75. Über die Klassenzahl eines relativ-zyklischen Zahlkörpers vom Primzahlgrad.

By Mikao MORIYA.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. July 1, 1930. Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 12, 1930.)

(I)

Ist K ein relativ-zyklischer Körper vom Primzahlgrad l über k und s eine erzeugende Substitution der Galoischen Gruppe von K nach k, so ist bekanntlich das Hauptgeschlecht von K identisch mit der Gesamtheit aller symbolischen $(1-s)-$ten Potenzen von Idealklassen aus K und die Anzahl a der ambigen Idealklassen aus K stimmt mit der Anzahl der Geschlechter überein.

Hieraus erhalten wir den Satz:

Wenn die Anzahl der Idealklassen des Hauptgeschlechtes von K durch l teilbar ist, so auch die Anzahl der ambigen Idealklassen; oder wenn die Anzahl der ambigen Idealklassen von K zu l prim ist, so auch die Klassenzahl von K.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Idealklasse C im Hauptgeschlecht, für die $C^l=E$. Wenn i die kleinste ganze rationale Zahl $(1\leqq i\leqq l-1)$, derart dass $C^{(1-s)^i}=E$, so ist $C^{(1-s)^{i-1}}\neq E$ ambig und $C^{l(1-s)^{i-1}}=E$, w.z.b.w.

(II)

Bezeichnungen[1]:

h_0 die Klassenzahl von k,

d_e die Anzahl der in die Relativdiskriminante von K nach k eingehenden Primideale von k; d_u die Anzahl der in K Primstellen $2-$ten Relativgrades zerfallenden unendlichen Primstellen von k: $d=d_e+d_u$,

$o=1$ oder 0, jenachdem k die $l-$te Einheitwurzel enthält oder nicht.

r die Anzahl der Grundeinheiten in k,

ε die Einheiten in k,

η^* Einheiten, die Relativnormen $\eta^*=N_{K/k}(\theta)$ von Zahlen θ sind.

1) Nach H. Hasse: Bericht über Klassenkörper. Jahresber. d. D.M.V., **36** (274).

Bekanntlich ist dann

$$a=h_0 l^{d+q^*-(r+1+o)},$$

wo q^* durch $(\eta^*:\varepsilon^l)=l^{q^*}$ erklärt ist.

Aus dem Satz in (I) wollen wir nun einige teilweise bekannte Sätze einheitlich herleiten.

(I) Wenn $k=k(1)$ der Rationalzahlkörper und die Relativdiskriminante von K/k nur durch eine einzige Primzahl teilbar, so ist die Klassenzahl von K prim zu l.

Beweis: a) l ungerade: $h_0=1$, $o=0$, $q^*=0$, $d=1$; folglich $a=1$.
b) $l=2$. i) K reell: $d=1$, $r=0$, $o=1$; folglich $q^*\geqq 1$. Andererseits $q^*\leqq 1$, daher $q^*=1$. Also $a=1$.
ii) K imaginär: $d=2$, $r=0$, $o=1$, $q^*=0$; folglich $a=1$.

(II) Wenn $l=2^m+1$ und wenn mit ζ eine l-te Einheitwurzel bezeichnet wird, so ist die Klassenzahl von $k(\zeta+\zeta^{-1})$ ungerade.

Beweis: Es sei $k_1, k_2, \ldots\ldots, k_{\frac{l-1}{2}}$ die Folge der relativ-quadratischen Oberkörper über $k_0=k(1): k_{\frac{l-1}{2}}=k(\zeta+\zeta^{-1})$. Nach ((I), b) ist die Klassenzahl von k_1 ungerade. Nehmen wir an, dass die Klassenzahl von k_i ungerade ist, dann ist die Anzahl der ambigen Idealklassen von $k_{i+1}/k_i: a_{i+1}=h_0 2^{d+q^*-(r+1+o)}=h_0 2^{1+q^*-(r+1+1)}=h_0$, da $q^*\leqq r+1$ und h_0 ungerade ist, wobei h_0, q^*, r auf k_i bezogen sind. Da a_{i+1} ungerade ist, so ist die Klassenzahl von k_{i+1} ungerade. Daher folgt unser Satz durch die vollständige Induktion.

(III) Die Klassenzahl des Kreiskörpers vom 2^m-ten Einheitwurzeln ist ungerade. (Weber.)

Beweis: Genau wie bei (II), indem man von $k_0=k(i)$ ausgeht.

(IV) Wenn die Klassenzahl des Kreiskörpers $k(\zeta)$ von l-ten Einheitwurzeln nicht durch l teilbar ist, so auch die Klassenzahl von $k(\zeta, \sqrt[l]{\varepsilon})$, wobei ε Einheit in $k(\zeta)$ bedeutet. (Pollaczek.[1])

Beweis: Da $d=1$ ist, so ist die Anzahl der ambigen Idealklassen von $k(\zeta, \sqrt[l]{\varepsilon})/k(\zeta)$ $a=h_0 l^{1+q^*-(r+1+0)}$, $q^*\leqq r+1$, $l\nmid h_0$. Also ist a prim zu l.

(V) Die Klassenzahl des Kreiskörpers von l^h-ten Einheitwurzeln ist nur dann durch l teilbar, wenn die Klassenzahl des Kreiskörpers von l-ten Einheitwurzeln durch l teilbar ist.[2] (Furtwängler.)

---

1) F. Pollaczek: Über die irregulären Kreiskörper der l-ten und l^2-ten Einheitwurzeln. Math. Zeit. **21**.

2) Ph. Furtwängler: Über die Klassenzahl der Kreiskörper. Jour. f. Math. **140**.

Beweis: Für $h=2$, setze man $\varepsilon=\zeta$ in (IV); für $h>2$, genau wie bei (II) oder (III).

Bemerkung: Wir können die Sätze von (I) auf den Fall verallgemeinern, wo K relativ-zyklischer Körper vom Primzahlpotenzgrade ist.