92. Sur l'équation différentielle $y''=f(x, y, y')$.

Par Tokui SATÔ.
Institut de mathématiques, l'université de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Nov. 12, 1937.)

1. Dans cette Note nous considérons l'équation différentielle

$$y''=f(x, y, y'). \tag{1}$$

Soient $\underline{y}(x)$ et $\overline{y}(x)$ deux solutions de (1) qui sont continues dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$ et telles que

$$\underline{y}(0)=\overline{y}(0)=1, \quad \underline{y}(x)<\overline{y}(x), \quad 0<\overline{y}(x),$$

les inégalités ayant lieu pour $0<x\leqq a$. Supposons que le second membre de l'équation (1) soit une fonction qui jouissent des propriétés suivantes:

1°. elle est positive et continue dans le domaine:

$$0\leqq x\leqq a, \quad \underline{y}(x)\leqq y\leqq \overline{y}(x), \quad |y'|<+\infty;$$

2°. elle satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à y et y';

3°. $f(x, y_1, y_1')<f(x, y_2, y_2')$ pour $y_1<y_2$, $y_1'\leqq y_2'$.

Nous nous bornons au cas où toute solution $y(x)$ de l'équation différentielle (1) telle que

$$y(0)=1 \tag{2}$$

peut se prolonger[1] à un point d'abcisse a en restant dans le domaine:

$$\text{(D)} \qquad 0\leqq x\leqq a, \quad \underline{y}(x)\leqq y\leqq \overline{y}(x),$$

et ne considérons désormais que des solutions assujetties à la condition (2).

Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions de l'équation différentielle (1) qui satisfont à la condition (2). Montrons que *si*

$$y_1'(0)<y_2'(0), \tag{3}$$

on a

$$y_1(x)<y_2(x), \quad y_1'(x)<y_2'(x)$$

dans tout l'intervalle $0<x\leqq a$.

---

1) Pour cela, il suffit que $f(x, y, y')$ satisfasse à la condition de M. Nagumo:

$$|f(x, y, y')|\leqq \psi(y)\varphi(|y'|)$$

$$\int_0^\infty \frac{u}{\varphi(u)}du=+\infty, \qquad \int_\alpha^\beta \psi(u)du<+\infty,$$

où

$$\alpha=\min_{0\leq x\leq a}\{\underline{y}(x)\}, \qquad \beta=\max_{0\leq x\leq a}\{\overline{y}(x)\}.$$

(M. Nagumo. Proc. of the phys.-math. Soc. of Japan. 3. Ser. Vol. 19. 1937.)

L'inégalité (3) entraîne, en effet, l'inégalité

$$(4) \qquad y_1'(x) < y_2'(x)$$

pour des valeurs assez petites de x. Soit $0 \leqq x < \xi$ le plus grand intervalle où (4) soit valable. Nous aurons les inégalités $y_1'(\xi) \leqq y_2'(\xi)$ et, par suite, $y_1(x) < y_2(x)$ pour $0 < x \leqq \xi$. Pour ces valeurs de x, $y_1''(x)$ est, d'après 3°, plus petit que $y_2''(x)$. Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$y_1'(\xi) < y_2'(\xi),$$

ce qui n'a lieu que si $\xi = a$. c. q. f. d.

Cela étant, supposons que la solution $\underline{y}(x)$ s'annule pour $x = x_0$ $(0 < x_0 < a)$ et qu'elle soit positive pour $0 < x < x_0$. *L'équation différentielle (1) admet une et une seule solution qui soit en contact avec l'axe des x.* Pour le démontrer, remarquons d'abord que toute solution $y(x)$ est une fonction convexe de x, car sa dérivée de second ordre est, d'après 1°, toujours positive. Il y a donc au plus deux points d'intersection entre la courbe $y = y(x)$ et l'axe des x. Or, on sait bien qu'il existe, d'après 2°, une et une seule solution qui remplisse les conditions initiales :

$$(5) \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = h$$

où h est une constante arbitrairement donnée. Comme de telles solutions sont continues relativement à h, nous pouvons toujours en trouver une qui passe par un point arbitrairement donné du domaine D. Il est évident que deux quelconques d'entre elles ne se coupent jamais pour $0 < x \leqq a$. C'est là une conséquence immédiate de la proposition démontrée aucessus. Si, maintenant, $\underline{y}(x)$ ne s'annule que pour $x = x_0$, cela signifie que $\underline{y}(x)$ est précisément la solution cherchée. Dans le cas contraire désignons par x_1 et x_1' $(x_1 < x_1')$ les deux valeurs de x pour lesquelles $\underline{y}(x)$ est égal à zéro, et prenons la solution qui passe par le point $\left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, 0\right)$. Si la dernière s'annule encore pour deux valeurs de x, soient x_2 et x_2' $(x_2 < x_2')$, répétons le même procédé par rapport au point $\left(\frac{x_2 + x_2'}{2}, 0\right)$. En continuant ainsi, nous aurons deux suites de points $(x_i, 0)$ et $(x_i', 0)$ telles que

$$x_i < x_{i+1} < x_{i+1}' < x_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots).$$

Il reste à considérer le cas où les deux suites se continuent indéfiniment et, par conséquent, tendent vers le même point $(\xi, 0)$.

Soient $Y(x)$ et $y_i(x)$ des solutions telles que

$$Y(0) = y(0) = 1, \qquad Y(\xi) = y_i(x_i) = y_i(x_i') = 0.$$

Comme

$$x_i < \xi < x_i'$$

et que les deux courbes $y = Y(x)$ et $y = y_i(x)$ ne se coupent jamais pour

$0 < x < a$, $Y(x)$ ne peut s'annuler ailleurs que pour $x = \xi$. Ainsi nous avons bien la solution cherchée. La démonstration de l'unicité est presque immédiate.

Du raisonnement qui précède, nous pouvons déduire les propositions suivantes :

1) *Soit θ l'angle que fait la courbe $y = \underline{y}(x)$ avec l'axe des x au point $x = x_0$. L'équation différentielle (1) admet une et une seule solution qui coupe l'axe des x sous un angle arbitrairement donné entre 0 et θ.*

2) *Sans que la fonction $f(x, y, y')$ ne remplisse la condition de Lipschitz relativement à y et y', les résultats ci-dessus sont encore valides si seulement l'équation différentielle (1) admet une et une seule solution qui satisfasse aux conditions initiales (5) et qui soit continue par rapport à h.*

2. Dans les mêmes hypothèses qu'au numéro précédent nous pouvons obtenir un résultat plus général. Soit donnée une fonction $\psi(x)$ continue ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre, et qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{lll} 4^\circ. & \psi(x) < \bar{y}(x) & \text{dans} \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \\ & \psi(x) < \underline{y}(x) & \text{dans} \quad 0 \leqq x < x_0\,, \\ & \psi(x_0) = \underline{y}(x_0)\,, & \\ & \psi(x) > \underline{y}(x) & \text{dans} \quad x_0 < x < a\,, \\ & \psi(a) = \underline{y}(a)\,; & \\ 5^\circ. & \psi''(x) < f(x, y, y') \quad \text{lorsque} & \psi(x) \leqq y\,, \quad \psi'(x) \leqq y'\,. \end{array}$$

Montrons que *l'équation différentielle (1) admet une solution qui est en contact avec la courbe $y = \psi(x)$.* Pour cela il suffit de nous assurer de ce que celle-ci rencontre une solution déterminée de (1) en deux points au plus, à moins que les deux courbes ne soient en contact. Désignons par $\varphi(x)$ la solution qui passe par les deux points (0, 1) et (c, d), où le dernier est un point quelconque du domaine :

$$x_0 < x < a\,, \qquad \underline{y}(x) < y < \psi(x)\,.$$

Comme

$$\psi(a) = \underline{y}(a) < \varphi(a)$$

il y aura au moins une valeur x_1 de x telle que

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1)\,, \qquad x_0 < x_1 < a.$$

Soit ξ la borne inférieure de telles valeurs x_1. Il est évident que

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi)$$

et que

$$\varphi(x) < \psi(x) \qquad \text{pour} \quad c \leqq x < \xi\,.$$

Nous avons ainsi l'inégalité

$$\psi'(\xi) \leqq \varphi'(\xi)\,,$$

d'où s'obtient, d'après 5°, la relation

$$\psi''(\xi) < f\big(\xi, \varphi(\xi), \varphi'(\xi)\big) = \varphi''(\xi).$$

Puisque la dérivée $\psi''(x)$ est continue, le raisonnement du numéro 1 s'applique à $\psi''(x)$, et nous voyons que les inégalités

$$\psi'(x) < \varphi'(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) < \varphi(x)$$

sont valables pour $\xi < x \leqq a$. Nous pouvons démontrer, d'une manière analogue, qu'entre 0 et c il n'y a qu'une valeur de x pour laquelle l'égalité

$$\psi(x) = \varphi(x)$$

ait lieu.