134. *Einige Bemerkungen über den Elementarteilersatz.*

Von Masatada TAZAWA.

Mathematisches Institut, Tohoku Kaiserliche Universität, Sendai.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Nov. 13, 1933.)

1. Es ist bekannt, dass der Elementarteilersatz für eine Matrix im Hauptidealring gilt.[1] Hier wollen wir die Umkehrung beweisen: *wenn der Elementarteilersatz für jede Matrix in einem Ring gilt, so ist der Ring ein Hauptidealring. Dabei ist es vorausgesetzt, dass der Teilerkettensatz für den Ring gilt.*

Beweis. Da der Elementarteilersatz für jede Matrix in unserem Ring gilt, können wir speziell eine Diagonalmatrix $A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ vom Grade 2 wählen. Wenn wir zwei passende unitäre Matrizen $P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ und $Q=\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ wählen, so gilt die folgende Relation

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

wo ε_1, ε_2 die Elementarteiler von der Matrix A bilden. Also ist

(1) $$a_1q_{11}=\varepsilon_1p_{11},\quad a_1q_{12}=\varepsilon_2p_{12},\quad a_2q_{21}=\varepsilon_1p_{21},\quad a_2q_{22}=\varepsilon_2p_{22}.$$

Daraus folgen die Kongruenzen:

(2) $$a_1q_{11}\equiv 0\ (\varepsilon_1),\qquad a_1q_{12}\equiv 0\ (\varepsilon_2),\qquad \equiv 0\ (\varepsilon_1).$$

Da der Teilerkettensatz für unsern Ring gilt, können wir nach dem Noetherschen Zerlegungssatz das Hauptideal (ε_1) in der folgenden Gestalt ausdrücken:

$$(\varepsilon_1)=[\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{Q}_r]_r,$$

wo $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{Q}_r$ Primärdeale sind, zu denen bzw. Primideale $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{P}_r$ gehören.

Nach (2) ist

$$a_1q_{11}\equiv 0\ (\mathfrak{Q}_i)\qquad (i=1, 2, 3, \ldots\ldots, r).$$

Wenn für einen Wert von i $a_1\not\equiv 0\ (\mathfrak{Q}_i)$ wäre, so wäre $q_{11}\equiv 0\ (\mathfrak{P}_i)$.

1) B. L. Van der Waerden: Moderne Algebra II, S. 122.

Ebenso auch $q_{12}\equiv 0\ (\mathfrak{P}_i)$. Daher $q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}\equiv 0\ (\mathfrak{P}_i)$. Dies ist ein Wiederspruch zu der Tatsache, dass Q eine unitäre Matrix ist.

Zunächst ist nach (1)

$$a_1q_{11}p_{22}-a_2q_{21}p_{12}=\varepsilon_1p_{11}p_{22}-\varepsilon_1p_{12}p_{21}=\varepsilon_1\,,$$

denn P ist eine unitäre Matrix.

Dies zeigt, dass das Ideal (a_1, a_2) mit dem Hauptideal (ε_1) übereinstimmt.

Da der Teilerkettensatz in unserem Ring gilt, können wir jedes beliebige Ideal $\mathfrak{A}$ in der folgenden Gestalt ausdrücken:

$$\mathfrak{A}=(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)\,.$$

Durch die vollständige Induktion in Bezug auf die Anzahl der Basiselemente können wir beweisen, dass $\mathfrak{A}$ ein Hauptideal ist. Daher ist unser Ring ein Hauptidealring.

2. Der sogenannte Hauptsatz über die endlichen Abelschen Gruppen lässt sich bekanntlich mit Hilfe der Elementarteilersatz beweisen.[1] Diese Tatsache gilt auch für diejenige Abelsche Gruppe, die von endlich vielen Erzeugenden gebildet ist und einen Hauptidealring als Multiplikationsbereich besitzt.[2]

Wir können umgekehrt *den Elementarteilersatz über die Matrix in einem Hauptidealring von dem Hauptsatz über die Abelsche Gruppe aus ableiten.*[3]

Beweis. Es sei

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ \cdots\cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix in einem Hauptidealring K. Wir denken uns einen Linearformenmodul $\mathfrak{M}$ mit n Basiselementen $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ in K und seinen Untermodul $\mathfrak{N}$, deren Basiselemente $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n$ durch die Relation $(v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)=(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)A$ definiert sind. Es ist nämlich

$$\mathfrak{M}=K(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots\cdots+\lambda_nu_n\,,$$
$$\mathfrak{N}=K(v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots\cdots+\lambda_nv_n\,,$$

1) Frobenius-Stickelberger: Journ. f. Math. **86** (1879).

2) Van der Waerden: Moderne Algebra II, S. 126.

3) Herr Prof. Shoda hat schon dieses Problem in Proc. **6** (1930), 217–219, behandelt. Hier will ich einen neuen Beweis geben.

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ Elemente von K sind. Dann ist der Restklassenmodul $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ isomorph zu einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, die den Hauptidealring K als Multiplikationsbereich besitzt. $\mathfrak{G}$ ist ersichtlich von n Elementen $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ erzeugt, die beim Homomorphismus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{G}$ zu $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$ entsprechen. Nämlich jedes Element von $\mathfrak{G}$ ist von der Gestalt $s = s_1^{\lambda_1}, s_2^{\lambda_2}, \ldots\ldots, s_n^{\lambda_n}$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ Elemente von K sind.

Wenn der Hauptsatz für $\mathfrak{G}$ gilt, so ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von n zyklischen Gruppen, die bzw. von n Elementen $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$ erzeugt sind. Weiter bestehen die folgenden Relationen zwischen den annullierenden Idealen $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), \ldots\ldots, (\varepsilon_n)$:

$$(\varepsilon_2) \equiv 0 \ (\varepsilon_1), \quad (\varepsilon_3) \equiv 0 \ (\varepsilon_2), \quad \ldots\ldots, \quad (\varepsilon_n) \equiv 0 \ (\varepsilon_{n-1}).$$

Also gibt es eine unitäre Matrix P derart, dass

$$(t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n) = (s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n)P.$$

Nun denken wir uns den Linearformenmodul $\mathfrak{M}' = K(u_1', u_2', \ldots\ldots, u_n')$, wo $(u_1', u_2', \ldots\ldots, u_n') = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)P$ ist. Freilich ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'$. Die Elemente, die beim Homomorphismus $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{G}$ zu dem Einheitselement von $\mathfrak{G}$ entsprechen, bilden einen Untermodul $\mathfrak{N}'$ von $\mathfrak{M}'$. Also können wir als die Basiselemente $v_1', v_2', \ldots\ldots, v_n'$ von $\mathfrak{N}'$, wie leicht zu ersehen ist, $\varepsilon_1 u_1', \varepsilon_2 u_2', \ldots\ldots, \varepsilon_n u_n'$ annehmen, nämlich

$$(v_1', v_2', \ldots\ldots, v_n') = (u_1', u_2', \ldots\ldots, u_n') \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Die beide Untermodul $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}'$ sind von denjenigen Elementen gebildet, die beim Homomorphismus $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \sim \mathfrak{G}$ dem Einheitselement von $\mathfrak{G}$ entsprechen. Daher muss $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N}'$ übereinstimmen. Also gilt es eine unitäre Matrix Q in K derart, dass

$$(v_1', v_2', \ldots\ldots, v_n') = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)Q$$

ist. Endlich erhalten wir die Relation

$$(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} = (u_1', u_2', \ldots\ldots, u_n') \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$= (v_1', v_2', \ldots\ldots, v_n') = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n)Q$$

$$= (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)AQ.$$

Daraus folgt

$$P\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix} = AQ\,,$$

oder

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_n \end{pmatrix},$$

wo $\varepsilon_i \equiv 0\ (\varepsilon_{i+1})$ für $i=1, 2, \ldots\ldots, n-1$. Dies ist nichts anderes als der Elementarteilersatz. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Ferner folgt aus diesem Satz der bekannter

Satz. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Matrizen A und B äquivalent sind, besteht in der Gleichheit der Elementarteiler von A und B.