

## 120. *Topologische Kennzeichnung der räumlichen Elementargeometrie.*

Von Wilhelm Süß.

Kotogakko, Kagoshima.

(Eing. Okt. 9, 1926. Vorgel. von M. FUJIWARA, M.I.A., Okt. 12, 1926.)

*D. Hilbert* hat im Anhang IV seiner „Grundlagen der Geometrie“ eine topologische Kennzeichnung der ebenen Elementargeometrie gegeben. Bei der Beschäftigung mit einer dort genannten Fragestellung ist mir kürzlich<sup>1)</sup> eine Reduktion der Hilbertschen Axiome im Sinne jener Frage und dadurch ein topologisch-gruppentheoretischer Aufbau der ebenen Geometrie gelungen, dessen charakteristischen Unterschied von demjenigen Hilberts man folgendermassen zum Ausdruck bringen kann: Bei Hilbert werden die Bewegungen der Elementargeometrie selbst als gewisse topologische Selbstabbildungen der Ebene eingeführt, während meine Darstellung zwar auch von einer Gruppe topologischer Selbstabbildungen der Ebene ausgeht, die aber nicht selbst die Gruppe der „wirklichen“ Bewegungen der Elementargeometrie ist, sondern vermitteltst deren diese erst konstruiert wird. In der Hilbertschen Ausdrucksweise: die von Hilbert zugrunde gelegte Gruppe ist abgeschlossen, die meine nicht.

Meine frühere Methode habe ich inzwischen zu einem entsprechenden topologisch-gruppentheoretischen Aufbau der räumlichen Elementargeometrie verwandt, worüber ich mir hier kurz zu berichten gestatte.

Der Einfachheit wegen betrachten wir hier den gewöhnlichen dreidimensionalen Zahlenraum, obwohl sich ein allgemeineres Operationsfeld zugrunde legen liesse. Es sei ein gewisses System  $T$  von topologischen Selbstabbildungen des Raumes ( $T$ -Abbildungen) gegeben. Unter diesen wollen wir diejenigen, welche mindestens einen Punkt  $A$  fest lassen, „*Drehungen um A*“, und diejenigen, welche mindestens zwei Punkte  $A$  und  $B$  fest lassen, „*Rotationen um A, B*“ nennen. Diejenige Punktmenge, die aus einem Punkt  $P$  bei allen möglichen Drehungen um einen von  $P$  verschiedenen Punkt  $A$  hervorgeht, nennen wir die

---

1) Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie; Tôhoku Math. Journ., Bd. 26, S. 365-385; Jap. Journ. of Math., Bd. 2, S. 91-95.

„*T*-Kugel um  $A$  durch  $P$ .“ Diejenige Punktmenge hingegen, die aus einem Punkt  $P$  durch alle Rotationen um zwei von  $P$  verschiedene Punkte  $A$  und  $B$  aus  $P$  entstehen, heisse der „*T*-Kreis um  $A$  und  $B$  durch  $P$ .“  $Kr(A, B; P) = Kr(B, A; P)$ . Nach Definition ist  $Kr(A, B; P)$  stets in der *T*-Kugel durch  $P$  um  $A$ ,  $Ku(A, P)$ , enthalten, der *T*-Kreis auf der *T*-Kugel gelegen.

Für das System *T* sollen nun folgende Axiome gelten:

I. Die *T*-Abbildungen bilden eine Gruppe, welche zu jedem Element auch das inverse enthält.

II. Es gibt um jeden Punkt  $A$  und durch jeden von  $A$  verschiedenen Punkt  $P$  eine *T*-Kugel, deren abgeschlossene Hülle<sup>1)</sup> eine einfache geschlossene Fläche („vom Typus der Kugel“) ist, welche wir „*wahre Kugel*“ nennen.

III. Es gibt um je zwei Punkte  $A$  und  $B$  und durch jeden Punkt  $P$ , der bei einer Rotation um  $A$  und  $B$  nicht fest bleibt, einen *T*-Kreis, dessen abgeschlossene Hülle eine einfache geschlossene Kurve ist, welche „*wahrer Kreis*“ heissen soll.

IV. a) Zu je zwei Punkten  $A, B$  gibt es eine positive Zahl  $\rho(A, B)$  derart, dass der (gewöhnliche) Zahlenabstand von  $A$  und  $B$  stets kleiner als  $\rho(A, B)$  bleibt, welcher *T*-Abbildung  $A$  und  $B$  auch unterworfen werden.

b) Zu jeder Zahlenkugel  $k$  um  $A$  gibt es eine konzentrische Zahlenkugel  $K$  derart, dass kein Punkt, der innerhalb oder auf  $k$  liegt, durch Drehung um  $A$  in das Aussengebiet von  $K$  gebracht werden kann; es existiert ein  $K$ , sodass es mindestens eine Drehung um  $A$  gibt, welche einen Punkt von  $K$  in einen von  $k$  überführt.

c) Für  $B \rightarrow A$  ist  $\rho(A, B) \rightarrow 0$ .

Das „*System S der Bewegungen des Raumes*“ setzt sich dann zusammen aus den *T*-Abbildungen und gewissen weiteren durch ein konvergentes Verfahren aus ihnen gewonnenen topologischen Selbstabbildungen des Raumes, für welche die genannten Axiome bestehen bleiben. Das Ziel dieser Erweiterung des *T*-Systems besteht darin, diese zu einem abgeschlossenen System *S* im Sinne Hilberts zu ergänzen, ohne die Axiome zu ändern. Ich zeige:

*Auf Grund der Axiome I—IV lassen sich die Bewegungen als ihnen genügende topologische Selbstabbildungen des Raumes und die Gebilde „gerade Linie“ und „Ebene“ derart bestimmen, dass für sie die räumliche Elementargeometrie gültig ist.*

1) C. Carathéodory: Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig 1918, S. 57.

Die Erweiterung des Systems  $T$  besteht hauptsächlich in folgender Festsetzung: Es sei  $R_1, R_2, \dots$  eine Folge von Rotationen um  $A$  und  $B$ ;  $P$  sei ein Punkt eines wahren Kreises  $k$  um  $A, B$ ;  $P_i$  sei der Bildpunkt von  $P$  bei  $R_i$ . Wenn dann die Folge  $P_i$  einseitig monoton gegen einen Punkt  $O$  von  $k$  konvergiert, so konvergiert, wie sich zeigen lässt, die Folge  $R_i$  gegen eine topologische Selbstabbildung des Raumes, die ich als „wahre Rotation“ den Bewegungen zurechne; für sie bleiben die Axiome gültig. Das System  $S$  der Bewegungen besteht dann aus den  $T$ -Abbildungen, den wahren Rotationen und allen aus endlichvielen solcher Bewegungen zusammengesetzten Operationen.

Als „Geraden“ bieten sich die sog. Rotationsachsen dar, d. h. die Mengen derjenigen Punkte, welche bei je einer Rotation festbleiben. Eine Gerade  $a$  heisst senkrecht zu einer anderen  $b$ , wenn eine wahre Halbrotaion (mit der Periode 2) um  $a$  existiert, welche  $b$  in sich überführt. Die Gesamtheit der auf einer Geraden in demselben Punkte senkrechten Geraden wird als „Ebene“ eingeführt. Für Geraden und Ebenen gelten dann die in *Hilberts* „Grundlagen“ genannten Axiome der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz und das Archimedische Axiom.

Eine ausführliche Darstellung der hier skizzierten Untersuchungen ist in Vorbereitung.

---

3) Sie wird als Mitteilung IV einer Reihe von Arbeiten erscheinen, welche alle den gemeinsamen Obertitel *l. c.*<sup>1)</sup> tragen. II behandelt eine topologische Kennzeichnung der Spiegelungen an Kreisen, III eine solche der linearen konformen Abbildungen ohne Umlegung der Winkel auf der Kugel.