108. *Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.*

Par Masuo FUKUHARA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Rec. Oct. 27, 1930. Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1930.)

Soit donné un système d'équations différentielles ordinaires

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) \qquad (i=1, 2, \ldots\ldots, n).$$

Nous supposerons pour la simplicité de l'énoncé que les f_i sont des fonctions continues dans le domaine D:

$$0\leqq x\leqq a, \qquad |y_i|<\infty$$

et restent dans D plus petits en module qu'un nombre positif fini M. Soit E un ensemble de points quelconque situé dans D. Nous désignerons par $R(E)$ la région remplie par les courbes intégrales de (A) passant par un au moins des points de E. Nous avons

Théorème 1.[1] *Si P est un point de l'hyperplan $x=0$ et si Q est un point frontière de $R(P)$ situé sur l'hyperplan $x=\xi(0<\xi\leqq a)$, il existe au moins une courbe intégrale partant de P, parcourant la frontière de $R(P)$ et aboutissant à Q.*

La démonstration de ce théorème que j'ai donnée autrefois a été simplifiée par M. Nagumo. Sa méthode ainsi que la mienne s'appuient sur le même principe, approximations par polygones. Nous donnerons dans la suite une autre mode de démonstration.

Théorème 2. Si E est un ensemble continu (i.e. un ensemble fermé et bien enchaîné) situé dans D, la section de $R(E)$ par l'hyperplan $x=\xi$ est aussi un ensemble continu.

La chose est évidente si l'on est familier avec le théorème de M. Kneser.[2] Je laisserai donc au côté la démonstration. Du théorème 2 découle immédiatement

Théorème 3. Supposons l'ensemble E situé sur l'hyperplan $x=\xi$. S'il existe deux points P_1, P_2 de l'hyperplan $x=\xi$ tels que tout ensemble

---

1) M. Fukuhara: Proc. **4** (1928), 448; Jap. Jour. Math., **6** (1930), 269; M. Nagumo et M. Fukuhara: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, Ser. III, **12**.

2) H. Kneser: Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-Math. Kl. 1923; Max Müller: Math. Zeits. **28**; M. Nagumo: Jap. Jour. Math., **4** (1927), 215; M. Fukuhara: Jap. Jour. Math., **5** (1929), 345.

continu situé sur l'hyperplan $x=\xi$ *et contenant les points* P_1, P_2 *ait au moins un point commun avec* E, *tout ensemble continu situé dans* D *et contenant les points* P_1, P_2 *a au moins un point commun avec* $R(E)$.

En effet, soit K un ensemble continu quelconque situé dans D et contenant P_1, P_2. D'après le théorème 2, la section S de $R(K)$ par l'hyperplan $x=\xi$ est un ensemble continu. S et E ont donc au moins un point commun P', car S contient évidemment P_1, P_2. P' appartenant à S, il existe une courbe intégrale passant par P' et un point de $R(K)$. Ce point appartient à $R(E)$ puisque P' est un point de E. Le théorème est établi.

Désignons par $S_\xi(E)$ la section de $R(E)$ par l'hyperplan $x=\xi$ et par $F_\xi(E)$ la frontière de $S_\xi(E)$.

Théorème 4. Soit E *un ensemble fermé situé sur l'hyperplan* $x=0$. *Si* Q *est un point frontière de* $R(E)$ *situé sur l'hyperplan* $x=\xi$ $(0<\xi\leqq a)$, *il existe au moins une courbe intégrale passant par* Q *et un point de* $F_{\xi'}(E)$, ξ' *étant un nombre donné tel que* $0\leqq\xi'<\xi$.

Si $R(F_{\xi'}(E))$ contient le point Q, le théorème est établi. S'il n'en était pas ainsi, on trouverait un petit segment d ne rencontrant pas $R(F_{\xi'}(E))$ et joignant le point Q à un point extérieur Q' de $R(E)$, car, l'ensemble E étant fermé, $R(F_{\xi'}(E))$ l'est aussi. Q étant un point de $R(E)$, il existe une courbe intégrale C passant par Q et un point de E. Soit C' une courbe intégrale passant par Q'. Les courbes C, C' coupent l'hyperplan $x=\xi'$ en P_1, P_2 respectivement. P_1 serait un point intérieur de $S_{\xi'}(E)$, P_2 un point extérieur. L'ensemble des parties des courbes C, C' situées entre deux hyperplans $x=\xi$, $x=\xi'$ formerait avec le segment d un ensemble continu joignant P_1, P_2 et ne pénétrant pas l'ensemble $R(F_{\xi'}(E))$. Mais le théorème 3 montre que cela est impossible, car tout ensemble continu situé sur l'hyperplan $x=\xi$ et contenant P_1, P_2 a au moins un point commun avec la frontière $F_{\xi'}(E)$ de $S_{\xi'}(E)$.

Du théorème 4 découle le théorème 1. En effet, subdivisons l'intervalle $(0, \xi)$ en intervalles partiels (x_{i-1}, x_i). A chaque intervalle partiel, on peut appliquer le théorème 4. On obtient donc une courbe intégrale C passant par P et Q et telle que le point de C situé sur l'hyperplan $x=x_i$ soit un point de $F_{x_i}(P)$. Considéronse nsuite une suite de division (I_j) telle que le plus grand des intervalles partiels de la division (I_j) tende vers zéro avec $\frac{1}{j}$. A chaque division (I_j) correspond une courbe intégrale C_j passant par P et Q et telle que si x' est un point de subdivision correspondant à (I_j) le point de C_j situé sur l'hyperplan $x=x'$ appartienne à $F_{x'}(E)$. La famille des courbes C_j est évidemment également continue. On peut donc en extraire une suite partielle uniformément convergente. La courbe, limite de cette suite, répond à la question.