ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 4, Number 1, Winter 1974

ZUR THEORIE P-BESCHRÄNKTER OPERATOREN

ERICH BOHL

In [9 c] werden Fehlerabschätzungen für ein Iterationsverfahren zur Lösung einer linearen Operatorgleichung $x = (A_1 - A_2)x + b$ mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes hergeleitet und in [1 *a*, *b*, 4, 9 d] weiter entwickelt. Diese Ergebnisse haben wir in [2 b] auf P-beschränkte Operatoren in einem halbgeordneten normierten Raum (h. n. Raum) $(X, \leqq, \| \ \|)$ durch einen mehr elementaren Zugang erweitert ohne den Satz von Schauder oder dessen Varianten heranzuziehen.

In [4, 9 a] werden bei nicht linearen Operatorgleichungen auf Räumen mit "allgemeinerem Abstandsbegriff" (in [4] P-Räume genannt) Fehlerabschätzungen und Konvergenzaussagen für ein Iterationsverfahren gemacht. Dabei ist der halbgeordnete Raum, in welchem die Abstände liegen, mit einem abstrakt definierten Grenzwertbegriff versehen. Nimmt man an, dass dieser Raum archimedisch geordnet ist und Ordnungseinheiten besitzt, so kann man sich von dem Grenzwertbegriff durch die Betrachtung der Ordnungstopologie befreien [2 d]. Die genannten Aussagen lassen sich dann dem klassischen Kontraktionssatz im metrischen Raum unterordnen [2 d].

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden oben erwähnten Methoden für Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen von Iterationsverfahren auf ihren gemeinsamen Ursprung zurückgeführt. Dazu betrachten wir auf einer nicht leeren Menge Y einen Abstand ρ (s. auch [2 d]), welcher $Y \times Y$ in einen h. n. Raum $(X, \leqq, \| \ \|)$ abbildet. Damit trägt Y auf natürliche Weise eine Metrik d_ρ (s. §3), und die Theorie der P-beschränkten Operatoren kann einheitlich für die P-Räume (symmetrischer Abstand $\rho : \rho(x, y) = \rho(y, x)$) und die h. n. Räume ($Y = X$, $\rho(x, y) = x - y$) entwickelt werden. Im einzelnen enthalten unsere Sätze 1 und 4 die Resultate aus [9 a, b, siehe auch 4, 10, 12 a] über Fehlerabschätzungen und Konvergenz von Iterationsverfahren bei Operatorgleichungen in P-Räumen. Häufig tritt der Satz 4 unter der Voraussetzung der Vollständigkeit des metrischen Raumes (Y, d_ρ) sowie einer der im Satz genannten Bedingungen (i) oder (iii) auf (s. [4, 9 a, b, 10], [12 a, Abschnitt 13.1]) : dann ist er, also auch alle seine Folgerungen, die in den aufgeführten Literatur-

Received by the editors February 2, 1972.
AMS 1970 *subject classifications*: Primary 47H10, 65J05, 46A40; Secondary 65N20, 65F10, 65H10.

stellen vorkommen, ein Sonderfall des klassischen Kontraktionssatzes im metrischen Raum (s. § 6 und [2 d]). Diese einfache Situation liegt z. B. immer dann vor, wenn der halbgeordnete Raum, in welchem die "Abstände gemessen werden," der R^m mit der natürlichen Halbordnung und irgendeiner Norm ist (s. hierzu [12 b]). Der R^m trägt damit stets die Ordnungstopologie, so dass unsere Situation in § 6 Anwendung findet. Schliesslich erfasst unser Satz 2 die Ergebnisse aus [1 a, b, 9 c, d, siehe auch 4] über die Herleitung von Fehlerabschätzungen bei linearen Operatorgleichungen mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Schauder und verallgemeinert diese auf den nichtlinearen Fall P-beschränkter Operatoren [2 b].

Der hier vorgeschlagene einheitliche Zugang zu den genannten Resultaten, welche ursprünglich auf die beiden eingangs erwähnten verschiedenen Ansätze zurückgehen, ist elementarer Natur und kommt ohne topologische Fixpunktsätze und ohne einen *ad hoc* definierten Grenzwertbegriff aus. Auch die Fehlerabschätzungen erhalten eine einheitliche Form (s. (8)), auf die Unterordnung ihrer verschiedenen Sonderfälle [1, 4, 9] sind wir in [2 c, e] ausführlich eingegangen.

Es ist wohl bekannt, dass man mittels eines Abstandes ρ, welcher Werte in einem topologischen, halbgeordneten Raum besitzt, auf einer Menge Y eine Uniformisierung definieren kann, welche Anlass zu einer uniformen Topologie $\mathcal{T}_\rho$ auf Y gibt. Solche Überlegungen findet man etwa in [5] in einem etwas anderen Rahmen für einen symmetricschen Abstand und auch in den letzten Jahren in [11], wo der Abstand durch eine "verallgemeinerte Norm" gegeben wird. Unser Vorgehen entspricht dem genannten allgemeinen Vorbild, man kann im vorliegenden Fall darüberhinaus eine Metrik d_ρ angeben, welche $\mathcal{T}_\rho$ erzeugt, so dass wir es letztlich mit metrischen Räumen zu tun haben. Obwohl alle Überlegungen dieser Arbeit auch für den eben andeuteten allgemeineren Fall gleichfalls durchgeführt werden können, erscheint das hier vorgelegte Konzept für die Bedürfnisse der Anwendungen ausreichend zu sein.

1. Wir nennen einen reellen Vektorraum X *halbgeordnet*, wenn in X eine Ordnungsrelation $\leqq$ durch einen Kegel K vermöge der Definition "$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in K$" festgelegt ist. Unter einem *Kegel* verstehen wir dabei eine Teilmenge K von X, welche die Eigenschaften $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$ für alle reellen $\lambda > 0$ und $K \cap (-K) = \{\theta =$ Nullelement von $X\}$ besitzt [6, 7].

Sei $(X, \leqq)$ ein halbgeordneter Vektorraum. Für zwei Elemente $x, y \in X$ heisst die Mange $[x, y] = \{z \in X : x \leqq z \leqq y\}$ ein *Intervall*. Allgemeiner nennt man für $M \subset X$ die Menge $[M] = \cup \{[x, y] : x, y \in M\}$ *gesättigte Hülle* von M. Im Falle $M = [M]$ heisst M *gesättigt* [6, 7].

Sei $(X, \| \|)$ ein reeller, normierter Raum. Eine Ordnungsrelation $\leqq$ auf X (bzw. der zugehörige Kegel K) heisst *normal* [**6**, 7], falls es eine reelle Zahl $\tau > 0$ gibt, so dass aus $\theta \leqq x \leqq y$ stets $\|x\| \leqq \tau \|y\|$ folgt. Dann ist das Minkowskifunktional p der gesättigten Hülle $[\{e \in X : \|e\| \leqq 1\}]$ der Einheitskugel in X eine zu $\| \|$ äquivalente Norm, und aus $\theta \leqq x \leqq y$ folgt stets $p(x) \leqq p(y)$ [**6**, 7].

Einen normierten Raum $(X, \| \|)$, welcher durch einen normalen, abgeschlossenen Kegel halbgeordnet ist, nennen wir einen *halbgeordneten, normierten Raum* oder kürzer *h. n. Raum*. Wir schreiben dann $(X, \leqq, \| \|)$ oder auch $(X, K, \| \|)$.

2. Unter einem *Abstand* auf einer nicht leeren Menge Y verstehen wir eine Funktion ρ, welche $Y \times Y$ in einen halbgeordneten Raum $(X, \leqq)$ abbildet und für je drei Elemente $x, y, z \in Y$ die folgenden Axiome erfüllt:

(D1) $$\rho(x, y) = \theta \Longleftrightarrow x = y;$$

(D2) $$\rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Später werden wir noch folgende Ungleichungen benutzen, die sich unmittelbar aus (D1) und (D2) herleiten lassen und für je vier Elemente $x, y, z, v \in Y$ gelten

(1) $$-\rho(x, y) \leqq \rho(y, x),$$

(1′) $$-\rho(y, z) - \rho(z, x) \leqq \rho(x, y) \leqq \rho(x, z) + \rho(z, y),$$

(1″) $$-\rho(x, z) - \rho(y, v) \leqq \rho(z, y) - \rho(x, v) \leqq \rho(z, x) + \rho(v, y).$$

3. Sei ρ ein Abstand auf einer nicht leeren Menge Y, welcher $Y \times Y$ in einen normierten Raum $(X, \| \|)$ mit einer normalen Ordnungsrelation $\leqq$ abbildet. Mit p bezeichnen wir das Minkowskifunktional der gesättigten Hülle $[\{e \in X : \|e\| \leqq 1\}]$ der Einheitskugel in $(X, \| \|)$. Dann liefert das Funktional

$$d_\rho(x, y) = \mathrm{Max}(p(\rho(x, y)), p(\rho(y, x))) \qquad x, y \in Y$$

eine Metrik auf Y.

Beweis. Zunächst sind die Funktionale p und $\| \|$ auf X äquivalente Normen, so dass mit Ausnahme der Dreiecksungleichung die beiden anderen Metrikaxiome offensichtlich gelten. Zum Beweis der Dreiecksungleichung wählen wir $x, y, z \in Y$ und setzen $a_n = (d_\rho(x, z) + d_\rho(z, y) + n^{-1})^{-1}$ für $n \in N$. Dann ist

$$\begin{matrix} p(a_n(\rho(y,z)+\rho(z,x))) \\ p(a_n(\rho(z,y)+\rho(x,z))) \end{matrix} \leqq \begin{matrix} a_n(p(\rho(y,z))+p(\rho(z,x))) \\ a_n(p(\rho(z,y))+p(\rho(x,z))) \end{matrix} \leqq$$
$$a_n(d_\rho(y,z)+d_\rho(z,x)) < 1 \qquad \text{für } n \in N,$$

so dass $\pm a_n(\rho(y,z)+\rho(z,x))$ und $\pm a_n(\rho(z,y)+\rho(x,z))$ für alle $n \in N$ zur gesättigten Hülle der Einheitskugel gehören. Nach (1′) liegen dann auch $a_n\rho(x,y)$ und $a_n\rho(y,x)$ $(n \in N)$ in dieser Menge, woraus wir $p(a_n\rho(x,y)) \leqq 1$, $p(a_n\rho(y,x)) \leqq 1$ oder

$$\begin{matrix} p(\rho(x,y)) \\ p(\rho(y,x)) \end{matrix} \leqq a_n^{-1} = d_\rho(x,z) + d_\rho(z,y) + n^{-1} \quad \text{für alle } n \in N$$

schliessen. Damit ist die Dreiecksungleichung für d_ρ bewiesen.

Nutzt man die Monotonie von p und die Äquivalenz der Normen p und $\| \ \|$ aus, so liefert (1″) die Existenz einer reellen Zahl $k > 0$, so dass

$$\|\rho(x,y) - \rho(z,v)\| \leqq k(d_\rho(x,z) + d_\rho(y,v))$$

für je vier Elemente $x, y, z, v \in Y$ gilt. Insbesondere bilden daher die für jedes $y \in Y$ definierten Funktionen

$$x \to \rho(x,y), \qquad x \to \rho(y,x) \tag{2}$$

den metrischen Raum (Y, d_ρ) stetig in den normierten Raum $(X, \| \ \|)$ *ab*.

Für die weiteren Überlegungen ist noch die folgende Implikation bedeutungsvoll, welche für alle $e_1, e_2 \in X$, $x, y \in Y$ gilt:

$$\begin{gathered} \rho(x,y) \leqq e_1, \rho(y,x) \leqq e_2 \Rightarrow \\ d_\rho(x,y) \leqq p(e_1+e_2) + \mathrm{Max}(p(e_1), p(e_2)). \end{gathered} \tag{3}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Ungleichungen

$$-e_2 \leqq -\rho(y,x) \leqq \rho(x,y) \leqq e_1,$$
$$-e_1 \leqq -\rho(x,y) \leqq \rho(y,x) \leqq e_2,$$

wenn man für p die Monotonie auf K und die Dreiecksungleichung ausnutzt. Beachtet man ferner, dass p und $\| \ \|$ äquivalente Normen sind, so liefert (3) die Existenz einer reellen Zahl $a > 0$ mit

$$e \in X, x, y \in Y, \rho(x,y) \leqq e, \rho(y,x) \leqq e \Rightarrow d_\rho(x,y) \leqq a\|e\|. \tag{3′}$$

Besitzt $(X, \| \ \|)$ eine gesättigte Einheitskugel, so sind die beiden Normen p und $\| \ \|$ gleich. Gilt überdies $\rho(x,y) = \pm\rho(y,x)$ für $x, y \in Y$, so erhalten wir einfach $d_\rho(x, y) = \|\rho(x, y)\|$, und (3) liefert die Implikation

$$(3'') \qquad e \in X, \rho(x, y) \leqq e, \rho(y, x) \leqq e \Rightarrow \|\rho(x, y)\| \leqq \|e\|.$$

Eine nicht leere Menge Y heisst Abstandsraum, wenn auf Y ein Abstand ρ gegeben ist, welcher $Y \times Y$ in einen h. n. Raum $(X, \leqq, \| \ \|)$ abbildet. Wir denken uns dann die Menge Y stets mit der durch d_ρ gegebenen Topologie versehen und schreiben auch das Symbol $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \ \|)$ für den Abstandsraum. Ist überdies der metrische Raum (Y, d_ρ) vollständig, so reden wir von einem vollständigen Abstandsraum.

4. Sei $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \ \|)$ ein Abstandsraum.

Ein Operator T auf Y, also eine Abbildung von Y in sich, heisst P-beschränkt [2 d], falls P ein linearer, monotoner Operator auf X ist, so dass folgende Implikation gilt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} &e \in X, x, y \in Y, \rho(x, y) \leqq e, \rho(y, x) \leqq e \Rightarrow \rho(Tx, Ty) \\ &\rho(Tx, Ty) \leqq Pe, \rho(Ty, Tx) \leqq Pe. \end{aligned}$$

Dabei heisst P monoton auf X, falls $e \leqq \bar{e}$ stets $Pe \leqq P\bar{e}$ für alle $e, \bar{e} \in X$ impliziert.

Wir betrachten nun zwei Folgen

$$(5) \qquad x_0 \in Y, x_{n+1} = Tx_n; e_0 \in X, e_{n+1} = Pe_n \ (n \in N)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$(5') \qquad e_0 \geqq \theta, \ \rho(Tx_0, x_0) \leqq (I - P)e_0, \ \rho(x_0, Tx_0) \leqq (I - P)e_0,$$

wenn I den Einheitsoperator bezeichnet. Durch Induktion zeigt man zunächst

$$(6) \qquad \rho(Tx_n, x_n) \leqq e_n - e_{n+1}, \quad \rho(x_n, Tx_n) \leqq e_n - e_{n+1} \quad (n \in N)$$

und damit

$$(7) \qquad \rho(x_m, x_n) \leqq e_n, \quad \rho(x_n, x_m) \leqq e_n \text{ für } 0 \leqq n \leqq m.$$

Satz 1. *Sei T ein P-beschränkter Operator auf einem vollständigen Abstandsraum $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \ \|)$. Es gebe zwei Elemente $x_0 \in Y$ und $e_0 \in X$, welche (5′) erfüllen. Schliesslich liefere die mit e_0 begonnene Iteration $e_{n+1} = Pe_n$ eine Nullfolge in $(X, \| \ \|)$. Dann konvergiert x_n gegen eine Lösung $\bar{x} \in Y$ der Gleichung $x = Tx$, und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$(8) \qquad \rho(\bar{x}, x_n) \leqq e_n, \quad \rho(x_n, \bar{x}) \leqq e_n \qquad \text{für } n \in N.$$

Beweis. Wegen (3′) und (7) ist $d_\rho\,(x_m, x_n) \leqq a\|e_n\|$ für $0 \leqq n \leqq m$, so dass x_m als Cauchy-Folge einen Grenzwert $\bar{x}$ besitzt, für welchen die Ungleichungen (8) gelten (beachte dazu die Stetigkeit der Funktionen (2), die Abgeschlossenheit des $\leqq$ definierenden Kegels sowie die Ungleichungen (7) für $m \to \infty$). Da T ein P-beschränkter Operator ist, impliziert (8) sofort $\rho(T\bar{x}, x_{n+1}) \leqq e_{n+1}$, $\rho(x_{n+1}, T\bar{x} \leqq e_{n+1}$ oder mit (3′) auch

$$d_\rho(\bar{x}, T\bar{x}) \leqq d_\rho(\bar{x}, x_{n+1}) + d_\rho(x_{n+1}, T\bar{x}) \leqq d_\rho(\bar{x}, x_{n+1}) + a\|e_{n+1}\|$$

für $n \in \boldsymbol{N}$. Das aber zeigt $\bar{x} = T\bar{x}$ und vollendet den Beweis.

Eine Folge x_n in einem metrischen Raum (Z, d) heisst *beschränkt*, wenn es eine reelle Zahl $\tau > 0$ gibt mit $d(x_n, x_m) \leqq \tau$ für alle $n, m \in \boldsymbol{N}$.

Ein stetiger Operator T auf einem metrischen Raum (Z, d) heisst *vollstetig*, wenn er jede beschränkte Folge x_n auf Z in eine Folge Tx_n transformiert, die eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 2. *Sei T ein vollstetiger, P-beschränkter Operator auf einem Abstandsraum $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \|)$ mit einem vollstetigen Operator P. Es gebe zwei Elemente $x_0 \in Y$ und $e_0 \in X$, welche* (5′) *erfüllen.. Dann konvergiert eine Teilfolge x_{k_n} der mit x_0 begonnenen Iteration $x_{n+1} = Tx_n$ gegen eine Lösing $\bar{x} \in Y$ von $x = Tx$, und es gilt die Fehlerabschätzung* (8), *wobei die e_n gemäss* (5) *gebildet sind.*

Bemerkung. Der folgende Beweis wird zeigen, dass die Bedingung der Vollstetigkeit von P auch durch die schwächere Forderung $\lim(e_n - e_{n+1}) = \theta$ ersetzt werden kann.

Beweis. Wegen (5′) ist $\theta \leqq e_{n+1} \leqq e_n \leqq \cdots \leqq e_0$. Daher ist e_n eine beschränkte Folge und besitzt somit eine konvergente Teilfolge. Wegen des monotonen Verhaltens von e_n muss die ganze Folge konvergieren. Die Formeln (3′) und (7) liefern $d_\rho\,(x_m, x_n) \leqq a\|e_n\|$ $(0 \leqq n \leqq m)$, so dass auch x_n beschränkt ist und daher eine konvergente Teilfolge x_{k_n} mit dem Grenzwert $\bar{x}$ besitzt, für den wir wie im Beweis zu Satz 1 die Ungleichungen (8) zeigen können. Endlich gilt

$$\begin{aligned} d_\rho(\bar{x}, T\bar{x}) &\leqq d_\rho(\bar{x}, x_{k_n}) + d_\rho(x_{k_n}, Tx_{k_n}) + d_\rho(Tx_{k_n}, T\bar{x}) \\ &\leqq d_\rho(\bar{x}, x_{k_n}) + a\|e_{k_n} - e_{k_n+1}\| \\ &\quad + d_\rho(Tx_{k_n}, T\bar{x}),\ n \in \boldsymbol{N}, \end{aligned}$$

wobei wir diesmal (6) in Verbindung mit (3′) ausgenutzt haben. Auf der rechten Seite der letzten Ungleichung stehen lauter Nullfolgen, so dass wir $\bar{x} = T\bar{x}$ erhalten.

SATZ 3. *Sei T ein P-beschränkter Operator auf einem Abstandsraum* $(Y, d_\rho\colon X, \leqq, \|\ \|)$ *und* $e \in X$ *mit* $e \geqq \theta$ *und* $\lim P^n e = \theta$. *Dann besitzt die Gleichung* $x = Tx$ *höchstens eine Lösung in jeder der Mengen* $M_z = \{x \in Y : \rho(x, z) \leqq \lambda e, \rho(z, x) \leqq \lambda e$ *für ein reelles* $\lambda \geqq 0\}$, *wenn* z *die Menge* Y *durchläuft.*

BEWEIS. Sei $x_i = Tx_i$, sowie $\rho(x_i, z) \leqq \lambda_i e$, $\rho(z, x_i) \leqq \lambda_i e$ $(i = 1, 2)$. Dann ist $\rho(x_1, x_2) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)e$, $\rho(x_2, x_1) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)e$, also $\rho(x_1, x_2) = \rho(T^n x_1, T^n x_2) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)P^n e$ und $\rho(x_2, x_1) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)P^n e$ oder $d_\rho(x_1, x_2) \leqq a\|(\lambda_1 + \lambda_2)P^n e\|$ für $n \in N$. Das zeigt die Behauptung.

5. Bei den Sätzen 1 und 2 müssen die Ausgangselemente x_0 und e_0 die Anfangsbedingung (5′) erfüllen. Zu ihrer Konstruktion sei auf die Arbeiten [3, 8] und auf unsere Artikel [2 a, e] verwiesen, an dieser Stelle soll darauf nicht eingegangen werden. Besitzt der halbgeordnete Raum Ordnungseinheiten, so liefern unsere Sätze auch Konvergenzaussagen ohne eine Anfangsbedingung (5′).

Ein Element $e \geqq \theta$ heisst *Ordnungseinheit* [6, 7] des halbgeordneten Raumes $(X, \leqq)$, falls $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n[-e, e]$. Mit oK bezeichnen wir die Menge der Ordnungseinheiten des Kegels K, welcher $\leqq$ definiert. Sei $e \in oK$, so liefert das Minkowskifunktional $\|x\|_e = \inf\{\alpha \in R : \pm x \leqq \alpha e\}$ eine Norm auf X, falls K *archimedisch* ist, d. h. falls aus $x, y \in X$ und $nx + y \in K$ für alle natürlichen Zahlen $n \geqq 1$ stets $x \in K$ folgt [6, 7]. Alle so konstruierten Normen sind äquivalent und legen die Ordnungstopologie auf X fest [6, 7]. Ferner ist K abgeschlossen und normal bezüglich $\|\ \|_e$. Betrachten wir also einen Abstand auf einer nicht leeren Menge Y, welcher $Y \times Y$ in einen halbgeordneten Raum $(X, \leqq)$ mit einer archimedischen Ordnungsrelation und Ordnungseinheiten abbildet, so ist $(Y, d_\rho; X, \leqq, \|\ \|_e)$ für jede Ordnungseinheit e ein Abstandsraum. Da ausserdem die Einheitskugel in $(X, \|\ \|_e)$ gesättigt ist, nimmt die Metrik d_ρ die einfache Gestalt

$$d_\rho(x, y) = \mathrm{Max}(\|\rho(x, y)\|_e, \|\rho(y, x)\|_e)$$

an. Wegen der Äquivalenz der Normen $\|\ \|_e$ erzeugen alle diese Metriken auf Y dieselbe Topologie. Wir nennen $(Y, d_\rho; X, \leqq, \|\ \|_e)$ dann *archimedischen Abstandsraum mit Ordnungseinheiten,* oder kürzer *AO. Raum.*

Diese Konstruktion führt zu einer grossen Übersichtlichkeit der Theorie P-beschränkter Operatoren aufgrund der folgenden Aussagen für einen monotonen, linearen Operator P auf $(X, \leqq, \|\ \|_e)$:

LEMMA 1. *P ist beschränkt und die Operatornorm* $\|P\|_e$ *ist durch* $\|P\|_e = \|Pe\|_e$ *gegeben* [2 c]. Der Spektralradius $\sigma(P) =$

$\inf \|P^n\|_e{}^{1/n}$ *ist genau dann* < 1, *wenn es ein* $e' \in oK$ *gibt mit* $\|P\|_{e'} < 1$ [2 c]. *Existiert* $(I - P)^{-1}$ auf X ($I =$ *Einheitsoperator*) *und ist* $(I - P)^{-1}$ *monoton, so gilt* $\|P\|_{e'} < 1$ *genau dann, wenn* $e' \in (I - P)^{-1}(oK)$. [2 d].

Lemma 2. *Jeder P-beschränkte Operator T auf einem AO. Raum* $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \|_e)$ *ist Lipschitzbeschränkt auf* (Y, d_ρ), *oder genauer*:

$$d_\rho(Tx, Ty) \leqq \|P\|_e d_\rho(x, y) \qquad \text{für } x, y \in Y, e \in oK.$$

Denn aus $x, y \in Y, e \in oK$ folgt $\rho(x, y) \leqq d_\rho(x, y)e$, $\rho(y, x) \leqq d_\rho(x, y)e$, also wegen der *P-Beschränktheit auch*

$$\left.\begin{matrix}\rho(Tx, Ty)\\ \rho(Ty, Tx)\end{matrix}\right\} \leqq d_\rho(x, y)Pe \leqq \|P\|_e d_\rho(x, y)e,$$

und das zeigt die Behauptung (s. auch [2 d]).

Satz 4. *Sei T ein P-beschränkter Operator auf einem AO. Raum* $(Y, d_\rho; X, \leqq, \| \|_e)$. *Es sei entweder T vollstetig oder* (Y, d_ρ) *vollständig, und es gelte eine der drei folgenden Bedingungen*:

(i) $\sigma(P) < 1$;

(ii) $\|P\|_e < 1$;

(iii) $(I - P)^{-1}$ *existiert und ist monoton.*

Dann konvergiert jede Folge $x_{n+1} = Tx_n$, $x_0 \in Y$ *gegen die eindeutige Lösung* $\bar{x}$ *der Gleichung* $x = Tx$, *und für jedes* $z \in X$ *mit* $z \geqq \theta$, $\rho(x_1, x_0) \leqq (I - P)z$, $\rho(x_0, x_1) \leqq (I - P)z$ *gilt die Fehlerabschätzung*

$$\rho(\bar{x}, x_n) \leqq P^n z, \quad \rho(x_n, \bar{x}) \leqq P^n z \qquad \text{für } n \in N.$$

Beweis. Wegen Lemma 1 reicht es aus, die Voraussetzung (ii) anzunehmen. Diese ist aber mit $(I - P)e \in oK$ äquivalent [2 c], so dass wir für jedes $x_0 \in Y$ die Ungleichungen (5') mit $e_0 = e\mathrm{Max}(\|\rho(x_0, x_1)\|_{(I-P)e}, \|\rho(x_1, x_0)\|_{(I-P)e})$ erhalten. Nun folgt die Behauptung aus den Sätzen 1, 2 und 3, denn $P^n e_0$ ist wegen (ii) eine Nullfolge.

6. Sei (Y, d) ein metrischer Raum, dann ist $(Y, d; R, \leqq, | \,|$ offenbar ein AO. Raum, und die Menge der P-beschränkten Operatoren ist gleich der Menge der Lipschitzbeschränkten Operatoren. Satz 4 liefert im Falle der Vollständigkeit und der Voraussetzung (ii) den klassischen.

KONTRAKTIONSSATZ. *Für jede kontrahierende Abbildung T eines vollständigen, metrischen Raumes (Y, d) konvergiert jede Iteration $x_{n+1} = Tx_n$, $x_0 \in Y$ gegen die eindeutige Lösung der Gleichung $x = Tx$.*

Abschiessend wollen wir zeigen, dass der Satz 4 unter der Voraussetzung der Vollständigkeit von (Y, d_ρ) mit dem Kontraktionssatz in der genannten Form äquivalent ist (s. auch [2 d]):

Da T nach Lemma 2 eine kontrahierende Abbildung auf (Y, d_ρ) liefert, ergeben sich ohne weiteres die Konvergenz und Eindeutigkeitsaussage. Für die Fehlerabschätzung brauchen wir nur zu xeigen, dass die Mengen $M_n = \{x \in Y : \rho(x, x_n) \leqq P^n z, \quad \rho(x_n, x) \leqq P^n z\}$ $(n \in N)$ abgeschlossen sind und unter T invariant bleiben. Dann ist T nämlich ein kontrahierender Operator auf den vollständigen, metrischen Räumen (M_n, d_ρ), und die Anwendung des Kontraktionssatz liefert nunmehr die Fehlerabschätzung. Um $T(M_n) \subset M_n$ zu zeigen sei $x \in M_n$, dann gilt mit (6)

$$\left.\begin{array}{l} \rho(Tx, x_n) \leqq \rho(Tx, Tx_n) + \rho(Tx_n, x_n) \\ \rho(x_n, Tx) \leqq \rho(Tx_n, Tx) + \rho(x_n, Tx_n) \end{array}\right\} \leqq P^{n+1}z + (P^n z - P^{n+1}z) = P^n z.$$

Für den Beweis von $M_n = \bar{M}_n$ nehmen wir $t_k \in M_n$ mit $\lim d_\rho(t_k, \bar{t}) = 0$ an. Dann zeigt

$$\left.\begin{array}{l} \rho(\bar{t}, x_n) \\ \rho(x_n, \bar{t}) \end{array}\right\} \leqq d_\rho(\bar{t}, t_k)e + P^n z,$$

wenn man die Archimedizität von $\leqq$ ausnutzt, die Behauptung.

LITERATUR

1a. J. Albrecht, *Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge,* Num. Math. 4 (1962), 196–208.

1b. J. Albrecht, *Zur Fehlerabschätzung beim Gesamt-und Einzelschrittverfahren für lineare Gleichungssysteme,* Z. Angew. Math. Mech. 43 (1963), 83–85.

2a. E. Bohl, *Über Fehlerabschätzungen bei nichtlinearen Operatorgleichungen,* Num. Math. 13 (1969), 226–237.

2b. ——, *Iteration und Fehlerabschätzung in Räumen mit cinem archimedischen Kegel,* Arch. Rational Mech. Anal. 34 (1969), 354–360.

2c. ——, *Linear operator equations on a partially ordered vector space,* Aeq. Math. 4 (1970), 89–98.

2d. ——, *Die metrische Struktur von Räumen mit allgemeinerem Abstandsbegriff und ihre Verwendung bei der Behandlung nichtlinearer Probleme,* Comp. 5 (1970), 189–199.

2e. ——, *Monotone Operatoren bei der Behandlung linearer und nichtlinearer Probleme,* in: D. Laugwitz, Überblicke Mathematik IV, B1-Hochschultaschenbücher, 1973.

3. D. Braess, *Die Konstruktion monotoner Iterationsfolgen zur Lösungseinschliessung bei linearen Gleichungssystemen,* Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962), 97-106.

4. L. Collatz, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik,* Springer-Verlag: Berlin-Göttingen-Heidelberg (1964).

5. G. K. Kalisch, *On uniform spaces and topological algebra,* Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 936-939.

6. A. L. Peressini, *Ordered topological vector spaces,* Harper and Row Publishers, New York, Evanston and London (1967).

7. H. H. Schaefer, *Topological vector spaces,* The McMillan Company, New York-McMillan Ltd., London (1964).

8. J. W. Schmidt, *Ausgangsvektoren für monotone Iterationen bei linearen Gleichungssystemen,* Num. Math. **6**, (1964), 78-88.

9a. J. Schröder, *Das Iterationsverfahren bei allgemeinem Abstandsbegriff,* Math. Z. **66** (1956), 111-116.

9b. ——, *Neue Fehlerabschätzungen für verschiedene Iterationsverfahren,* Z. Angew. Math. Mech. **36** (1956), 168-181.

9c. ——, *Fehlerabschätzungen bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz,* Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1959), 28-44.

9d. ——, *Computing error bounds in solving linear systems,* Math. Comp. **16** (1962), 323-337.

10. H. Schwetlick, *Lineare positive Operatoren und Fehlerabschätzungen bei Operatorgleichungen,* Comp. 4 (1969), 345-358.

11. J. Vandergraft, *Newton's method for convex operators in partially ordered spaces,* SIAM J. Numer. Anal. **4** (1967), 406-432.

12a. J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of nonlinear equations in several variables,* Academic Press, 1970.

12b. ——, *On a class of approximate iterative processes,* Arch. Rational Mech. Anal. **23** (1967), 352-365.

Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik
der Westf. Wilhelms Universität 44 Münster, W. Germany