применима к данному слову, если в нем содержится (под)слово, входящее в левую либо правую часть рассматриваемой формулы подстановки, то тем самым задано определенное ассоциативное исчисление U_{α}, и на множестве слов в алфавите A определено отношение типа равенства (тождества, эквивалентности): два слова S и T тождественные, если и только если они графически совпадают или одно может быть получено из другого с помощью формул подстановок, примененных конечное число раз. Это отношение разбивает все множество слов в алфавит A на классы эквивалентности; эти классы составляют элементы той полугрупп, которая соответствует данному исчислению U_{α}; что касается операции полугрупп, то ею является конкатенация слов, т.е. простое приписывание (например, справа) слова к слову.

Проблема Туэ для полугрупп (ассоциативных исчислений) заключалась в построении алгоритма, который по двум предъявленным произвльным словам в заданном ассоциативном исчислении давал бы ответ на вопрос, равны эти слова или нет (в смысле описанного выше отношения тождества слов). Марков и Пост решили эту проблему отрицательно, построив конкретные полугруппы, для которых проблема тождества неразрешима [Марков *1947*; Post *1947*]. Задание этих плоугрупп было весьма сложным, и впоследствии были построены более простые полугруппы с неразрешимой проблемой тождества, в частности полугруппа, соответствующая система формул подстановок, или, ха языке алгебры, определяющих соотношений для полугруппы, приведенной наши выше [Цейтин *1956*].

Еще до формулировки А. Туэ проблемы, названной его именем, такую же проблему тождества слов — но только для групп — поставил в 1912 г. М. Ден [Dehn *1912*]. Решена она была, причем решена тоже отрицательно, только в 1952 г., когда П. С. Новиков построил группу, проблема тождества слов для которой неразрешима [Новиков *1952*]. После этого была получена серия аналолгичных результатов: так, для групп А. А. Марков доказал неразрешимость проблемы их изоморфии: он доказал невозможность алгоритма, используя который для двух произвольных групп Γ_1 и Γ_2 можно было бы решить, изоморфны они или нет; Маркову же принадлежит отрицательное решение проблемы гомеоморфии для топологических пространств (n–мерных многообразий) и другие аналогичные достижения.

Накопленный опыт изучения очерченных выше вопросов приводит к ряду методологически примечательных выводов. Выясняется, что алгоритмическая неразрешимость есть и общелогический, и общематематический феномен, поскольку неразрешимые массовые проблемы обнаруживаются в самых различных ответвлениях логического и математического знания: в дедукивной логике, теории алгоритмов, алгебре, топологии и др. заслуживает быть отмеченным то, что многие из них связаны с таким первичным отношением, как отношение типа равенства (тождество слов, изоморфизм, гомеоморфия, и.т.п.). Становится ясно, что источником модельных объектов (выражение А. А. Ляпунова), удобных для исследования алгоритмической разрешимости-неразрешимости являются алгебраические структуры, что подобоные модельные объекты могут быть (как с точки зрения их задания, так и их свойств) достаточно простыми — быть группой или даже полугруппой, что решение массовой проблемы, связанной с такого рода объектом, есть дело достаточно трудное, и это не только когда решение отрицатель-но: для некоторых классов полугрупп и групп *положительные* решения проблемы тождества слов была получены только в 40-х годах нашего века.

В заключение о связи проблемы разрешимости с конструктивизмом. Хотя по содержанию своему разработка вопросов разрешимости не составляет исключительную прерогативу конструктивного направления, она, такого рода разработка, как показывает история оснований математики, все же особенно привлекает конструктивистов (А. А. Марков), логиков и математиков, придерживающихся родственной конструктивизму финитной установки,[3] и математико-логических «классиков», стремящихся со своих позиций осмыслить конструк-тивистские результаты [Новиков *1977*].

Мы описали тот историко-методологический фон, который объясняет актуальность изучения *аксиоматик* упомаянутых выше алгебраических модельных структур: ограничение вопросами подобных аксиоматик естественно, так как такого рода начал теорий упомянутых структур по сути дела достаточно для постановки проблем типа тождества слов.

2. «Общее учение о формах» Герман Грассмана. Идея полугруппы.

История возникновения аксиоматик, которые мы имеем в виду, относится к математике XIX столетия. Интересно, что соответствующие аксиоматические разработки уже тогда оказались в связи с генетически-конструктивистской установкой в математическом мышлении. Такая постановка вопроса естественным образом приводит нас к математикам (и философам!) братьям Герману и Роберту Грассманам, вклад которых в названную установку показан, например, в статье [Бирюков & Бирюкова *1982*]. Изучение их наследия проливает новый свет на то, как начали складываться связи между рассмотрениями таких исходных структур алгебры, как полугруппа, квазигруппа, группа (и «надстраивающиеся» над ними структурами кольца и поля), а также решетка и булева алгебра, с идеями генетического и конструктивистского подхода в математике XIX столетия. В данной статье — в развитие сказанного нами в публикации [Бирюкова *1995*] — мы покажем, как такого рода связи воплотились в работах Г. и Р. Грассманов. Проводя свои алгебраические и математико-логические исследования, они впервые в истории науки выдвинули продуманную генетически-конструктивистскую программу построения математик (в рамках возможностей знания своего времени) и вместе с тем сформулировали системы постулатов, задающие многие из названных выше алгебраических структур.[4]

---

[3] Ср. труд представителя «финитистской» школы В. Аккермана [Ackermann *1954*].

[4] К сожалению, ни программно-методологический (философско-математический), ни логико-алгебраический аспекты наследия Г. и Р.

Структуры, ныне считающиеся в алгебре фундаментальными, были описаны Германом Грассманом в труде 1844 года — «Учение о линейных протяженносях» [H. Grassmann *1844*]. Это описание дается в «Очерке общего учения о формах», помещенном автором непосредственно после «Введения» к этой книге. «Очерк» включает двенадцать параграфов. Для нас существенны первые шесть: §1. «Понятие равенства»; §2. «Понятие сочленения»; §3. «Совместимость»; §4. «Перестановочность»; §5. «Синтетическое и аналтическое сочленение»; §6. «Однозначность анализа; сложение и вычитание». В «Очерке» мы обнруживаем основные идеи, получившие продолжение в грассмановском «Учебнике арифметики» 1860/ 1861 года [H. Grassmann *1861*] и впоследствии детально и систематически разработанные в «Общен учении о величинах» Роберта Грассмана [R. Grassmann *1872*], вышедшем в 1872 году.

Прежде всего об «обшем учении о формах» Г. Грассмана. Предметом этого учения являются «формальные» понятия равенства и сочленения (связывания), которые трактуются: первое — как бинарное отношение между формами (величинами в широком смысле), подпадающее под известное Лейбницево определелие равенства, а второе — как бинарная операция над формами, обладающая весьма ограниченными наборам свойств. А именно, понимаемое «по Лейбницу» (без ссылки на последнего) отношение равенства определяется с помощью представления о взаимозаменимости выражений в контекстах (ср. [Яновская *1967*; Донченко *1967*; Бирюков *1967*]: «равными являются те формы, о которых всегда может быть высказано одно и то же, или более общо: такие ‹формы›, которые в каждом суждении заменяемы одна другой» [H. Grassmann *1844*, 2; *1894*, 34]).

Очевидно, что отношение равенства — логическая основа правила замены равным позволяющего производить тождест-

---

Грассманов — в том плане, в котором он рассматривается в наших работах, — не нашел отражения в доступной нам зарубежной литературе. Это касается даже обширной статьи А. Льюиса 1977 г. [Lewis *1977*]. Не обнаружили мы докладов, касающихся интересующих нас сторон творчества братьев, и в тезисах к состоявшейся в Германии в 1994 г. международной конференции, посвященной 150-летию главного труда Г. Грассмана — «Учения о линейных протяженностях» [Screiber *1995*]. Еще дальше от нашей проблематики стоят публикации типа доклада Ж. Дьедонне [Dieudonné *1979*].

венные преобразования «форм» (величин). В привычных нам тепер обозначениях это можно записать так: $a = b =_{df} \Phi[a] \equiv \Phi[b]$, где $a = b$ — произвольные формы, Φ — любое возможное высказывание о формах (знак ‚$\equiv$' означает логическую еквивалентность, передаваемую словами «тогда, и только тогда», «если, и тогда если», а ‚$=_{df}$' читается «есть по определению».) Г. Грассман указывает, что в этом определении содержится правило, которое можно записать в слудующем виде: для любых форм a, b, c, если $a = c$, и $b = c$, то $a = b$. В самом деле, поскольку $b = c$, а про c из первой посылки известно, что оно равно a, значит, и b таково, что $a = b$. Заметим, что аналогино доказывается и используемое Г. Грассманом в дальнейшем свойство транзитивности отношения равенства. Что касается рефлексивности и симметричности, то эти свойства отношения равенства непосредственно содержатся в грассманов-ском определении. Оно, таким образом, предусматривает любые «отношения типа эквивалентности», в частности и те, которые впоследствии использовались другими математики при задании массовых проблем тождества слов в теории полугрупп и групп.

Будучи решительным сторонником генетического метода в матемтики, Г. Грассман формулирует отношение равенства также и в «генетических» (как мы теперь можем сказать) терминах: «то, что из одинакового порождается одним и тем же способом, в свою очередь одинаково»; это определение вполне в духе последующих ассоциативных исчислений как порождающих процессов.

Наряду с отношением равенства форм вводится понятие об их сочлененим (связывании). Сочленение, по Г. Грассману, есть некоторая бинарная операция — оно обозначается им знаком ‚$\frown$', — которая из двух форм порождает в общем случае новую форму; в записи $a \frown b$ буква a обозначает предшествующий член, а буква b — послдующий член соченения. Для удобства, говоря словами Грассмана, вводится сокращение в обозначениях: в случае сочленения членов, число которых больше, чем два, скобки разрешается опускать, то есть писать,[5] например, $(((a \frown$

[5] В книге Ф. Крафта [Kraft *1893*], вышедшей в 1893 г. и содержащей более доступное, по мнению ее автора, изложение «геометрического исчисления» Г. Грассмана, обосновывается удаление скобок по ассоциативности влево, опираясь на условие, согласно которому результат

$b) \cap c) \cap d) = a \cap b \cap c \cap d$.

Далее, в §3, введенная операция предполагается обладающей свойством ассоциативности (в грассмановской терминологии — совместимости предшествующего и последующего членов), то есть свойством: $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b \cap c$. Тем самым вводится то, что ныне называется полугруппой, причем полугруппой абстрактной — как множества всех «форм», на котором определена единственная бинарная ассоциативная операция.

В последующем мысль Г. Грассмана развивается следующим образом. Прибекая фактически к «свернутому» рассуждению по индукции, он доказывает теорему (т. 3.1) о том, что «если сочленение таково, что для трех членов удаление скобки возможно, то это же возможно при любом числе членов» (под скобкой при этом понимается совокупность двух знаков — открытия и закрытия скобки); естественно, конечно, и разрешение восстанавливать удаленные (подразумеваемые) скобки.

В §4 вводится свойство перестановочности сочленения: $a \cap b = b \cap a$, которое добавляется к уже введенному свойству ассоциативности. Так получается то, что сейчас называется коммутативной полугруппой. Г. Грассман подчеркивает, что свойство ассоциативности предшествует свойству коммутативности в следующем смысле: если для некоторого сочленения установлена только перестановочность двух его членонов, то отсюда не могут быть извлечены какие-либо следствия, но есле ее присоединить к ранее введенному свойству «совместимости» членов, то можно доказать ряд предложений (теорем). Среди последних важно прежде всего заключение, что «в случае многочленного выражения порядок членов безразличен для общего результата».

Подразумеваемое Г. Грассманом обоснование этого следствия легко восстановить. В самом деле, любые рядом стоящие члены — в последующих быкладках пусть это будут b и c — можно обменять местами:

произвольной бинархой операции — последнюю Крафт, как и до него Р. Грассман (в работе 1872 г. [R. Grassmann *1872*]), обозначает знаком ,o' — должен быть заключен в скобки. Записывая это условие в виде равенства $a \circ b = (a \circ b)$, он выводит из него, используя (без упоминания этого) правила замены равным, что $(a \circ b) \circ c = \{(a \circ b) \circ c\}$; положив $a \circ b = d$ и опираясь на то, что тогда и $a \circ b = d$, он получает, что $a \circ b \circ c = \{(a \circ b) \circ c\}$.

$$
\begin{aligned}
& a \cap b \cap c \cap \ldots \cap g \\
& = a \cap (b \cap c) \cap \ldots \cap g && \text{(по теорем 3.1)} \\
& = a \cap (c \cap b) \cap \ldots \cap g && \text{(по свойству коммутатив-} \\
& && \text{ности операции } \cap \text{ и} \\
& && \text{правилу замены)} \\
& = a \cap c \cap b \cap \ldots \cap g && \text{(по теорем 3.1).}
\end{aligned}
$$

Повторяя процедуру перестановки любых двух рядом стоящих членов, мы можем любой член поместить на любое место. Не считая, повидимому, нужным индуктивно доказывать это утверждение, Г. Грассман формулирует общий вывод: «Если сочленение таково, что для трех членов без изменения результата скобки можно расставлять любым способом, а для двух членов — менять порядок последних, то расстановка скобок и проядок членов безразличны для результата при любом числе членов» [H. Grassmann *1844*, 4; *1894*, 36]. Сочленение, удовлетворяющее этому условию, то эсть *ассоциативную и коммутативную* бинарную операцию, определенную на формах и порождающую формы же, он называет *простым* сочленением.

В следующем, пятом, параграфе происходит введение операции, являющейся обратной относительно иходного сочленения и обозначаемой знаком ‚$\cup$‘. Она получает название «аналитического сочленения», «аналитической процедуры» или просто «анализа», в то время как исходная — прямая — операция получает отныне наименование «синтетической» или «синтеза». Анализ характеризуется так. «Аналитическая процедура состоит в том, что по результату сочления и одному из его членов отыскивается другой. Поэтому с произвольным сочленением могут быть связаны процедуры двух родов, смотря по тому, что отыскивается, — предшествующий или последующий член; процедуры обоих родов дают один и тот же результат, каогда оба члена исходного сочленения престановочны [H. Grassmann *1844*, 5; *1894*, 36].

Стоит обратить внимание на то, что здесь предполагается ни ассоциативности, ни коммутативности синтеза: обратной может быть и операция, прямая к которой не коммутативна (это, как мы увидим, проводит к понятию абстрактной группы) и даже не ассоциативна. Последнее допущение порождает, в современных терминах, понятие (абстрактной) квазигруппы как множества всех «форм», на котором определена бинарная операция, для которой существуют две ей обратные (понятие квазигруппы на конкретных примерах впервые было подробно рассмотрено Э. Шрёдером (см. [Ибрагимов *1978*])).

Г. Грассман, однако, не встает на путь этих, более общих, рассмотрений — исследования полугрупп и квазигрупп, только подразумевая их возможность. Он исходит из предположения, что исходное синтетическое сочленение просто (то есть ассоциативно и коммутативно) и извлекает из этого допущения ряд производных свойств, характеризующих операции $\frown$ и $\smile$ и их взаимоотношения. Именно с етого момента «теория форм» Г. Грассмана приобретает особенный логико-методологический и историко-математический интерес.

Вернемся к грассмановскому «анализу». Как мы могли убедиться, когда излагали приведенное выше описательное определение, способ введения «аналитического сочленения» по данному синтетическому изложен Г. Грассманом весьма скупо. Поэтому возникает задача его реконструкции. Обозначим «разыскиваемый» член синтетического сочленения, если он предшествует знаку ‚$\frown$', через x, а если он следует за ним, то через y. Таким образом, мы имеем:

$$1)\ x \frown b = a \qquad \text{и} \qquad 2)\ c \frown b = a.$$

Если операции синтеза коммутативна, то есть $c \frown y = y \frown c$, то $x \frown b = y \frown c = a$. Если же b и c — одинаковые формы, то $x \frown b = y \frown b = a$. Получается, что разыскать x по данным a и b — это все равно, что разыскать y по тем же a и b.

Поскольку при записи найденного результата важен и вопрос о порядке для форм a и b, Г. Грассман вводит условие: при аналитическом сочленении в качестве предшествующего члена должен выступать результат синтетического сочленения, являющийся заданным. Это условие дает возможность «анализ» с «синтезом» так, что аналитическая процедура в случае арифметики целых чисел оказывается обычной операцией вычитания. Отсюда следующее определение «аналитического сочленения» (§5): $a \smile b$ означает такую форму, которая в синтетическом сочленении с b дает a так что можно записать:

$$(1) \qquad (a \smile b) \frown b = a.$$

Затем следует дальнейшей спаг (§6): Г. Грассман вводит «новое допущение» о том, что результат аналитического или разрешающего (как он его еще называет) сочленения должен быть однозначен; это утверждение означает, «иначе говоря, что если один член синтетического сочленения остается неизменным, а другой изменяется, то обязательно изменяется и результат» [H. Grassmann *1844*, 38].

Это не очен ясное утверждение (что значит «изменение формы (величины)»?) наполняется реальным содержанием, если его прочитать как логический переход[6]

(I) $$a \neq b \vdash a \cap c \neq b \cap c,$$

или, что по существу то же самое, как правило

(II) $$a \cap c = b \cap c \vdash a = b;$$

поскольку c, в силу коммутативности операции $\cap$ можно обменять местами с a и b, то мы имеем также правило: $c \cap a = c \cap b \vdash a = b$.

Теперь нетрудно убедиться в том, что из (II) вытекает однозначность анализа.[7] Если $x \cap b = y \cap a = a$, то из (II) слеуед, что $x = y$. И «решая уравнения» $x \cap b = a$ и $y \cap b = a$ по отдельности, мы придем к тому, что x и y имеют один итот же вид $a \cup b$.

Явная формулировка правила (II) делает ясным и смысл утвержсения Г. Грассмана о том, что из однозначности анализа

---

[6] Вместо привычного ныне знака ‚≠‘ Г. Грассман использует знак ‚Z‘; однако мы не станем следовать ему в этом.

[7] В связи с вопросом об однозначности анализа интересно отметить его изложение у Крафта [Kraft *1893*]. Рассматривая решение уравнения $x \cap b = c$, он отмечает, что решение может быть как однозначным, так и многозначным, и он будет иметь вид $x = c \cup b$. Пусть x_1 и x_2 — два корня этого уравнения, тогда $x_1 \cap b = c$ и $x_2 \cap b = c$, и поэтому мы имеем $x_1 \cap b = x_2 \cap b$, так что если $c \cup b$ означает только один корень, получается, что $x_1 = x_2$.

Далее Крафт, предполагя, что $x_1 = a$, а $x_2 = x$, записывает соотношение $a \cap b = x \cap b$ и, «найдя», отсюда x получает, что $a \cap b \cup b = x$. Чтобы аналтическое сочленение было однозначным, мы должны считать, что $x = a$, то есть $a \cap b \cup b = a$. Таким образом, мы получаем равенство, обозначенное у нас как (2), которое также вытекает однозначности анализа.

вытекает то, что

$$(2) \qquad (a \cap b) \cup b = a$$

Покажем это. Возьмем в определении (I) в качества a формулу $a \cap b$, тогда получим $((a \cap b) \cup b) \cap b = a \cap b$. Применив правило (II) к последнему равенству, получаем (2). Еси приравнять равенства (1) и (2), то мы получим равенство

$$(3) \qquad (a \cup b) \cap b = (a \cap b) \cup b,$$

А на этой основе открывается возможность доказать однозначность *синтетической* связи в виде двух упомянутых выше правил:

$$a \cap c = b \cap c \vdash a = b, \quad c \cap a = c \cap b \vdash a = b$$

(см. выше правило (II)). В силу коммутативности синтеза, достаточно доказать любое из них, например, первое. Доказательство имеет вид:

$a = (a \cup c) \cap c$	в силу (1)
$= (a \cap c) \cup c$	в силу (3)
$= (b \cap c) \cup c$	в силу посылок правила (II)
$= b$	в силу (2).

Таким образом, в предположении однозначности аналуза синтез неоднозначным быть не может. Это делает понятным, почему Г. Грассман может не оговаривать соответствующее свойство прямой операции.[8]

[8] Но по той же причние А. Н. Уайтхед в труде *A treatise on universal algebra* [Whitehead *1898*] с самого начала считает синтез однозначной операцией. Проблема смысла операций $\cap$ и $\cup$ в свете изложения грассмановского подхода в появившемся более полувека спустя уайтхедовском «Трактате об универсальной алгебре» рассмотрена в статье [Бирюкова *1986*]. К сожалению, при подготовке ее к печати в правилах, обосновывающих однозначность ситеза (обозначены как III′ и III″), вместо знака ‚$\cap$‘ был набран знак ‚$\cup$‘, и в результате выкладки, следующие за этими правилами, не могут являться доказательством последних.

3. Определение абстракной группы.

Вчитываясь в скупой текст «Очерка общего учения о формах», мы убеждаемся в том, что Г. Грассман закладывает в нем основы абстрактных формулировок таких фундаментальных алгебраических структур, как группа и кольцо. Этот вопрос в имеющейся литературе, насколько нам известно, освещен недостаточно. Если взять исследования, даже непосредственно посвященные работам Г. Грассмана (например, [Sarton *1944*; Crowe *1967*; Heath *1917a*, *1917b*]), то обнаружится, что на эту сторону дела до сих пор не обращали должного винмания; тем более это касается общих работ по истории и методологии математики XIX века и такого важного ее раздела, как алгебра (см., например, [Колмогоров & Юшкевич *1978*]; [Клейн *1989*]). Так, в статье [Fearnley-Sander *1979*, 810] посвященной роли Г. Грассмана в создании линейной алгебры, мы читаем: «Характерной чертой труда Грассмана, далеко опередившего свое время, является стреление использовать неявное определелине — такое, что математическая структура характеризуется скорее путем указания ее формальных свойст, нежели ее явного построения. Например, в *Ausdehnungslehre* 1844 года он действительно близко подходит к абстрактному понятию (не обязательно ассоциативного) кольца; что отсутствовало у него — так это язык теории множеств ⟨. . .⟩ Между прочим, первое формальное определение кольца было дано Френкелем в 1915 г.». Автор статьи не упоминает о месте Грассмана в истории теории групп, утверждение же его о том, что Г. Грассман лишь «близко подходит» к абстрактному понятию кольца, которое было в явном виде сформулировано только в 1915 г., может просто ввести в заблуждение. Так возникает задача адекватной реконструкции соответствующих достижений Г. Грассмана.

История групповых структур уходит вглубь веков: уже в арифметике целых чисел содержится группа (например, по сложению). В XVIII - первой половине XIX в. появляются систематические описания иных конкретных групп (конечных групп различного порядка, групп симметрии, групп подстановок). Определяющим для возникновения *теории* групп считается 1846 год — год публикации главных работ Эвариста Галуа (см. например, [Колмогоров & Юшкевич 1978, 64]), выполненных еще на рубеже 20-30-х годов. В этих работах, относящихся к теории уравнений, был изучен ряд важных теоретико-групповых вопросов. Заслуга Галуа, как выяснено ныне, заключалась не только в том, что он вел исследование алгебраических уравнений к изучению групп перестановок, которые подверг специальному рассмотрению, но и в изучении других групп, обладающих определенными свойствами. Но общее определение группы им, повидимому, сформулировано не было. Считается, что первое определение «абрактной» группы и соответствующие исследования были выполнены А. Кэли (1854 г.). Однако известно, что последний работал скорее с конкретными группами. Изучение «Очерка общего учения о формах» показывает, что понятие об абстрактной группе было введено (без какой-либо «групповой» терминологии) за 10 лет до Кэли: это было сделано Г. Грассманом в труде 1844 года.

В современной литературе обычно используются следующих определения группы.

Пусть задано произвольное множество элементов M, замкнутое относительно определенной на нем единственной бинарной операции (будем обозначать ее знаком ‚+‘, то есть определять, как говоят, аддитивную группу).

Определение I: (1) операция + *ассоциативна*: $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых a, b, c из M; (2) в M существует такой элемент, называемый *нулем*, что $a + 0 = 0 + a$ для любого $a \in M$; (3) для любого элемента $a \in M$ существует ему обратный, то есть такой элемент $-a \in M$, что $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Определение II: (1) операция + *ассоциативна*; (2) для любых двух элементов a, b из M существует в M такой однозначно определенный элемент x и такой однозначно определенный элемент y, что $a + x = b$, $y + a = b$ (т.е. выполнима обратная операция и, напирмер, $x = b - a$, $y = b \ominus a$). Если групповая операция коммутативна, то $a = y$, и группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Эти определения равносильны, т.е. каждое предложение, входящее в одно из определений, является следствием другого определения. Как мы отмечали в предшествующем разделе, у Грассмана присутствует абстрактная коммутативная группа над произвольными элементами («мыслительными формами»), задаваемая определением II. В роли групповой операции выступает синтетическое сочление, которое ассоциативно и коммутативно, в роли обратной операции — анализ. Поскольку синтез коммутативен, анализ оказывается единственной обратной операцией. Однако Грассман предусматривает и случай неединственности анализа; это означает, что в §§3-5 содержится фактически определение абстрактной (не обязательно коммутативной) группы.

Мы можем считать, что определение группы задается у Грассмана

1) законом ассоциативности;

2) равенством $(a \cup b) \cap b = a$ (1)
вводящим обратную операцию;

3) равенством $(a \cap b) \cup b = a$, (2)
обеспечивающим ее однозначность.

Таким образом, в изложении Грассмана мы имеем группу в смысле определения II. В последующем изложении он доказывает предложения, входящие в определение I. Восстановим эту часть построения Грассмана.

С помощью аналитической процедуры Г. Грассман получает «неопределенную» и «аналитическую» формы. Форма вида $a \cup a$, согласно его «Очерку», представляет собой «неопределенную» форму, значение которой не зависит от a. В самом деле, рассмортим две формы: $a \cup a$ и $b \cup b$, для произвольных a, b, и покажем, что они равны.

Из (1) следует $(b \cup b) \cap b = b$. Но поскольку $(a \cup a) \cap b = b \cap (a \cup a) = (b \cap a) \cup a = b$, мы получаем $(a \cup a) \cap b = (b \cup b) \cap b$. Тогда из однозначности аналитической процедуры (правило II) получается, что $a \cup a = b \cup b$. Таким образом, неопределенная форма единственна; она обозначается Грассманом знаком ‚$\backsim$‘.

Форма $\backsim$ есть нуль группы, так как для любого a им доказано, что $a \cap \backsim = \backsim \cap a = a$; в аддитивной записи это означает п. 2) определения I.

Далее Г. Грассман вводит «аналитическую» форму для произвольного элемента a, обозначаемую им поначалу через $\backsim \cup a$, а потом через $\cup a$; элемент $\cup a$ оказывается обратным в группе элементу a. В силу этого, мы имеен следующие равенства: $a = a \cup \backsim$, $a = a \cap \backsim = \backsim \cap a$ (последнее дает п. 2) определения I. Кроме того отмечается, что непосредственно можно доказать, что $\cap\,(\cup\, a) = \cup\, a$, $\cup\,(\cup\, a) = \cap\, a$ ($\cap\, a$ есть сокращение для $\backsim\ \cap\, a$). На последнее равенство мы можем смотреть как на п. 3) определения I: $\backsim\cap(\cup a) = \cup\, a$, откуда $\backsim\ = (\cup a) \cup (\cup a) = (\cup a) \cap a = a \cap(\cup a)$.

Необходимо еще принять во внимание слова Г. Грассмана о том, что елси синтетическое сочление представляет собой сложение, то аналитическую форму можно называть отрицательной формой, а неопределенную — нулем. Тогда мы с полным правом можем считать, что у Грассмана сформулирована система постулатов (коммутативной) группы в виде определения I.

4. От группы — к кольцу.

В заключительных параграфах «Очерка» Г. Грассман вводит по существу алгебраическую структуру, которая ныне называется кольцом, и затем близко подходит к понятию доля. Происходит это так. На множестве всех форм определяется вторая бинархая операция, обозначаемая знаком , $\Cap$‘, относительно которой это множество замкнуто. Эта операция не предполагается ассоциативной. Кроме того в явном виде оговаривается возможность, ее некоммутативности. Это весьма существенно для расширения общей теории форм до известного грассмановского учения о протяженностях, составляющего главное содержание его труда 1884 г.

Поскольку операция синтетического сочленения является простой, а обратная ей — однозначхной, синтез получает название сложения, а анализ — вычитания, и тогда вторая бинарная операция — название умножения. С этого момента для этих операций используются обычные обозначения: +, –, · (умножение может выражаться и путем пропуска знака между формами, как это издавно было принято). Операция умножения определяется по отношению к сложению. Этому служат два закона дистрибутивности умножения относительно сложения: $(a + b)c = ac + bc$; $c(a + b) = ca + cb$. На этой основе доказываются два аналогичных равенства, выражающие дистрибутивность умножения относительно вычитания. Как нетрудно видеть, в результате получается алгебраическая структура, называемая ныне кольцом. Таким образом, содержащееся в статье [Fearnley-Sander *1979*] утверждение, приведенное нами дословно ранее, является неточным: Г. Грассман не просто «близко подходит» к понятию (абстрактного) кольца, но точно его формулирует.

Далее данная структура расширяется до поля путем введения двух операций, обратных для операций умножемия, — операций деления. Необходимость в двух обратных операциях объясняется некоммутативностью умножения. Так возникает понятие о, говоря современным языком, левом и правом делении и соответственно об их результатах — левом и правом частных. А именно, если по произведению и второму сомножителю отыскивается первый: $xc = a$, то Г. Грассман пишет $x = {}^{a}/_{.\,c}$, где точка указывает на то, что x (отыскиваемый сомнжчитель) был «предшествующим членом» в произведении. Соответственно второй случай запишется так / он не выписывается, но подразумевается автором «Учения о протяженностях» / : $cx = a$ и $x = {}^{a}/_{c.}$. Относительно операции (операцей) деления Грассман еще раньше (в примечании к §6 об однозначности анализа) указал, что при всех названных выше условиях, включая требование однозначности анализа, деление однозначно только тогда, когда нуль не выступает в качестве делителя. Таким образом, поскольку введение деления произ-водится в рамках группы и кольца (где предполагается однознач-ность операции вычитания), Грассман фактически запрещает деление на нуль.

5. Учение о протяженностях в контексте общего учения о формах.

В самом конце своего очерка «учения о формах» немецкий математик возращается к главной идее, высказанной им во «Введении» к труду 1848 года. Этой идеей является мысль о естественности *генетического* построения математики. Согласно Г. Грассману, сочленение форм путем синтеза как ассоциативной и коммутативной операции (путем простого синтеза) можно истолковывать как *процесс прождения* все более сложных форм, состоящих из положительных (вида $\frown a$) и отрицательных (вида $\smile a$) величин, — величин, которые получают у него название однородных. Здесь весьма существенно, что сам переход к рассмотрению способа порождения величин (форм) означает, с его точки зрения, выход за пределы «общего учения о формах». Это объясняется тем, что операции теперь становятся *реальным* операциями: они производятся над величинами, способ порождения которых задан. Такого рода переход, считает Грассман, фактически имеет место лишь тогда, когда возникает вопрос об ассоциативности и (или) коммутативности операции умножения. Некоммутативное же и неассоциативное умножение — и тем более сложение, — как эти операции и обратные им рассматривались до §12, истолковываются Грассманом как *формальные* процедуры над объектами, природа которых не определена. Г. Грассман пишет, что «этому формальномуу понятию ‹умножения›, если задана природа подлежащих сочленению величин, соответствует реальное понятие, выражающее способ порождения произведения из его сомножителей».

Способ перехода к «реалзным» операциям могут быть различными. Один из них применен был в грассмановской арифметике (см. [H. Grassmann *1861*]), другой был полпжен в основу ученея о протеженностях. Этого последний способ излагается в последующих параграфах и разделах книги 1844 года. Здесь немецкий математики показывает, что в этом его учении могут быть введены виды умножения, для которых «не имеет места по крайней мере перестановочность сомножителей, но к которым тем не менее полностью приложимы все до сих пор установленные предложения (предложения «общей тероии форм», - Л.Б., Б.Б.)» [H. Grassmann *1844*, 13]. В самом деле, обращаясь к тексту «Учения о протяженностях», мы видим, что в теории, развиваемой в труде 1844 г., используются как операции, удовлетворяющие общей теории форм, так и операции, выражающие генетическую спецификацию порождаемых в ней величин.

В статьях [Бирюков & Бирюкова *1982*; Бирюкова *1984*] мы показали, что Грассманы понимали математику как науку об умственных построениях. Этих построения, конечно, находятся в определенных отношениях и реальности, однако отношения эти осуществляются *вне* математики: связи математики с прикладным областями реализуются, согласно его взгляду, через посредство наук, которые опираются на «исходное созерцание» (*Grund-Anschauung*) пространства и времени (а благодаря этому — и движения). Этими науками являются геометрия и механика. Рассматривая (в разделе в «Введения») способы умственного построения — «становления благодаря мышлению», как выражается Г. Грассман, — автор «Учения о протяженностях» приходит к понятиям о непрерывной и дискретной формах. Дискретная форма предполагает двойной акт: полагания (установления) чегото мышлением и связывания (сочленения) установленного. Для непрерывной формы полагание и сочленение сливаются. Различение этих двых форм вместе с понятиями об одинаковом (равном) и различном приходит к понятию о четырех типах форм, причем каждому типу соответствует особая ветвь «чистого учения о формах». Г. Грассман пишет: «сначала дискретная форма разделяется на число и комбинацию (соединение ‹*Gebinde*›). Число есть алгебраическая дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как одинаковое; комбинация есть комбинаторная дискретная форма, т.е. объединение того, что полагаемо как различное. Таким образом наука о дискретном есть учение о числах и учение о комбинациях (учение о соединениях ‹*Verbindungslehre*›)» [H. Grassmann *1844*, XXIII-XXIV; *1894*, 25].

Изучение подхода Г. Грассмана, особенно если учитывать не только турд *1844* г. [H. Grassmann *1844*], но переработанный его вариант 1862 года [H. Grassmann *1862*], — дает право на следующую интерпретацию. Числа (целые положительные) представляют собой формы, порождаемые из единственного элемента e с помощью операции ‚+‘; иначе говоря, это объекты виде $e + e + \ldots + e$, где одна и та же элементарная форма e входит в сочленение n раз ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Комбинациями (соединениями) являются такие формы $a_1, + a_2 \ldots + a_k$, которые возникают из попарно *различных* величин, когда в общем случае $a_i \neq a_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots$). Числам и комбинациям как дискретным формам противостоят формы непрерывные. Последние разделяются на интенсивные величины и величины экстенсивные, или протяженности, причем протяженности возникают «посредством созидания различного». Это не очень понятное высказывание Г. Грассмана проясняется, если учесть, что согасно его взгляду, «. . . с каждым протяженным образованием связано некоторое ему противоположное, но только взятое в обратном порядке его возникновения ‹. . .›, если с помощью некоторого изменения из ‹элемента› a получается ‹элемента› b, то противоположное изменение состоит в том, что из b получается a» [H. Grassmann *1844*, 17; *1894*, 48]. Данная мысль становится совсем ясной, когда Г. Грассман обращается к геометрической аналогии: «так же как в геометрии путем перемещения некоторой точки сначала возникает линия, пространственные же образования более высоких ступеней могут возникать лишь потом, после того, как полученное обрзование снова приводят в движение, так и в нашей науке (учении о протяченностях. - Л.Б., Б.Б.) путем непрерывных изменений порпждающего элемента возникает протяженное образование первой ступени» [H. Grassmann *1844*, 17; *1894*, 47].

В грассманском учение о протяженностях предметом рассмотрения являются величены вида $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ суть независимые «единицы», полученные благодаря движению точки как порождающего элемента, т.е. на современ-ном языке, направленные отрезки, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные коэффициенты. Выписанную выше сумму можно трактовать как грассмановское комплексно число, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — компоненты комплексного числа. Сумма и разность двух таких чисел определяется путем сложения и, соответственно, вычитания соответствующих компонент (т.е. по сути дела выражает, с современных позиций, сумму и разность векторов).

Заметим, что сложение и вычитание таким комплексных чисел суть операции, которые подчиняются тем же формальным законам, что и одноименные операциии для чисел вещественных. Что же касается произведения высших комплексных чисел, то определить его так, чтобы оно подчинялось формальным законам арифметики вессщественных чисел, как известно, нельзя. Для преодоления этой трудности Грассман разработал «экстенсивную алгебру», в которой произведение двух комплексных чисел оказывается комплексным числом более выского порядка.[9]

Идею умножения как операции, результаты которой лежат вне области ее определения, Г. Грассман заимствовал у отца,[10] Ю. Г. Грассмана. Последний высказал ее в связи с вопросом об умножении в геометрии: он писал, цитирует Г. Грассман отца,

---

[9] Примерно в те же годы, что и Г. Грассман, алгебру высших комплексных чисел построил У. Р. Гамильтон, но он шел иным путем — путен «интенсивной алгебры», в которой произведение двух комплексных чисел есть комплексное число, составленное из тех же независимых единиц, что и сомножители.

[10] Об этом Грассман говорит в сноске к одной из своих ранних работ, называя книг своего отца — Ю. Г. Грассмана, «Учение о пространстве» и «Тригонометрия».

что «треугольник является на самом деле геометрическим произведением, а его построение представляет собой геометрическое умножение», что «умножение есть лишь только построение высшего порядка», и что «как линия получается из точки, так треугольник получается из линии».[11]

Таким образом, позиция Г. Грассмана состоит в том, что формы, которые поначалу не имеют реального содержания, могут приобретать таковое поразличному осмысляться: быть точками, векторами, ориентированными площадками и т.д. На этом пути им вводится 16 различных видов умножения. Однако возникающие таким образом формы и операции над ними трактуются в терминах законов, введенных Грассманом во вступительном «Очерке» к труду [H. Grassmann *1844*].

Описанный подход реализуется в первой части книги 1844 года. Здесь рассматриваются системы различных проядков. Взяв элемент из одной системы и подвергнув его изменению. мы получаем элемент из новой системы. Так, движение линии в некотором (прямолинейном) направлении порождает плоскость — систему второго проядка. Этот переход, согласно Г. Грассману, можно мыслить неограниченно продолжаемым — до получения системы любого порядка или, в современных терминах, до возникновения пространства любой размерности. Говоря более конкретно, Грассман начинает с того, что вводит направленные отрезки (векторы) и доказывает, что для них выполняются все установленные в «теории форм» законы сложения и вычитания (соответствующим образом объясняя смысл этих операций). Затем он доказывает теоремы о наличии у получаемых им систем дальнейших алгебраических свойств. Это делается в первой главе.

Вторая глава части первой книги [H. Grassmann *1844*] озаглавлена «Внешнее произведение отрезков». Здесь в §28 Грассман приводит «простой и всеобщий» закон: «Если на плоскости отрезок движется последовательно вдоль каждого из двух данных направленных отрезков, то общая площадь поверхности, которая получается таким образом (при условии, что знак отдельных элементов поверхностей берутся установленным способом/, равна той площади, которая могла бы быть получена, если бы отрезок двигался вдоль суммы этих отрезков» [H. Grassmann *1844*, 20; *1894*, 45]. Поясняя это утверждение, Грассман

[11] Г. Грассман цитирует первую из работ отца, упомянутых в примечании 11; она относится к 1828 г.

рассматривает три компланарные параллельные линии[12]: *ab*, *ef*, *cd*, пересеченные тремя парами параллельных линий *ae* и *bf*, *ec* и *fd*, *ac* и *bd*. Если отрезок *ab* продвинулся вдоль ортезка *ac* и достиг отрезка *cd*, то тем самым он заполнил площадь прямоугольника *acdb*.

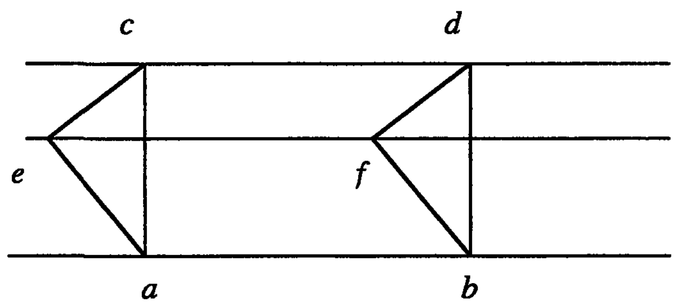

Рис. 1

Но из рис 1. видно, что площадь этого прямоугольника равна сумме площадей параллелограммов *aefb* и *ecdf*. Значит, можно считать, что движение отрезка *ab* вдоль отрезка *ac* порождает ту же самую площадку, что и движение отрезка *ab* сначала вдоль *ae*, а затем вдоль *ec*.

Очевидно, что операцию $\cap$, которая в данном примере была применена к отрезкам, можно считать умножением, подчиняющимся дистрибутивному закону относительно сложения (на основе общего учения о формах): $a \cap (b + c) = (a \cap b) + (a \cap c)$, а значит, в силу коммутативности умножения, $(b + c) \cap a = (b \cap a) + (c \cap a)$. В применении к грассмановскому примеру эта дистрибутивность дает (если воспользоваться привичной ныне векорной записью):

$$\overline{ab} \bullet \overline{ac} = \overline{ab}\,(\overline{ae} + \overline{ec}) + \overline{ab}\ \overline{ae} + \overline{ab} \bullet \overline{ec}\ .$$

Каков смысл операции, порочдающей внешнее произведение? В современных терминах это произведение базисных

[12] Здесь, разумеется, запись вида *ab* не означает произведения величин *a* и *b*; она обозначает прямую, задаваемую точками *a* и *b*, а также отрезок прямой с концами в этих точках.

элементов e_1, e_2, . . . , e_n, которые подчиняются следующим законам. Пусть i, j, k представляют собой различные значения n; тогда $e_ie_j = -e_je_i$; $e_ie_i = e_je_j = 0$; $e_i(e_j + e_k) = e_ie_j + e_ie_k$. Отметим, что последнее из трих равенств выписывать было не обязательно, так как свойство дистрибутивности включается Грассманом в само понятие умножения. Произведение N такого рода элементов представляет собой объект N-го порядка. В этом заключается отличие внешнего произведения Грассмана от «современного» векторного произведения: результат умножения двух векторов есть снова векто (т.е., по Грассману, объект первого же порядка), в то время как внешнее произведение двух векторов — объект второго порядка.

Грассман определяет произведение любого числа направленных от резков: произведение $a \cap b \cap c \cap$ . . . означает, что вектор a сначала движется вдоль b, затем результат этого движения — ориентированная площадка — движется вдоль c, и так далее; так получаются порядки выше, чем третий. Грассман показывает, что такого рода сочленения обладают свойством дистрибутивности, и для каждого вновь построенного объекта обосновывает соответствие его свойств требованиям своей «общей теории форм».

* * *

Систему алгебраических структур, предвосхищенных либо разработанных Г. Грассманом, можмо передать схемой, представленной на рис. 2. Запись $\langle M, =, \cap \rangle$ означает, в современных терминах, алгебраическую структуру (реляционную систему), где M есть носитель структуры — совокупность «мыслительных форм», на которой определена бинарная операция $\cap$ и отношение равенства форм. Блоки, изображенные с помощью сплошных линий, соответствуют структурам, постулаты которых были непосредственно соформулированы Г. Грассманом на его формальном языке; блоки, изображенные с помощью пунктирных линий, — структуры, существование которых было им выражено в описательной форме. В левой части рисунка — там, где переход от одной структуры к другой передан двойными стелками, — представлены реляционные системы, введеные в рассмотрение Робертом Грассманом. Все стрелки занумерованы, при номерах указаны вводимые операции и их свойства, что влечет переход от одной структуры и другой.

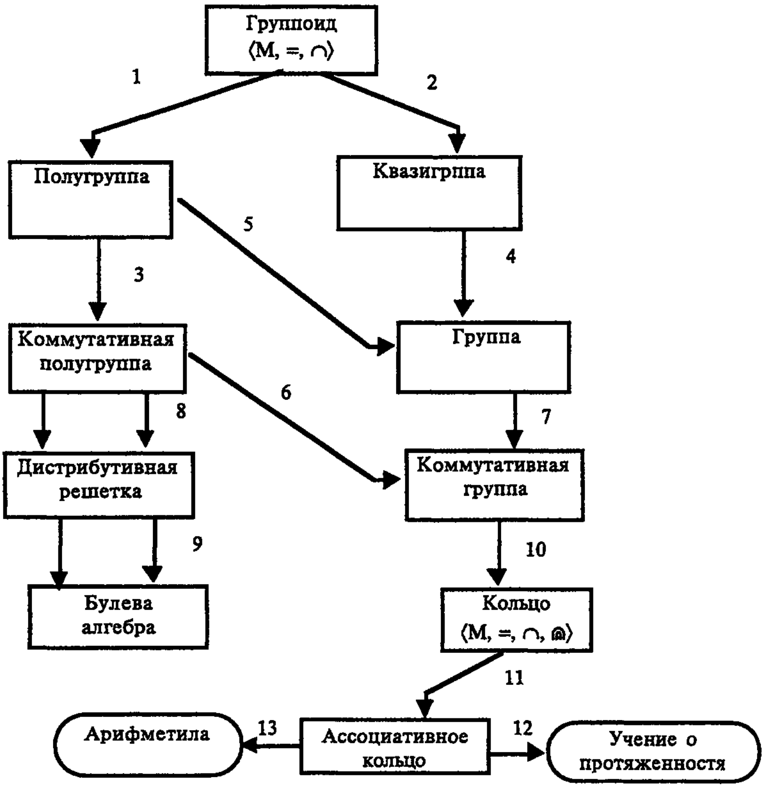

Рис. 2

1 — свойство ассоциативности операции $\cap$; 2 — обратные операции $a \cap x = b$, $x = b \cup a$, $y \cap a = b$, $y = a \odot b$; 3 — свойство коммутативности дла $\cap$; 4 — свойство ассоциативности для $\cap$; 5, 6 операции обратнмые для $\cap$; 7 — свойство коммутативности для $\cap$; (8 — две бинарные операции $\circ$, $\odot$, свойства дистрибутивности; 9 — $\langle M, =, \leq, \circ, \odot \rangle$, дополнения — появляются у Р. Грассмана); 10 — вторая бинарная опе-рация, два свойства дистрибутивности; 11 — ассоцизтивность дла $\Cap$; 12 — отсутствие коммутативности для $\Cap$; 13 — коммутатив-

ность для $\mathfrak{M}$, M — множество целых чисел.

В заключение можно сказать, что в грассмановском труде 1844 года была дана одна из первых формулировок тех «модельных объектов» алебры, которые уже в нашем столетии сыграли важную роль в решении алгоритмической разрешимости — неразрешимости, а также, добавим мы теперь, и в становление математико-логической теории моделей. Последнее обстоятельство тем более существенно, что модельные построения тесно связаны как с классическими, так и неклассическими (интуиционистскими, конструктивистскими и другими) концепциями в логике и основаниях математического знания.

Литература

БИРЮКОВ, Б. В. 1967. *Взаимозаменимости отношение*, Философская энциклопедия, т. 1.

БИРЮКОВ, Б. В. & БИРЮКОВА, Л. Г. 1982. *«Учение о формах (величинах) Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике, I*, в кн.: *Вопросы кибернетики. Кибернетика и логическая формализация. Аспекты теории и методологии*, (Москва), с. 36-92..

БИРЮКОВА, Л. Г. 1984. *«Учение о формах (величинах) Германа и Роберта Грассманов как предвосхищение конструктивного направления в математике, II*, в кн.: *Вопросы кибернетики. Кибернетика и логика в историко-методологическом аспекте* (Москва), с. 45-111.

—. 1986. *Проблема смысла аналитической операции в «общем учении о формах» Г. Грассмана*, в кн.: *История и методология естественных наук*, Вып. 32: *Математика, механика* (Москва), с. 66-74.

—. 1995. *Основные алгебраические структуры в «Учении о формах» Германа Грассмана*, XI Международная конференция: Логика, методология, философия науки. VI. Секция 7: История логики и методология науки. Москва - Обнинск, 1995, с. 82-86.

ДОНЧЕНКО, В. 1967. *Правило замены равным*, Философская энциклопедия, т. 4.

ИБРАГИМОВ, С. Г. И. 1978. *О логико-алгебраических работах Эрнеста Шрёдера, предвосхитивиших теорию квазигрупп*, в кн.: Б. В. Бирюков & С. Г. Спиркин (ред.). *Кибернетика и логикк* (Москва, Наука), 253-313.

КЛЕЙН, Ф. 1989. *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, том 1.

КЛИНИ, С. К. 1957. *Введение в метаматематику* (пер. с англ. А. С. Есенина-Вольпина под ред. В. А. Успенского), Москва. [Russian translation of S. C. Kleene, *Introduction to metamathematics*.]

КОЛМОГОРОВ, А. N. & ЮЩКЕВИЧ, А. П. (ред.). 1978. *Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория* *вероятностей*, Москва, Наука.

МАРКОВ, А. А. 1947. *Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем*, Доклады АН СССР (н.с.) 55, 587-590.

—. 1954. *Теория алгорифмов*, Труды Математического института АН СССР 42, Москва & Ленинград, Издателство АН СССР.

МАРКОВ, А. А. & НАГОРНЫЙ, Н. М. 1984. *Теория алгорифмов*, Москва, Наука.

НОВИКОВ, П. С. 1952. *Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества*, Доклады АН СССР 85, № 4, 709-712.

—. 1977. *Конструктивная математическая логика с точки зрения классической*, Москва, Наука.

ЦЕЙТИН, Г. С. 1956. *Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности*, Доклады АН СССР 107, № 3, 370-371.

ЯНОВСКАЯ, С. А. 1967. *Равенство (в логике и математике)*, Философская энциклопедия, т. 4.

ACKERMANN, W. 1954. *Solvable cases of the decision problem*, Amsterdam, North-Holland.

CROWE, J. M. 1967. *History of vector analysis: The evolution of the idea of a vectorial system*, Notre Dame, Notre Dame University Press; reprinted, with corrections, New York, Dover, 1985.

DEHN, M. 1912. *Über unendliche diskontinuirliche Gruppen*, Mathematische Annalen **71**, 116–144.

DIEUDONNÉ, J. 1979. *The tragedy of Grassmann*, Linear and Multilinear Algebra **8**, 1–14.

FEARNLEY-SANDER, D. 1979. *Hermann Grassmann and the creation of linear algebra*, American Mathematical Monthly **86**, 809–817.

GRASSMANN, H. 1844. *Die Wissenschaft der extensive Grösse oder die Ausdehnungslehre*. Th. 1: *Die lineare Ausdenungslehre*, Leipzig. Wissand; 2te aufl. 1878.

—. 1861. *Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten*, Berlin.

—. 1862. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*, Berlin.

—. 1894. (F. Engel, *et al., red.*), *Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke*. Bd. I, Th. 1: *Die Ausdehnungslehre von 1844 und Geometrische Analyse*, Leipzig, B. G. Teubner.

GRASSMANN, R. 1872. *DieBegriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*, Stettin.

HEATH, A. E. 1917a. *Hermann Grassmann. The neglect of the work of H. Grassmann*, The Monist **27**, 22–35.

—. 1917b. *The geometrical analysis of Grassmann and its connection with Leibniz's characteristic*, The Monist **27**, 36–56.

KRAFT, F. 1893. *Abriss des geometrischen Kalküls. Nach den Werken des Professors Dr. Hermann Günther Grassmann*, Leipzig.

LEWIS, A. C. 1977. *H Grassmann's 1844 "Ausdehnungslehre" and Schleiermacher's "Dialektik"*, Annals of Science **34**, 103–162.

POST, E. L. 1947. *Recursive unsolvability of a problem of Thue*, The

Journal of Symbolic Logic 12, 1-11.

SARTON, G. 1944. *Grassmann - 1844*, Isis 35, 326-330.

SCHRIEBER, P. (red.). 1995. *150 Jahre "Lineare Ausdehnungslehre". Werk und Wirkung Hermann G. Graßmann. Internationale Fachtagung. 23.–28. Mai 1994, Leischow*, Greifswald, Ernst-Moritz-Arndt Universität.

THUE, A. 1914. *Probleme über Veränderungen von Zeichenriehen nach gegebenen Regeln*, Skrifter utigt av Videnskapsselskapet I Kristiania, I: Matematisk-naturvidenskabelig Kl., №. 10., 34pp. Также в кн.: T. Nagel, *et al*, (eds.), A. Thue, *Selected mathematical papers* (Oslo, Universitetsforlaget, 1977), 493-524.

WHITEHEAD, A. N. 1898. *A treatise on universal algebra with applications, I*, Cambridge, Cambridge University Press.