66. *Divisionsalgebren über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper eines unendlichen algebraischen Zahlkörpers.*

Von Mikao MORIYA.

Mathematisches Institut, Hokkaido Kaiserliche Universität, Sapporo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., July 13, 1936.)

Es sei k ein unendlicher algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k. Wir bezeichnen dann mit $\bar{k}$ den derivierten Körper von k in bezug auf die zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertung.[1] Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{k}$ den in $\bar{k}$ enthaltenen maximalen algebraischen Erweiterungskörper über dem p-adischen Zahlkörper $\bar{k}_0$,[2] wobei p die durch $\mathfrak{p}$ teilbare Primzahl bedeutet. Da $\mathfrak{k}$ als der Vereinigungskörper von höchstens abzählbar unendlich vielen algebraischen Erweiterungkörpern endlichen Grades über $\bar{k}_0$ definiert ist, so kann man nach Herbrand als den absoluten Grad von $\mathfrak{k}$ über $\bar{k}_0$ eine Steinitzsche G-Zahl dem Körper $\mathfrak{k}$ zuordnen. Den Körper $\mathfrak{k}$ nenne ich im folgenden den Hilfskörper von $\bar{k}$. Es fragt sich nun, *ob es überhaupt eine Divisionsalgebra über $\bar{k}$*[3] *gibt, deren Index eine gegebene natürliche Zahl ist.*

Für die Untersuchung der obigen Frage will ich zuerst einen Satz[4] vorausschicken:

Satz 1. *Geht der Grad eines endlichen Abelschen Erweiterungskörpers $\bar{K}$ über $\bar{k}$ im unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ auf, so ist jedes Element aus $\bar{k}$ Norm eines Elementes aus $\bar{K}$.*

Bekanntlich ist jede Divisionsalgebra von endlichem Index über $\bar{k}$ als ein direktes Produkt von endlich vielen Divisionsalgebren über $\bar{k}$, deren Indizes alle Primzahlpotenzen sind, darstellbar. Ich beweise nun

Satz 2. *Ist q eine Primzahl, welche im unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ aufgeht, so existieren keine zyklischen Algebren über $\bar{k}$, deren Indizes Potenzen von q sind.*

Beweis. Ist $(\alpha, \bar{Z}, S)$ eine zyklische Algebra vom Grade q^a $(a>0)$ über $\bar{k}$, so ist $\bar{Z}$ ein zyklischer Körper vom Grade q^a über $\bar{k}$. Nach Satz 1 ist aber α Norm eines Elementes aus $\bar{Z}$, ist also wie bekannt

$$(\alpha, \bar{Z}, S) \sim \bar{k}\,.$$

Satz 3. *Es sei q wieder eine Primzahl wie in Satz 2. Dann existieren keine Divisionsalgebren über $\bar{k}$, deren Indizes Potenzen von q sind.*

Beweis. D sei eine Divisionsalgebra vom Index $q^e(>1)$ über $\bar{k}$. Dann existiert zu D ein galoisscher Zerfällungskörper $\bar{K}$ von Grade n über

1) M. Moriya, Theorie der algebraischen Zahlkörper unendlichen Grades, Journ. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., **3** (1935).

2), 4) M. Moriya, Klassenkörpertheorie im Kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper. Diese Arbeit erscheint demnächst im Journ. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. **5**.

3) Unter einer Divisionsalgebra über $\bar{k}$ versteht man eine normale Divisionsalgebra mit $\bar{k}$ als Zentrum.

$\bar{k}$. Bekanntlich ist n durch q^e teilbar. Ist also die Ordnung der galoisschen Gruppe von $\bar{K}$ nach $\bar{k}$ genau durch q^a ($a \geqq e$) teilbar, so existiert nach einem Satz von Sylow eine Untergruppe von der Ordnung q^a und nach dem galoisschen Hauptsatz der dieser Sylowschen Gruppe zugeordnete Teilkörper $\bar{K}_0$ von $\bar{K}$ über $\bar{k}$. Es ist also $[\bar{K}:\bar{K}_0]=q^a$. Zwischen $\bar{K}$ und $\bar{K}_0$ sind bekanntlich folgende Körper eingeschaltet:

$$\bar{K}=\bar{K}_a \supset \bar{K}_{a-1} \supset \cdots\cdots\cdots\cdots \supset \bar{K}_1 \supset \bar{K}_0 .$$

Dabei ist jeder Körper $\bar{K}_i$ über $\bar{K}_{i-1}$ zyklisch und vom Grade q ($i=1, 2, \ldots\ldots, a$). Ist nun $D \times \bar{K}_{i-1}$ von $\bar{K}_1$ zerfällt, so ist $D \times \bar{K}_{i-1}$ über $\bar{K}_{i-1}$ zyklisch darstellbar, d. h. $D \times \bar{K}_{i-1}$ ist ähnlich einer zyklischen Algebra vom Grade q über $\bar{K}_{i-1}$. Da aber der unendliche Bestandteil des absoluten Grades des Hilfskörpers von $\bar{K}_{i-1}$ auch durch q teilbar ist,[1] so kann man den Satz 2 auf diesen Fall anwenden (Der Grundkörper ist aber in diesem Fall $\bar{K}_{i-1}$ statt k!). Es gibt also keine zyklische Algebra vom Index q über $\bar{K}_{i-1}$, d. h. $\bar{K}_0$ ist bereits ein Zerfällungskörper von D. Dies ist aber Widerspruch, weil $[\bar{K}_0:\bar{k}]$ durch den Index von D nicht teilbar ist. Damit ist der Beweis beendet.

Herr O. Schilling hat aber neulich bewiesen,[2] dass zu einer zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ primen natürlichen Zahl n immer eine Divisionsalgebra vom Index n existiert. Mithin schliessen wir:

Es gibt über $\bar{k}$ eine (und sogar mindestens eine) Divisionsalgebra vom Index n, wenn n zum unendlichen Bestandteile des absoluten Grades von $\mathfrak{k}$ prim ist.

---

1) Vgl. Anm. (2).

2) O. Schillig, Zur Klassenkörper über unendlichen perfekten Körpern. Diese Arbeit erscheint demnächst im Journ. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. **5**.