105. *Sur un ensemble universel pour les ensembles boreliens définis sur la famille de tous les ensembles linéaires CA.*

Par Motokiti KONDÔ.

L'Institut Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Dec. 12, 1936.)

Dans sa note,[1] M. W. Sierpiński a donné un exemple d'un ensemble analytique plan universel pour les ensembles linéaires mesurables (B). Comme il se sert du théorème d'unicité sur les ensembles analytiques dans sa méthode, on ne peut pas appliquer sa méthode sur les ensembles boreliens[2] définis sur une famille d'ensembles. Or, en appliquant la théorie des cribles, on peut donner une méthode qui nous permet de construire tels ensembles universels. Ici, nous nous satisfaisons de démontrer le

Théorème. *Il existe un ensemble ACA[3] U plan universel pour les ensembles boreliens définis sur la famille $\mathfrak{A}$ de tous les ensembles linéaires CA.*

Démonstration. Nous définirons d'abord un système de Souslin $\{H_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ d'ensembles A_ρ[4] contenus dans le plan $R(x, y)$, comme il suit: quel que soit le système de Souslin $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ d'ensembles linéaires A_ρ, il existe un nombre réel y_o, tel qu'on ait $H^{(y_o)}_{n_1 n_2 \dots n_k} = E_{n_1 n_2 \dots n_k}$.[5]

Pour les nombres

$$Z_{n_1 n_2 \dots n_k} = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_1+n_2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^{n_1+n_2+\cdots+n_k}},$$

prenons dans l'espace $R(x, y, z)$ l'ensemble

$$H = \sum H_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (Z_{n_1 n_2 \dots n_k}).$$

Puis, nous définirons dans le plan $R(z, t)$ le crible L de façon que les conditions suivantes soient remplies: 1°, le crible L est l'ensemble CA et ne contient que les points tels que les coordonnées Z soient rationnelles, 2°, quel que soit le point t_o de l'axe OT, l'ensemble $L^{(t_o)}$ est bien ordonné le long de la direction négative de l'axe OZ, 3°, quel que soit le nombre ordinal $\alpha (< \Omega)$, il existe au moins un point t_o sur l'axe OT,

1) W. Sierpiński: Sur un ensemble analytique plan, universel pour les ensembles mesurables (B). Fund. Math., **12** (1928), 75–77.

2) Nous entendrons par ensemble borelien défini sur la famille $\mathfrak{A}$ d'ensembles tout ensemble qui peut être obtenu par l'application répétée (indéfiniment) des deux opérations, soustraction de deux ensembles déja définis et addition d'une infinité dénombrable d'ensembles déja définis, à partir des ensembles de la famille $\mathfrak{A}$.

3) On appelle ensemble ACA tout ensemble qui est le noyau du système de Souslin formé d' ensembles CA.

4) On dit ensemble $A\rho$ tout ensemble qui est défini comme la différence des deux ensembles A.

5) Pour un ensemble E de plan $R(x, y)$, désignons par $E^{(x_o)}$ ou $E^{(y_o)}$ l'ensemble de tous les points de E, tels que les coordonnées $x = x_o$ ou $y = y_o$.

tel que l'ensemble $L^{(t_o)}$ soit du type a. Il est evident qu'il existe un tel crible L.

Maintenant, pour les deux cribles $H_o = H \times OT$ et $L_o = OX \times OY \times L$, considérons l'ensemble U de tous les points (x, y, t) tels que l'ensemble $H_o^{(x,y,t)}$ soit bien ordonné le long de la direction négative de l'axe OZ et que le type de l'ensemble $H_o^{(x,y,t)}$ ne soit pas supérieur au celui de l'ensemble $L_o^{(x,y,t)}$.

Puisque les deux cribles H_o et L_o sont la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles A_ρ contenus dans les plans parallèles au plan $Z=0$, l'ensemble U est de la classe ACA, comme M. N. Lusin a montré dans la démonstration de la séparabilité (CA) des ensembles A.[1] Puis, pour deux points y_o et t_o respectivement contenus dans les axes OY et OT, considérons l'ensemble $U^{(y_o, t_o)}$. Comme $U^{(y_o, t_o)}$ est l'ensemble de tous les points (x, y_o, t_o) tels que le type de $H_o^{(x, y_o, t_o)}$ ne soit pas supérieur au type de $L^{(t_o)}$, on sait que $U^{(y_o, t_o)}$ est l'ensemble borelien défini sur la famille $\mathfrak{A}$, ce qui se constate de la même façon que nous démontrons la mesurabilité (B) des constituantes d'ensembles CA.[2]

Maintenant, pour démontrer le théorème, il suffit de voir qu'il existe les deux points y_o et t_o respectivement contenus dans les axes OY et OT, tels qu'on ait $U^{(y_o, t_o)} = N$, quel que soit l'ensemble borelien N défini sur la famille $\mathfrak{A}$.

Pour un système monotone de Souslin $\{E_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ d'ensembles linéaires A_ρ, prenons, dans le plan $R(x, z)$, l'ensemble

$$E = \sum E_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (Z_{n_1 n_2 \dots n_k}),$$

et appelons que tout crible de cette forme est *normal*. De plus, désignons par $\Gamma(E)$ l'ensemble criblé au moyen du crible E, c.-à-d., l'ensemble de tous les points x de l'axe OX tel que $E^{(x)}$ ne soit pas bien ordonné le long de la direction négative de l'axe OZ.

Pour un point x du complémentaire $C\Gamma(E)$ de l'ensemble $\Gamma(E)$ par rapport à l'axe OX, désignons par $B(x)$ le type de l'ensemble bien ordonné $E^{(x)}$, et l'appelons l'ordre du crible E au point x. Lorsqu'il existe un nombre ordinal $a (< \Omega)$, tel qu'on ait $B(x) < a$, quel que soit le point x de l'ensemble $C\Gamma(E)$, nous dirons que le crible normal E est du type borné. Il est évident que l'ensemble criblé $\Gamma(E)$ au moyen du crible normal E du type borné est l'ensemble borelien défini sur la famille $\mathfrak{A}$. Mais, on peut aussi démontrer que tout ensemble borelien défini sur la famille $\mathfrak{A}$ peut être considéré comme l'ensemble criblé au moyen du crible normal du type borné. Pour cela, définirons l'indice $R(x)$ du crible E au point x. Pour un point x de l'ensemble $C\Gamma(E)$, considérons l'ensemble $\mathfrak{F}(x)$ d'intervalles de Baire $(n_1, n_2, \dots, n_k)$, tels qu'on ait $x \in E_{n_1 n_2 \dots n_k}$, et d'abord, définirons l'indice $\nu(I)$ de l'intervalle de Baire I contenu dans $\mathfrak{F}(x)$. Si l'intervalle I ne contient aucun intervalle de $\mathfrak{F}(x)$, posons $\nu(I) = 1$, et si a est le plus petit des nombres ordinaux

1) N. Lusin: Leçons sur les ensembles analytiques, Paris 1930, p. 213. K. Kunugui: La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits. Journal of the Fac. of Sc., Hokkaido Imp. Univ. (1) **4**, p. 1–40.

2) N. Lusin: loc. cit., p. 188.

($<\Omega$) supérieures aux indices de tous les intervalle de $\mathfrak{F}(x)$ contenues dans l'intervalle I, posons $\nu(I)=\alpha$. Si le point x n'appartient à aucun ensemble $E_{n_1 n_2 \dots n_k}$, posons $R(x)=0$, et sinon, nous désignons par $R(x)$ la borne supérieurs de l'ensemble formé des indices de tous les intervalles de Baire contenus dans $\mathfrak{F}(x)$.

Maintenant, on peut établir une inégalité entre l'indice et l'ordre du crible E au point x,

$$(*) \qquad B(x) \leqq \omega^{R(x)} .$$

Si l'on a $R(x)=0$, nous avons aussi $B(x)=0$, et par suite l'inégalité ($*$). Pour un nombre ordinal $\alpha(<\Omega)$, nous supposons que l'inégalité ($*$) ait lieu, si l'on ait $R(x)<\alpha$. Et, considérons le cas où $R(x)=\alpha$. Supposons d'abord qu'on ait $\alpha=\alpha_0+1$. Pour un nombre naturel n, prenons un système monotone de Souslin $\{E^n_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ tel qu'on ait $E^n_{n_1 n_2 \dots n_k} = E_{n n_1 n_2 \dots n_k}$. On voit alors sans peine que l'indice $R_n(x)$ (au point x) du crible normal E^n définie par le système de Souslin $\{E^n_{n_1 n_2 \dots n_k}\}$ n'est pas supérieur à α. Par suite, selon la supposition, pour l'ordre $B_n(x)$ du crible normal E^n au point x, nous avons $B_n(x) \leqq \omega^{R_n(x)} \leqq \omega^{\alpha_0}$. Or, puisque l'ordre $B_n(x)$ est le type de l'ensemble $E^{n(x)}$ et par suite, de l'ensemble $\overset{*}{E}{}^{n(x)}$, où

$$\overset{*}{E}{}^n = \sum E_{n_1 n_2 \dots n_k} \times (Z_{n_1 n_2 \dots n_k}) ,$$

nous avons $B(x) \leqq \omega^{\alpha_0}\omega = \omega^{R(x)}$, le système étant monotone. Lorsque α est le nombre ordinal de la deuxième espèce, on a l'inégalité ($*$) de même que nous avons fait plus haut.

Mais, comme la famille des ensemble A_ρ est multiplicative, tout ensemble borelien F défini sur la famille $\mathfrak{A}$ peut être défini, d'aprés les inégalités[1] de M. W. Sierpiński sur les indices apparents, comme l'ensemble criblé au moyen du crible normal ayant les indices bornés, c.-à-d., qu'il existe un nombre ordinal $\alpha(<\Omega)$ tel qu'on ait $R(x)<\alpha$ pour tous les points x du complémentaire de F. Par suite, selon l'inégalité ($*$), il est évident que ce crible est du type borné.

Maintenant, pour le complémentaire CN de l'ensemble N par rapport à l'axe OX, prenons un crible normal E du type borné tel qu'on ait $\Gamma(E)=CN$. Soit α un nombre ordinal de la deuxième classe tel que l'ordre $B(x)$ du crible E est inférieur à α, quel que soit le point x de N. Selon les definitions H et L, il existe les deux points y_o et t_o respectivement contenus dans les axes OY et OT tels qu'on ait $H^{(y_o)}=E$ et que le type de l'ensemble $L^{(t_o)}=\alpha$. Il est évident alors que $U^{(y_o, t_o)}=N$.

C. Q. F. D.

1) N. Lusin: Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques. Annali R. Soc. Norm. Sup. di Pisa, (2) **2**, 269–282.