17. *Bemerkungen über die Fundamentalgruppe eines Kompaktums.*

Von Atuo KOMATU.
Mathematical Institute, Osaka Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1937.)

Die Bettische Gruppe eines Kompaktums wird in mehreren Weisen definiert. Die Gruppe von L. Vietoris[1] ist isomorph der von L. Pontrjagin,[2] wie von Kolmogoroff,[3] Freudenthal[4] und Chevalley[5] bemerkt wurde.

In dieser Note wird nun die Fundamentalgruppe eines Kompaktums als die Limesgruppe[6] einer inversen Homomorphismenfolgen von L. Pontrjagin[2] definiert, und dann wird bewiesen, dass sich dieselbe Gruppe auch durch Vollwegen von Vietoris definieren lässt.

R sei ein zusammenhängendes Kompaktum, und

$$N_1,\ N_2,\ \ldots\ldots,\ N_n,\ \ldots\ldots \tag{1}$$

sei eine Nervenfolge des R im Alexandroffschen Sinne. $\varphi^n_m (n \geqq m)$ bezeichne die simpliziale Abbildung des N_n auf das N_m. Die einen Punkt x_0 des R definierende Simplexenfolge sei durch

$$x_0 = (T_1,\ T_2,\ \ldots\ldots,\ T_n,\ \ldots\ldots)$$

$$\varphi^n_m(T_n) = T_m$$

gegeben.

$\mathfrak{F}_i$ sei die Fundamentalgruppe des N_i bezüglich eines Eckpunktes x_i des T_i, welcher der Bildpunkt von $x_j (j > i)$ durch die Abbildung φ^j_i ist. Die Gruppe $\mathfrak{F}_n$ wird durch φ^n_m in die Gruppe $\mathfrak{F}_m$ homomorph abgebildet. Wir definieren die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ des R durch die Limesgruppe dieser inversen Homomorphismenfolge.

Eine andere Definition ist folgendes:

w sei ein abstrakter Weg, dessen Eckpunkte auf dem R liegen.

$$W = (w_1^{\delta_1},\ w_2^{\delta_2},\ \ldots\ldots,\ w_n^{\delta_n},\ \ldots\ldots) \tag{2}$$

sei ein Vollweg, wo $w_i^{\delta_i}$ ein abstrakter geschlossener im x_0 beginnenden

---

1) Vietoris, L.: Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. Math. Ann. **97** (1927).

2) Pontrjagin, L.: Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. Math. Ann. **105** (1931).

3) A. Kolmogoroff: Les groupes de Betti des espaces localement bicompacts. C. R. t. **202**.

A. Kolmogoroff: Les groupes de Betti des espaces métriques. C. R. t. **202**.

4) H. Freudenthal: Die R_n-adische Entwicklung von Räumen und Gruppen. Proc. Acad. Amsterdam **38** (1935).

5) Chevalley, C.: Sur la définition des groupes de Betti des ensembles fermés. C. R. **200** (1935).

6) Freudenthal, H.: Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. Comp. Math. **2** (1935).

δ_i-Weg ($\delta_i \geqq \delta_{i+1}$, $\lim \delta_i = 0$) ist und $w_i^{\delta_i}$ zum $w_{i+1}^{\delta_{i+1}}$ η_i-homotop[1] ($\eta_i \geqq \eta_{i+1}$, $\eta_i \geqq \delta_i$, $\lim \eta_i = 0$) ist. Zwei Vollwege W und W' heissen homotop zueinander, wenn der Weg $w_i^{\delta_i}$ für sämtliche i zum Weg $w'^{\delta'_i}_i$ ε_i-homotop ($\lim \varepsilon_i = 0$) ist.

Das Produkt WW' ist durch den Vollweg $\left((w_1 w'_1)^{\delta_1}, \ldots\ldots, (w_n w'_n)^{\delta_n}, \ldots\ldots\right)$ gegeben, wenn $\delta_i \geqq \delta'_i$ ist. Durch diese Festsetzungen bilden wie üblich die Homotopieklassen der Vollwege eine Gruppe $\mathfrak{G}$.

Satz. Die Gruppe $\mathfrak{F}$ ist isomorph der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Lemma von Borsuk.[2]

Für jeden Vollweg $W = (w_1^{\delta_1}, \ldots\ldots, w_n^{\delta_n}, \ldots\ldots)$ und für beliebige Zahlenfolge $\varepsilon_i (\varepsilon_i \geqq \varepsilon_{i+1}$, $\lim \varepsilon_i = 0)$ gibt es einen zum W homotopen Vollweg W', dessen Folge

$$(3) \qquad (w_{i_1}^{\varepsilon_1}, \ldots\ldots, w_{i_n}^{\varepsilon_n}, \ldots\ldots)$$

eine Teilfolge von W ist, wo $w_{i_n}^{\varepsilon_n}$ zum $w_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}$ ε_n-homotop ist.

Beweis des Satzes.

1) *$\mathfrak{G}$ wird in die Gruppe $\mathfrak{F}$ homomorph abgebildet.* Der Beweis wird wie folgt geführt. Durch eine passende Wahl der Zahlen ε_i in (3) kann man erreichen, dass ε_m kleiner als die Lebesguesche Zahl σ_m der den Nerv N_m definierenden Überdeckung $\mathfrak{P}_m$ von R ist.

Jedem Eckpunkt y eines 2-dimensionalen Komplexes $Q_{i_n}^{\varepsilon_n}$, der die Homotopie des $w_{i_n}^{\varepsilon_n}$ zum $w_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}}$ definiert, ordnen wir so einen Eckpunkt x vom N_n zu, dass das zu x entsprechende Element der Überdeckung $\mathfrak{P}_n$ den Punkt y enthält. Nach der Annahme über ε_n ist diese Zuordnung f_n eine simpliziale Abbildung des $Q_{i_n}^{\varepsilon_n}$ in N_n. Die Wege $f_n(w_{i_n}^{\varepsilon_n})$ und $f_n(w_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}})$ gehören daher einem und demselben Element von $\mathfrak{F}_n$ an. Auch die Wege $f_n(w_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}})$ und $\varphi_n^{n+1}\left(f_{n+1}(w_{i_{n+1}}^{\varepsilon_{n+1}})\right)$ sind zueinander homotop.

Daher stellt die Folge

$$\left(f_1(w_{i_1}^{\varepsilon_1}), \ldots\ldots, f_n(w_{i_n}^{\varepsilon_n}), \ldots\ldots\right)$$

ein Element a von $\mathfrak{F}$ dar.

Auf diese Weise wird die Gruppe $\mathfrak{G}$ offenbar homomorph in die Gruppe $\mathfrak{F}$ abgebildet. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit f.

2) *Durch die Abbildung f wird $\mathfrak{G}$ auf die volle Gruppe $\mathfrak{F}$ abgebildet.*

Sei nämlich $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots)$ ein Element von $\mathfrak{F}$. Und $(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$ sei eine Folge von Wegen z_i, welche je in N_i die Elemente a_i von F_i (bezüglich des x_i) repräsentieren.

Mit der simplizialen Abbildung $\varphi_{n-1}^n (N_n) = N_{n-1}$ ist der Weg z_n auf N_n

1) Hurewicz, W.: Homotopie, Homologie und lokaler Zusammenhang. Fund. Math. **25**.

2) Borsuk, K.: Un théorème sur les groupes de Betti des ensembles localement connexes en toutes les dimensions $\leqq n$. (Fund. Math. **24**.) Dort ist ein analoges Lemma für die Vollzyklen bewiesen. Auf analoge Weise kann man leicht dieses Lemma beweisen.

in den zum z_{n-1} homotopen $\varphi^n_{n-1}(z_n)$ auf N_{n-1} abgebildet. Wenn die Überdeckung $\mathfrak{P}_n$ eine $\frac{1}{2}\zeta_n$-Überdeckung ist, so ist z_n ein ζ_n-Weg. Dann sind die Wege z_n, $\varphi^n_{n-1}(z_n)$ und z_{n-1} zueinander ζ_{n-1}-homotop. Dann stellt also die Folge $(\overset{\zeta_1}{z_1^1}, \overset{\zeta_2}{z_2^2}, \ldots\ldots, \overset{\zeta_n}{z_n^n}, \ldots\ldots)$ einen Vollweg, d. i. ein Element von $\mathfrak{G}$ dar. Und dieser Vollweg geht bei der obigen Zuordnung f in das Element a von F über.

3) *Die Abbildung f ist isomorph.*

Denn ein Vollweg $W=(\overset{\varepsilon_1}{w_1^1}, \overset{\varepsilon_2}{w_2^2}, \ldots\ldots, \overset{\varepsilon_n}{w_n^n}, \ldots\ldots)$, der bei 1) in das Einselement von F übergeführt wird, geht bei f in einen Vollweg $\left(f_1(\overset{\varepsilon_1}{w_1^1}), f_2(\overset{\varepsilon_2}{w_2^2}), \ldots\ldots, f_n(\overset{\varepsilon_n}{w_n^n}), \ldots\ldots\right)$ über. Nach 2) ist der Weg $f_n(\overset{\varepsilon_n}{w_n^n})$ zu Null ζ_n-homotop, und auch zum Weg $\overset{\varepsilon_n}{w_n^n}$ ζ_n-homotop. Daher stellt der Vollweg W das Einselement von $\mathfrak{G}$ dar.

Zusatz 1. Zwei Fundamentalgruppen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$, die durch zwei beliebige Überdeckungsfolgen

$$(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{P}_n, \ldots\ldots)$$

und

$$(\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2, \ldots\ldots, \mathfrak{P}'_n, \ldots\ldots)$$

im Alexandroffschen Sinne definiert werden, sind zueinander isomorph.

Zusatz 2. Wenn ein Kompaktum R lokal zusammenhängend bis zur 1-ten[1] Ordnung ist, sind die Fundamentalgruppen $\mathfrak{F}_i$ und $\mathfrak{F}_j$ für i, $j \geqq i_0$ bei passendem i_0 zueinander isomorph.

---

1) Hurewicz, W.: a. a. O.