99. *Eine kennzeichnende Eigenschaft der ebenen algebraischen Kurven dritter Ordnung.*

Von Tadahiko KUBOTA.
Mathematical Institute, Tohoku Imperial University, Sendai.
(Rec. June 20, 1928. Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., July 12, 1928.)

In dieser kleinen Note möchte ich bemerken, dass man aus den Arbeiten von Herren Liebmann[1] und O. Volk[2] sowie aus der Bemerkung von Herrn M. Fujiwara[3] den folgenden Satz herleiten kann:

Wenn drei Kurvenbögen durch beliebige Schar paralleler Geraden in drei Punkten geschnitten werden, sodass der Schwerpunkt der drei Schnittpunkte eine Gerade beschreibt, so gehören die drei Kurvenbögen einer und derselben Kurve dritter Ordnung oder ihrer Entartung an.

Hier ist die stetige Differenzierbarkeit der Kurven vorausgesetzt.

H. Liebmann hat den folgenden Satz bewiesen[1]:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die drei Geradenscharen

$$\begin{aligned} A_1(u)\,x+B_1(u)\,y+C_1(u) &=0\,, \\ A_2(v)\,x+B_2(v)\,y+C_2(v) &=0\,, \\ A_3(w)x+B_3(w)y+C_3(w) &=0 \end{aligned}$$

ein Dreiecksnetz bilden, dass also drei aus diesen Scharen entnommene Gerade durch einen Punkt gehen, wenn

$$u+v+w=0\,,$$

ist die Beziehung

$$\frac{\rho_1}{(PP_1)^3}+\frac{\rho_2}{(PP_2)^3}+\frac{\rho_3}{(PP_3)^3}=0.$$

Hier bedeuten ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Krümmungsradien der drei Stützkurven in den Berührungspunkten $P_1\,P_2\,P_3$ der von P ausgehenden Netzgeraden.

Anderseits hat O. Volk bewiesen,[4] dass, *wenn die obige Bedingung erfüllt ist, die drei Stützkurven notwendig einer und derselben Kurve dritter Klasse oder ihrer Entartung angehören.*

---

1) Münchener Berichte (1927) 73—87.

2) Heidelberger Berichte (1927).

3) Im Vortrag den er im April in der Versammlung von der math.-phy. Soc. gehalten hat.

4) a.a.0.

Zuerst mache ich die folgende Betrachtung, *die zur Fujiwaraschen Bemerkung*[1] *in gewissem Sinne dual ist.*

Wir setzen nun voraus, dass *die Liebmannsche Bedingung für alle Punkte P auf einer Geraden l erfüllt ist; dann geht die Polargerade der Geraden l inbezug auf die drei Tangenten PP_1, PP_2, PP_3 durch einen festen Punkt hindurch und umgekehrt.*

Zum Beweis nehmen wir die x-Achse für die Gerade l an. Es seien die Tangenten PP_1, PP_2, PP_3 durch

$$\begin{aligned} x\cos\theta+y\sin\theta-p(\theta)&=0,\\ x\cos\varphi+y\sin\varphi-q(\varphi)&=0,\\ x\cos\psi+y\sin\psi-r(\psi)&=0 \end{aligned}$$

ausgedrückt. Da diese drei Geraden sich auf der x-Achse schneiden, haben wir

$$\frac{p(\theta)}{\cos\theta}=\frac{q(\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{r(\psi)}{\cos\psi},$$

den wir mit t bezeichnen. Wenn man nun die Polargerade PP' der Geraden l inbezug auf PP_1, PP_2, PP_3 durch

$$x+y\tan\lambda-t=0$$

bezeichnet, so ist

$$3\tan\lambda=\tan\theta+\tan\varphi+\tan\psi.$$

Die Gleichung der Polargeraden PP' ist also

$$x+\frac{1}{3}(\tan\theta+\tan\varphi+\tan\psi)y-t=0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Polargerade durch einen festen Punkt hindurchgeht, ist

$$\frac{d^2}{dt^2}\{\tan\theta+\tan\varphi+\tan\psi\}=0,$$

d.h.

$$\frac{p(\theta)+p''(\theta)}{\{p'(\theta)+p(\theta)\tan\theta\}^3}+\frac{q(\varphi)+q''(\varphi)}{\{q'(\varphi)+q(\varphi)\tan\varphi\}^3}+\frac{r(\psi)+r''(\psi)}{\{r'(\psi)+r(\psi)\tan\psi\}^3}=0,$$

oder

$$\frac{\rho_1}{(PP_1)^3}+\frac{\rho_2}{(PP_2)^3}+\frac{\rho_3}{(PP_3)^3}=0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

1) a.a.O.

Daraus folgt der folgende Satz:

Wenn P sich auf beliebiger Geraden l bewegt und die Polargerade der Geraden l inbezug auf die drei Tangenten PP_1, PP_2, PP_3 an die drei Kurvenbögen durch einen festen Punkt hindurchgeht, dann gehören die drei Kurvenbögen einer und derselben Kurve dritter Klasse an.

Man nehme nun an, dass, wenn P sich auf einer beliebigen Geraden l eines Strahlenbüschels bewegt, die Polargerade der Geraden l inbezug auf die drei Tangenten PP_1, PP_2, PP_3 an drei Kurvenbögen durch einen festen Punkt hindurchgeht. Dann kann man beweisen, dass die Liebmannsche Bedingung für alle Ausgangspunkte erfüllt ist.

Beweis. Wir können zuerst beweisen, dass die Liebmannsche Bedingung für alle drei Berührungspunkte aus den Punkten P der Geraden l des Strahlenbüschels erfüllt ist. Da aber die Gerade l ein beliebiger Strahl des Strahlenbüschels sein kann und der Punkt P folglich alle Punkte in der Ebene durchlaufen kann, so muss die Liebmannsche Bedingung für alle Punkte in der Ebene erfüllt sein, w.z.b.w.

Somit erhält man den folgenden Satz:

Wenn der Punkt P sich auf beliebigem Strahle l eines Strahlenbüschels bewegt und die Polargerade der Geraden l inbezug auf die drei Tangenten PP_1, PP_2, PP_3 an die drei Kurvenbögen durch einen festen Punkt hindurchgeht, dann gehören die drei Kurvenbögen einer und derselben Kurve dritter Klasse an.

Da dieser Satz vollkommen projektivisch ist, erhält man unmittelbar den dualen Satz:

Wenn drei Kurvenbögen durch beliebige Gerade eines Strahlenbüschels mit dem Zentrum P auf einer Geraden in drei Punkten geschnitten werden sodass die zweite Polare des Punktes P inbezug auf drei Schnittpunkte eine Gerade beschreibt, gehören diese drei Kurvenbögen einer und derselben Kurve dritter Ordnung an.

Wenn die Gerade l unendlich ferne Gerade ist, erhält man den am Anfang dieser Note erwähnten Satz.