93. *Une considération sur le problème de Dirichlet.*

Par Masao INOUYE.

L'Institut Mathématique, L'Université Impériale d'Osaka.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1937.)

1. En envisageant la solution généralisée du problème de Dirichlet comme une fonctionelle de la distribution continue, sa continuité est bien connue. Dans cette section nous allons rechercher le problème de sa continuité en envisageant comme une fonctionelle du domaine.

Soit Ω un domaine borné[1] dans le plan z. Considérons une suite $\{\Omega_n\}$ de domaines uniformément bornés convergeant vers Ω au sens de M. Carathéodory[2] (par rapport à un point intérieur à Ω). Nous pouvons alors attacher à chaque fonction réelle continue $F(z)$, définie dans le plan entier, une suite $\{U(z, F, \Omega_n)\}$ de fonctions harmoniques, où la fonction $U(z, F, \Omega_n)$ est la solution généralisée du problème de Dirichlet pour Ω_n et avec la distribution F. Notre but est de trouver une condition pour Ω et $\{\Omega_n\}$ dans laquelle $\lim\limits_{n\to\infty} U(z, F, \Omega_n)=U(z, F, \Omega)$ (uniformément) est valable. Pour simplifier l'écriture, nous dirons que $\{\Omega_n\}$ jouit de la propriété W (par rapport à Ω), lorsque $\lim\limits_{n\to\infty} U(z, F, \Omega_n)=U(z, F, \Omega)$ est vrai pour toute fonction continue F.

Le théorème général de M. Wiener nous conduira directement au théorème suivant:

Théorème 1. *Supposons que tout Ω_n soit contenu dans Ω. Alors, la suite $\{\Omega_n\}$ jouit de la propriété W.*[3]

Mais cette condition est trop restrictive pour notre objet. Recherchons une autre condition convenable à notre problème. Pour cela, considérons la condition (C); nous dirons que $\{\Omega_n\}$ satisfait à la condition (C) en un point frontière p de Ω lorsqu'il existe une suite $\{p_n\}$ de points frontières p_n de Ω_n tendant vers p tels que l'on ait $\rho(E_{\Omega_n, p_n}) \geqq d_p > 0$[4] pour tout n suffisamment grand, où E_{Ω_n, p_n} désigne la projection de Ω_n ayant p_n comme centre, c'est-à-dire que l'ensemble de points de l'axe positif réel (dans le plans ξ) que parcourt le module du point $\xi=z-p_n$ lorsque z parcourt l'ensemble de points du petit cercle renfermant Ω_n, n'appartenant pas à Ω_n, et $\rho(E_{\Omega_n, p_n})$ désigne la longueur du segment de E_{Ω_n, p_n} aboutissant à l'origine (dans le plan ξ), et d_p est une constante ne dépendant que de p. A présent, nous démontrons le théorème suivant:

---

1) Cette hypothèse n'est pas essentielle, mais, dans cette Note, nous en supposons et d'ailleurs que chaque domaine considéré soit univalent.

2) C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, Math. Ann. **72** (1912), p. 125.

3) Ce théorème est encore vrai dans l'espace.

4) Cette condition montre que p_n est un point frontière régulier (pour le problème de Dirichlet). Voir, A. Beurling: Etude sur un problème de majoration (Upsal, 1933), p. 66.

Théorème 2. *Si* $\{\Omega_n\}$ *satisfait à la condition* (*C*) *en chaque point frontière régulier* (*pour le problème de Dirichlet*) *de* Ω, *la suite jouit de la propriété* W.

En effet, $\{U(z, F, \Omega_n)\}$ étant une suite de fonctions harmoniques uniformément bornées, donc de toute suite prélevée, on peut extraire une suite partielle $\{U(z, F, \Omega_{n'})\}$ de fonctions harmoniques $U(z, F, \Omega_{n'})$ convergeant uniformément vers une fonction harmonique bornée dans Ω (au sens de M. Montel), soit $U(z)$. Pour la démonstration, il suffit de prouver que $U(z)$ est équivalente à $U(z, F, \Omega)$. Etudions, à cet effet, son allure sur la frontière.[1] Soit p un point frontière régulier de Ω et soit $\varepsilon > 0$ donné à l'avance, déterminons un nombre $\delta > 0$ tel que l'on ait

$$|F(z)-F(z')| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad |z-p| < \delta, \qquad |z'-p| < \frac{\delta}{2}.$$

Formons un cercle C renfermant complètement Ω et $\{\Omega_n\}$ dans son intérieur. On peut alors déterminer un nombre fini M tel que

$$\underset{|z'-p|<\frac{\delta}{2},\ |z-p|\geqq\delta,\ z\in C}{\text{Bor. sup.}} \left| \frac{F(z)-F(z')}{z-z'} \right| \leqq M.$$

Cela étant, on a pour $|z'-p| < \dfrac{\delta}{2}$,

$$F(z')-M|z-z'|-\varepsilon < F(z) < F(z')+M|z-z'|+\varepsilon, \qquad z\in C.$$

Désignons par $V(z; p_{n'})$ la solution généralisée du problème de Dirichlet pour $\Omega_{n'}$ et avec la distribution frontière $|z-p_{n'}|$. En prenant $p_{n'}$ (dans la condition (C)) au lieu de z' et en notant que $|z-p_{n'}| < V(z; p_{n'})$ pour $z\in\Omega_{n'}$, on obtient pour tout n' suffisamment grand,

$$F(p_{n'})-MV(z; p_{n'})-\varepsilon < F(z) < F(p_{n'})+MV(z; p_{n'})+\varepsilon.$$

Par conséquent

$$F(p_{n'})-MV(z; p_{n'})-\varepsilon < U(z, F, \Omega_{n'}) < F(p_{n'})+MV(z; p_{n'})+\varepsilon,$$
$$z\in\Omega_{n'}.$$

Dans le plan ξ, formons un cercle E suffisamment grand pour que E contienne toute projection $E_{\Omega_{n'}, p_{n'}}$ et désignons par $V(\xi)$ la fonction harmonique dans D, domaine formé par E découpé le long du segment: $0\leqq\xi\leqq d_p$, qui prend la valeur $|\xi|$ sur sa frontière. Ceci posé, on trouve l'inégalité importante d'après le théorème de M. Beurling,[2]

$$V(z; p_{n'}) \leqq V(-|z-p_{n'}|).$$

Donc, on a

$$F(p_{n'})-MV(-|z-p_{n'}|)-\varepsilon < U(z, F, \Omega_{n'}) < F(p_{n'})$$
$$+MV(-|z-p_{n'}|)+\varepsilon.$$

---

1) La démonstration ci-dessous est de modifier un peu celle de M. Kellogg.

2) A. Beurling, loc. cit. p. 45. On peut appliquer ce théorème en modifiant un peu.

Chaque point intérieur à Ω étant contenu dans $\Omega_{n'}$ dès que n' est assez grand, on obtient à la limite,

$$F(p)-MV(-|z-p|)-\varepsilon < U(z) < F(p)+MV(-|z-p|)+\varepsilon .$$

Comme $\lim\limits_{z\to p} V(-|z-p|)=0$ et ε étant arbitrairement petit, il en résulte que

$$\lim_{z\to p} U(z)=F(p).$$

La fonction harmonique $U(z)$ étant bornée et égale à $F(z)$ en chaque point frontière régulier de Ω, $U(z)$ est équivalente à $U(z, F, \Omega)$. Nous avons enfin

$$\lim_{n\to\infty} U(z, F, \Omega_n)=U(z, F, \Omega). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous aurons ainsi le théorème suivant:

Théorème 3. *Soient Ω et Ω_n $(n=1, 2, \ldots\ldots)$ des domaines dont les ordres de connexion sont bornés. Alors, la suite $\{\Omega_n\}$ jouit de la propriété W.*

Pour la démonstration, il suffit de montrer que l'on peut choisir, pour toute suite prélevée $\{\Omega_{n'}\}$ et tout point frontière régulier p de Ω, une suite partielle $\{\Omega_{n''}\}$ satisfaisant à la condition (C) en p. En effet, on peut déterminer un nombre $\lambda > 0$ tel que l'on ait $\rho(E_{\Omega, p}) > \lambda$, puisque Ω est de connexion finie. Ceci posé, il existe une suite $\{p_{n'}\}$ de points frontières (réguliers) $p_{n'}$ de $\Omega_{n'}$ tels que l'on ait $\rho(E_{\Omega_{n'}, p_{n'}}) > \frac{\lambda}{4}$ pour tout n' suffisamment grand. Si l'on peut choisir $\{p_{n'}\}$ de façon que $\lim\limits_{n'\to\infty} p_{n'}=p$, notre proposition est manifeste. Supposons le contraire. Il existe alors une suite partielle $\{\Omega_{n''}\}$ et un nombre $\lambda_1 > 0$ inférieur à $\frac{\lambda}{2}$ tels que l'on ait $|p_{n''}-p| > \lambda_1$ pour tout $p_{n''}$ de sorte que $\rho(E_{\Omega_{n''}, p_{n''}}) > \frac{\lambda}{4}$ et tout n''. Or, pour tout n'' suffisamment grand, $\Omega_{n''}$ a au moins un point frontière $q^{(1)}_{n''}$ tel que $|q^{(1)}_{n''}-p| > \frac{3\lambda}{4}$, et aussi au moins un point frontière $q^{(2)}_{n''}$ tel que $\lambda_1 > |q^{(2)}_{n''}-p| > \frac{3\lambda_1}{4}$, où $q^{(1)}_{n''}$ et $q^{(2)}_{n''}$ ne sont pas joignés par un continu frontière de $\Omega_{n''}$. Répétons ce procédé pour le cercle $|z-p| < \lambda_1$ et la suite $\{\Omega_{n''}\}$: si l'on peut choisir une suite $\{p_{n''}\}$ de points frontières $p_{n''}$ de $\Omega_{n''}$ tendant vers p tels que l'on ait $\rho(E_{\Omega_{n''}, p_{n''}}) > \frac{\lambda_1}{4}$ pour tout n'' suffisamment grand, c'est cette suite que l'on est à rechercher. Supposant le contraire, il existe une suite partielle $\{\Omega_{n'''}\}$ et un nombre $\lambda_2 > 0$ inférieur à $\frac{\lambda_1}{2}$ tels que l'on ait $|p_{n'''}-p| > \lambda_2$ pour tout $p_{n'''}$ de sorte que $\rho(E_{\Omega_{n'''}, p_{n'''}}) > \frac{\lambda_1}{4}$ et tout n'''. Or, pour tout n''' suffisamment grand, $\Omega_{n'''}$ a au moins un point frontière $q^{(2)}_{n'''}$ tel que $\lambda_1 > |q^{(2)}_{n'''} - p| > \frac{3\lambda_1}{4}$ et aussi au moins un point frontière $q^{(3)}_{n'''}$ tel que $\lambda_2 > |q^{(3)}_{n'''} - p| > \frac{3\lambda_2}{4}$, où $q^{(2)}_{n'''}$ et $q^{(2)}_{n'''}$ ne sont pas joignés par un continu frontière de $\Omega_{n'''}$. Par conséquent, les continus frontières contenant respectivement $q^{(1)}_{n'''}$, $q^{(2)}_{n'''}$ et $q^{(3)}_{n'''}$ sont séparés. Si l'on désaffirme notre proposition, nous pouvons répéter ce processus une infinité de fois. Nous aboutissons donc à une contradiction, car les ordres de connexion des domaines Ω_n sont bornés. C. Q. F. D.

En envisageant $U(z, F, \Omega)$ comme une fonctionelle de Ω, sa continuité est établie dans la circonférence ci-dessus: *Supposons que les ordres de connexion des domaines considérés soient bornés. Alors, la solution généralisée du problème de Dirichlet est une fonctionelle continue du domaine* (*au sens considéré ci-dessus*).

D'ailleurs, en entendant la convergence de domaines comme suit: tout point intérieur (ou extérieur) à Ω est, dès que n est assez grand, intérieur (ou extérieur) à Ω_n, nous pouvons énoncer le

Théorème 4. *Soit Ω un domaine limité par un nombre fini de courbes jordaniennes simples et fermées. Alors, la suite $\{\Omega_n\}$ jouit de la propriété W.*

Remarque. Dans cette section nous avons considéré les suites de domaines non nécessairement reguliers. Dans ce cas, une certaine condition est nécessaire pour que la suite jouisse de la propriété W. Mais encore le problème si *une suite $\{\Omega_n\}$ de domaines réguliers* (*convergeant vers Ω*) *jouit de la propriété W*, est ouvert.[1]

2. Dans cette section nous allons donner une propriéte géométrique de la frontière qui entraîne la régularité. Nous démontrons d'abord le lemme suivant:

Lemme. *Désignons par D_r le cercle $|z| < 1$ fendu suivant le segment l_r: $0 \leqq z \leqq r < 1$, et par $\omega(z; D_r)$ la fonction harmonique dans D_r qui prend 1 sur $|z| = 1$ et 0 sur l_r. Soit $\varphi(z)$ une fonction complexe définie dans $|z| < 1$ telle que l'on ait $|\varphi(z)| < 1$ et $\lim\limits_{z\to 0} \left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| < \infty$. On a alors*

$$\lim_{z\to 0} \omega\big(\varphi(z); D_{|z|}\big) = 0 .$$

Démonstration. Désignons par D^r le cercle $|z| < \frac{1}{r}$ fendu suivant le segment $l_1: 0 \leqq z \leqq 1$, et par $\omega(z; D^r)$ la fonction harmonique dans D^r qui prend 1 sur $|z| = \frac{1}{r}$ et 0 sur l_1. On a alors

$$\omega(z; D_r) = \omega\Big(\frac{z}{r}; D^r\Big).$$

1) M. Keldych et M. Lavrentieff ont exposé une réponce négative (Théorème III) dans le cas de l'espace, C. R. de l'Ac. des Sc. Paris **204** (1937). Mais il est évident que leur résultat n'est pas vrai dans le cas du plan d'après le théorème 3 (ou 4) dans cette Note.

Donc $$\omega\left(\varphi(z);\, D_{|z|}\right) = \omega\left(\frac{\varphi(z)}{|z|};\, D^{|z|}\right),$$

d'où l'on conclut aisément, en tenant compte de l'hypothèse, que

$$\lim_{z\to 0} \omega\left(\varphi(z);\, D_{|z|}\right) = \lim_{z\to 0} \omega\left(\frac{\varphi(z)}{|z|};\, D^{|z|}\right) = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En employant ce lemme, nous prouvons le théorème suivant:

Théorème 5. *Pour qu'un point frontière p de Ω soit régulier, il suffit qu'il existe une suite $\{p_n\}$ de points frontières (réguliers) p_n de Ω tendant vers p tels que l'on ait $\rho(E_{\Omega,\, p_n}) > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|p_n - p|}{\rho(E_{\Omega,\, p_n})} < \infty$.*

Démonstration. Soit $F(z)$ une fonction réelle continue définie sur la frontière de Ω. Il nous suffit de prouver que $\lim\limits_{z\to p} U(z, F, \Omega) = F(p)$. En posant $\Omega_n = \Omega$ dans la démonstration du théorème 2, on a

$$F(p_n) - MV(z;\, p_n) - \varepsilon < U(z, F, \Omega) < F(p_n) + MV(z;\, p_n) + \varepsilon, \qquad z \in \Omega.$$

Supposons $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(E_{\Omega,\, p_n}) = 0$. Dans le plan ξ, formons un cercle E suffisamment grand pour que E contienne toute projection $E_{\Omega,\, p_n}$ et désignons par D_n le domaine formé par E découpé le long du segment l_n: $0 \leqq \xi \leqq \rho(E_{\Omega,\, p_n})$, et par $v_n(\xi)$ la fonction harmonique dans D_n qui prend la valeur $|\xi|$ sur sa frontière. On a alors l'inégalité suivante:

$$V(z;\, p_n) \leqq v_n(-|z - p_n|).$$

Par conséquent, on a

$$F(p_n) - Mv_n(-|z-p_n|) - \varepsilon < U(z, F, \Omega) < F(p_n) + Mv_n(-|z-p_n|) + \varepsilon.$$

En désignant par $\omega_n(\xi)$ la fonction harmonique dans D_n qui prend la valeur R sur $|\xi| = R$, circonférence de E, et 0 sur l_n, on voit que

$$\omega_n(\xi) + \rho(E_{\Omega,\, p_n}) > v_n(\xi) > 0.$$

Donc, on peut fixer un point frontière p_n de sorte que

$$1°.\quad |F(p_n) - F(p)| < \varepsilon;$$

$$2°.\quad v_n(-|p_n - p|) < \frac{\varepsilon}{M},$$

ce qui est possible par hypothèse et d'après le lemme. Alors on peut associer à p_n fixé un nombre $\eta > 0$ tel que l'on ait pour $|\xi| < \eta$,

$$v_n(-|p_n - p| + \xi) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Ceci étant, on a pour tout $z \in \Omega$ tel que $|z - p| < \eta$,

$$F(p) - 3\varepsilon < U(z, F, \Omega) < F(p) + 3\varepsilon.$$

Il en résulte que

$$\lim_{z \to p} U(z, F, \Omega) = F(p) ,$$

ce qui met en évidence notre proposition. Si $\lim_{n \to \infty} \rho(E_{\Omega, p_n}) > 0$, on obtient de la même façon que dans la démonstration du théorème 2,

$$\lim_{z \to p} U(z, F, \Omega) = F(p) .$$

C. Q. F. D.