PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 33, No. 3, 1970

ZU EINER ARBEIT VON J. L. BERGGREN ÜBER AMBIVALENTE GRUPPEN

ADALBERT KERBER

Gruppen, in denen jedes Element zu seinem Inversen konjugiert ist, oder, was dasselbe ist: deren sämtliche Charaktere über dem Körper C der komplexen Zahlen reell sind, heissen ambivalent. Die Tatsache, dass jede 2-Gruppe in eine ambivalente Gruppe eingebettet werden kann, ergibt sich daraus, dass die 2-Sylowuntergruppen symmetrischer Gruppen S_n ambivalent sind, was wiederum mit der Assoziativität der Bildung des Kranzprodukts aus dem Ergebnis folgt, dass mit G auch das Kranzprodukt $G \wr S_2$ ambivalent ist (J. L. Berggren in Pacific J. Math. 28 (1969), 289–293). Diese Arbeit Berggrens hat weiter zum Inhalt, dass unter den alternierenden Gruppen genau die A_n mit $n \in \{1, 2, 5, 6, 10, 14\}$ und dass gewisse aus einer Klasse von G. A. Miller definierter Gruppen ambivalent sind.

Dazu werden hier einige Bemerkungen gemacht: Mit G ist auch $G \wr S_n$ ambivalent. Es wird auch die vom darstellungstheoretischen Standpunkt her schärfere Frage gestellt, wann alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen nicht nur reellen Charakter haben, sondern sogar zu reellen Darstellungen äquivalent sind. Im Fall der sechs ambivalenten alternierenden Gruppen gilt das nur in den beiden trivialen Fällen $A_1 = A_2 = \{1\}$. Für Kranzprodukte ergibt sich: Sind alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von G, H und von gewissen Unter gruppen von H zu reellen Darstellungen äquivalent, dann auch alle von $G \wr H$. Ist G oder H nicht ambivalent, dann auch $G \wr H$ nicht.

1. Ambivalente Kranzprodukte. Es sei S_n die symmetrische Gruppe auf $\Omega = \{1, \cdots, n\}$. Dann versteht man unter dem *Kranzprodukt* $G \wr S_n$ von G mit S_n die Menge

$$\{(f; \pi) \mid f\colon \Omega \to G,\ \pi \in S_n\}$$

von Paaren $(f; \pi)$ aus Abbildungen f von Ω in G und Permutationen $\pi \in S_n$, zusammen mit der Verknüpfung

$$(f; \pi)(f'; \pi') := (ff'_\pi; \pi\pi')$$

(Zu $f'\colon \Omega \to G$ sei f'_π definiert durch $f'_\pi(\pi(i)) := f'(i)\ \forall i \in \Omega$, zu zwei Abbildungen $f, f'\colon \Omega \to G$, deren Produkt ff' durch

$$ff'(i) := f(i)f'(i) \forall i \in \Omega\ ,$$

Produkte von Permutationen sind von rechts nach links zu lesen:

$\pi\pi'(i) := \pi(\pi'(i)) \forall i \in \Omega)$.

Jedem Zyklus $(j\pi(j) \cdots \pi^r(j))$ — j sei die kleinste Ziffer—von π kann man mittels f auf eindeutige Weise ein *Zyklenprodukt*

$$ff_\pi \cdots f_{\pi^r}(j) = f(j)f(\pi^{-1}(j)) \cdots f(\pi^{-r}(j)) \in G$$

zuordnen.

Ist $\pi \in S_n$ vom Typ $(a_1, \cdots, a_n)$, d.h. enthält π für $1 \leqq k \leqq n \wr a_k$ Zyklen der Länge k, so sei zu $(f; \pi) \wr a_{ik}$ die Anzahl der Zyklenprodukte, die Zyklen der Länge k aus π mittels f zugeordnet sind und in der i-ten Konjugiertenklasse von G liegen für eine feste Reihenfolge $K_1, \cdots, K_s$ der Konjugiertenklassen von G. Diese nicht negativen ganzen Zahlen a_{ik} fassen wir in Matrixform zum Typ

$$T(f; \pi) := (a_{ik}) \ , \quad \begin{array}{l} i \text{ Zeilenindex} \ , \ 1 \leqq i \leqq s \ , \\ k \text{ Spaltenindex} \ , \ 1 \leqq k \leqq n \ , \end{array}$$

von $(f; \pi)$ zusammen, und es gilt (Specht [1]):

SATZ 1. *$(f; \pi)$ ist genau dann zu $(f'; \pi')$ konjugiert, wenn*

$$T(f; \pi) = T(f'; \pi') \ .$$

Mit Hilfe dieses Satzes können wir wie angekündigt beweisen:

SATZ 2. *Ist G ambivalent, so auch $G \wr S_n$.*

Beweis: Dem Zyklus $(j \cdots \pi^r(j))$ aus π entspricht umkehrbar eindeutig der Zyklus $(j \cdots \pi^{-r}(j))$ aus π^{-1}, dem bzgl. $f_{\pi^{-1}}^{-1}$ das Zyklenprodukt

$$(f \cdots f_{\pi^r}(j))^{-1}$$

zugeordnet ist wie man leicht nachrechnet (zu $f: \Omega \to G$ sei f^{-1} durch $f^{-1}(i) := f(i)^{-1} \forall i \in \Omega$ definiert). Wegen

$$(f; \pi)^{-1} = (f_{\pi^{-1}}^{-1}; \pi^{-1})$$

folgt bei ambivalentem G mit Satz 1 die Behauptung.

Das Korollar, dass $S_m \wr S_n$ ambivalent ist, kann mit der bekannten Tatsache, dass jede irreduzible C-Darstellung einer symmetrischen Gruppe zu einer reellen Darstellung äquivalent ist, auch leicht aus der Konstruktion der gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von $S_m \wr S_n$ (vgl. Specht [1], Kerber [1], [2]), auf die wir gleich eingehen werden, abgelesen werden, Satz 2 dagegen nicht, wenigstens nicht direkt.

2. Irreduzible Darstellungen von Kranzprodukten. Ist H Untergruppe von S_n, dann versteht man unter $G \wr H$ die Untergruppe

$$\{(f; \pi) \mid f: \Omega \to G, \pi \in H\} \leqq G \wr S_n .$$

Die Theorie der Darstellungen dieses Kranzprodukts über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper K kann mit Cliffords Theorie der Darstellungen von Gruppen mit Normalteilern leicht gewonnen werden (Kerber [1]), wenn G vollreduzibel ist. Dazu geht man von den irreduziblen K-Darstellungen des Normalteilers

$$G^* := \{(f; 1_H) \mid f: \Omega \to G\} = G_1 \times \cdots \times G_n \lhd G \wr H$$

mit

$$G_i := \{(f; 1_H) \mid f(j) = 1_G \forall j \neq i\} \cong G ,$$

aus, die der algebraischen Abgeschlossenheit von K wegen äussere direkte Produkte

$$F^* := F_1 \# \cdots \# F_n$$

von irreduziblen K-Darstellungen F_i von G sind mit den darstellenden Matrizen

$$F^*(f; 1_H) = F_1(f(1)) \times \cdots \times F_n(f(n)) \quad \text{(Kroneckerprodukt)} .$$

F^* heisse nun vom Typ $(n_1, \cdots, n_t)$, wenn n_i die Anzahl der Faktoren F_i ist, die zur i-ten irreduziblen K-Darstellung von G äquivalent sind (für eine feste Reihenfolge der irreduziblen K-Darstellungen von G).

Ist dann S_{n_j} die Untergruppe von $S_n (\geqq H)$, die aus den $n_j!$ Permutationen besteht, die die n_j Indizes k der zur j-ten irreduziblen K-Darstellung von G äquivalenten Faktoren F_k vertauschen, dann ist die Trägheitsgruppe von F^* gerade (Specht [1], Kerber [1])

$$G \wr H_{F^*} := G \wr ((S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}) \cap H) \leqq G \wr H .$$

F^* kann nun auf diese Trägheitsgruppe erweitert werden, wenn man annimmt—was für das Folgende keine Einschränkung bedeutet—, dass die äquivalenten Faktoren von F^* nicht nur äquivalent, sondern sogar gleich sind. Ist nämlich die Matrix

$$F^*(f; 1_H) = (d^1_{\alpha_1 \beta_1}(f(1)) \cdots d^n_{\alpha_n \beta_n}(f(n))) ,$$

so sei

$$\widetilde{F}^*(f; \pi) := (d^1_{\alpha_1 \beta_{\pi^{-1}(1)}}(f(1)) \cdots d^n_{\alpha_n \beta_{\pi^{-1}(n)}}(f(n)))$$

für $(f; \pi) \in G \wr H_{F^*}$. Man rechnet leicht nach, dass diese Matrizen eine Darstellung $\widetilde{F}^*$ von $G \wr H_{F^*}$ bilden. Für ihre Einschränkung

$\tilde{F}^* \downarrow G^*$ gilt offenbar

$$\tilde{F}^* \downarrow G^* = F^* ,$$

sie ist also irreduzibel. Und mit einer gemäss

$$F'(f; \pi) := F''(\pi)$$

zu einer irreduziblen K-Darstellung F'' von

$$G \wr H_{F^*}/G^* = ((S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}) \cap H)$$

gehörenden irreduziblen Darstellung F' von $G \wr H_{F^*}$ gilt (Specht [2], Kerber [1]):

SATZ 3. *Die von der irreduziblen K-Darstellung* $\tilde{F}^* \otimes F'$ *induzierte Darstellung*

$$(\tilde{F}^* \otimes F') \uparrow G \wr H$$

ist irreduzibel und jede irreduzible K-Darstellung von $G \wr H$ *ist von dieser Form.*

Es folgt direkt

SATZ 4. *Sind alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von* G, *von* H *und von den Untergruppen* $(S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}) \cap H \leqq H$ *zu reellen Darstellungen äquivalent, dann auch alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von* $G \wr H$.

Denn die Matrix $\tilde{F}^*(f; \pi)$ enthält mit $F^*(f; 1_H)$ nur reelle Zahlen, nach Voraussetzung gilt das auch für $F'(f; \pi)((f; \pi) \in G \wr H_{F^*})$, also auch für das Kroneckerprodukt, also auch für jede Matrix von $(\tilde{F}^* \otimes F') \uparrow G \wr H = F$.

Ganz analog folgt das Entsprechende für M-Gruppen, für endliche Gruppen, deren sämtliche irreduziblen Darstellungen über sämtlichen algebraisch abgeschlossenen Körpern, deren Charakteristik nicht in der Gruppenordnung aufgeht, von eindimensionalen Darstellungen von Untergruppen induziert werden (Seitz, Kerber [3]):

SATZ 5. *Ist* G, H *und jede Untergruppe* $(S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}) \cap H \leqq H$ *M-Gruppe, dann ist auch* $G \wr H$ *eine M-Gruppe.*

Auf den vom darstellungstheoretischen Standpunkt her schärferen Satz 2 kann man allerdings so nicht schliessen, da beim Übergang von $F^*(f; 1_H)$ nach $\tilde{F}^*(f; \pi)$ die Hauptdiagonale zerstört wird. Dagegen ergibt sich noch:

Satz 6. *Ist G oder H nicht ambivalent, dann ist auch $G \wr H$ nicht ambivalent.*

Sind nämlich F^1 bzw. F'' irreduzible C-Darstellungen von G bzw. H mit komplexem Charakter, so sind mit den Einsdarstellungen EG bzw. EH von G bzw. H die Charaktere der Darstellungen $\widetilde{(F^1 \# \cdots \# F^1)} H \otimes EH'$ (auf $G_1 \leqq G \wr H$) bzw. $\widetilde{(EG \# \cdots \# EG)} \otimes F'$ (auf $H' = \{(e; \pi) \mid \pi \in H, e(i) = 1_G \forall i\} \leqq G \wr H$) ebenfalls komplex.

3. Irreduzible gewöhnliche Darstellungen alternierender Gruppen. Das in der Arbeit von J. L. Berggren enthaltene Ergebnis, dass genau die alternierenden Gruppen A_n mit $n \in \{1, 2, 5, 6, 10, 14\}$ ambivalent sind, lässt vom darstellungstheoretischen Standpunkt her die Frage offen, welche der irreduziblen C-Darstellungen dieser alternierenden Gruppen nicht nur reellen Charackter besitzen, sodern sogar zu einer reellen Darstellung äquivalent sind. Ist α eine Partition von n, also

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_h), \alpha_i \in N, \alpha_j \geqq \alpha_{j+1}, \sum_i \alpha_i = n ,$$

dann kann man bekanntlich die irreduziblen C-Darstellungen von S_n umkehrbar eindeutig diesen Partitionen zuordnen. Die dabei α zugeordnete Darstellung sei mit $[\alpha]$ bezeichnet. α kann man sich durch einen Rahmen aus n Kästchen und mit α_i Kästchen in der i-ten Zeile veranschaulichen:

$$\alpha: \begin{array}{lll} \boxed{} \cdot \cdot \cdot \boxed{} & & \alpha_1 \text{ Kästchen} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{} \cdots \boxed{} & & \alpha_h \text{ Kästchen} . \end{array}$$

Die Zeilen beginnen alle in derselben Spalte, und wegen $\alpha_j \geqq \alpha_{j+1}$ ist es sinnvoll, von Spalten dieses Rahmens zu sprechen. α'_j sei die Länge der j-ten Spalte. α ist dann umkehrbar eindeutig die *assoziierte Partition*

$$\alpha' := (\alpha'_1, \cdots, \alpha'_{\alpha_1})$$

von n zugeordnet. Mit der alternierenden Darstellung $[1^n]$ (sie ist der Partition $(1, \cdots, 1)$ zugeordnet) von S_n bzgl. A_n gilt bekanntlich

$$[\alpha] = [\alpha'] \otimes [1^n] ,$$

$[\alpha']$ ist also auch eine im Sinne von Cliffords Theorie der Darstellungen von Gruppen mit Normalteilern zu $[\alpha]$ bzgl. A_n assoziierte Darstellung, da

$$[\alpha] \downarrow A_n = [\alpha'] \downarrow A_n$$

folgt. Nach Cliffords Theorie ist diese Einschränkung irreduzibel, wenn $\alpha \neq \alpha'$, d.h. wenn $[\alpha]$ nicht selbstassoziiert ist, mit $[\alpha]$ ist dann natürlich auch diese Einschränkung reell. Dagegen ist, falls $\alpha = \alpha'$ gilt, die Einschränkung auf A_n reduzibel in zwei konjugierte irreduzible Darstellungen $[\alpha]^{\pm}$ von A_n:

$$([\alpha] = [\alpha']) \downarrow A_n = [\alpha]^+ + [\alpha]^- .$$

Nur dieser Fall bedarf also einer Untersuchung auf Realität. Die Frage, ob $[\alpha]^{\pm}$ zu einer reellen Darstellung äquivalent sind oder nicht, lässt sich leicht mit Hilfe des folgendes Satzes beantworten (Specht [3]):

SATZ 7. *Ist $\alpha = \alpha'$ und sind $c_1, \cdots, c_s$ die positiven aus der Reihe der Zahlen $c_i := 2(\alpha_i - i) + 1$, so sei*

$$p := c_1 c_2 \cdots c_s = a^2 b$$

mit quadratfreiem b. b ist dann das minimale r, so dass $[\alpha]^{\pm}$ im Körper der r-ten Einheitswnrzeln realisiert werden können.

Wendet man das auf die alternierenden Gruppen A_n, $n \in \{1, 2, 5, 6, 10, 14\}$ an, dann wird oben erwähnte Frage durch den folgenden Satz beantwortet:

SATZ 8. *Nur im trivialen Fall $A_1 = A_2 = \{1\}$ sind alle gewöhnlichen irreduziblen Darstellungen von A_n zu einer reellen äquivalent. Von den Bestandteilen der Einschränkungen selbstassoziierter irreduzibler Darstellungen von S_n auf A_n sind für $n \in \{5, 6, 10, 14\}$ nur die Bestandteile $[5, 2, 1^3]^{\pm}$ von $[5, 2, 1^3] \downarrow A_{10}$ zu reellen Darstellungen äquivalent.*

LITERATUR

1. J. L. Berggren, *Finite groups in which every element is conjugate to its inverse*, Pacific J. Math. **28** (1969), 289-293.

2. A. Kerber, *Zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten*, Canad. J. Math. **20** (1968), 665-672.

3. ———, *Zur Darstellungstheorie von Symmetrien symmetrischer Gruppen*, Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen **80** (1969), 1-27.

4. ———, *Zur Theorie der M-Gruppen*, Math. Z. **115** (1970), 4-6.

5. G. M. Seitz, *M-groups and the supersolvable residual*, Math. Z. **110** (1969), 101-122.

6. W. Specht, *Eine Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe*, Schriften Berlin **1** (1932), 1-32.

7. ———, *Eine Verallgemeinerung der Permutationsgruppen*, Math. Z. **37** (1933),

321–341.
8. ———, *Darstellungstheorie der alternierenden Gruppe*, Math. Z. **43** (1938), 553–572.

Received November 11. 1969.

JUSTUS LIEBIG-UNIVERSITÄT
GIESSEN, W. GERMANY