77. Über die Bettische Gruppe der Zellenräume.

Von Atuo KOMATU.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Oct. 12, 1938.)

Herr A. Kolmogoroff[1] definierte die Bettische Gruppe der Zellenräume, welche die Axiome AUJ und AOJ[2] erfüllen.

Herr P. Alexandroff[2] definierte auch die Bettische Gruppe der diskreten Räume, die lokal endlich und multiplikativ sind.

Ich habe eine Bedingung erhalten dafür, dass die so definierte zwei Gruppen isomorph werden. Die Bettische Gruppe des diese Bedingung erfüllenden Zellenraumes D im gewöhnlichen (Kolmogoroffschen) Sinne ist also isomorph der Bettischen Gruppe vom baryzentrisch untergeteilten Komplex D_o von D.

D sei ein multiplikativer Zellenraum, a^r ein r-dimensionales Element von D. Dann ist die Menge $Aa^r - a^r$[4] auch ein Zellenraum.

Satz. Wenn die Bettische Gruppe des Zellenraumes $Aa^r - a^r$ für jedes a^r im Alexandroffschen Sinne mit der Bettischen Gruppe der $(r-1)$-dimensionalen Sphäre isomorph ist, so ist die Bettische Gruppe von D im Alexandroffschen Sinne isomorph mit der von D im Kolmogoroffschen Sinne.

Beweis. D_o sei die baryzentrische Unterteilung von D.

Wir definieren eine stetige Abbildung von D_o auf D in folgender Weise:

$$f(\text{Stern von } a^r) = a^r,$$

wo der Stern von a^r alle mit dem Eckpunkt a^r inzidenten Elementen von D_o enthält.

Diese Abbildung ist aber ein Spezialfall von der Alexandroffschen Abbildung.[5]

Für diesen Fall kann man leicht beweisen, dass die Voraussetzung des Satzes mit den Alexandroffschen Bedingungen äquivalent ist. Also ist der Satz eine Folge des Alexandroffschen Resultates. Der Koeffizientenbereich ist beliebig, weil der Urbild D_o ein gewöhnlicher Komplex ist.

Bemerkung. Für allgemeinen Fall, worin der Urbild einer stetigen Abbildung auf einen Zellenraum ein Kompaktum ist, ist es unmöglich eine ähnliche Bedingung anzugeben.

Korollar 1. D sei ein Zellenraum, der die Bedingung des Satzes

---

1) A. Kolmogoroff: Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie. Recueil Math. T. 1:1.

2) Randoperator-Bedingung. g_u sei der untere Randoperator. Wir nehmen also an, dass $g_u g_u f^r = 0$ für alle r und alle algebraischen Komplexe f^r.

3) P. Alexandroff: Diskrete Räume. Recueil Math. T. 2:3.

4) A_{a^r} ist die Menge, welche a^r und alle seine Ränder enthält.

5) P. Alexandroff: Zur Homologietheorie der Kompakten. § 2. Comp. Math. **4** (1937).

erfüllt. Ein r-dimensionaler Zyklus f^r von D_o ist homolog einem Zyklus g^r von der Form

$$g^r(a^{m_r}, \dots, a^{m_o}) = 0\,, \quad \text{wenn} \quad m_r > r \quad \text{ist, wo}$$
$$a^{m_r} > a^{m_{r-1}} > \cdots > a^{m_o} \quad \text{ist.}$$

Korollar 2. D sei ein Zellenraum, der die Bedingung des Satzes erfüllt. Wenn ein r-dimensionaler Zyklus f^r von D_o berandet, so berandet er einen algebraischen Komplex g^{r+1} von der Form

$$g^{r+1}(a^{m_{r+1}}, a^{m_r}, \dots, a^{m_o}) = 0\,, \quad \text{wenn} \quad m_{r+1} > r+1 \quad \text{ist, wo}$$
$$a^{m_{r+1}} > a^{m_r} > \cdots > a^{m_o} \quad \text{ist.}$$