15. *Über die Einfachheit der speziellen projektiven Gruppen.*

Von Kenkiti IWASAWA.

Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., March 12, 1941.)

Die Gesamtheit der nicht singulären linearen Transformationen des n-dimensionalen Vektorraumes in sich über einem Körper K bildet eine Gruppe, welche die allgemeine lineare Gruppe $GL(n, K)$ heisst[1]. Wir schreiben nun die Transformationen aus $GL(n, K)$ in der Form

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

In $GL(n, K)$ bilden die Transformationen mit Determinante Eins einen Normalteiler, welcher die spezielle lineare Gruppe $SL(n, K)$ heisst. Diese Gruppe wird erzeugt durch die Transformationen

$$B_{r,s,\lambda}: \begin{cases} \xi_r' = \xi_r + \lambda\xi_s & (r \neq s) \\ \xi_\nu' = \xi_\nu & \nu \neq r, \end{cases}$$

wobei λ alle Elemente aus K durchläuft[2]. Das Zentrum von $SL(n, K)$ besteht aus allen λE mit $\lambda^n = 1$, wenn mit E die identische Transformation bezeichnet wird. Die Faktorgruppe von $SL(n, K)$ nach dem Zentrum heisst die spezielle projektive Gruppe $PSL(n, K)$.

Für $n > 1$ ist nun $PSL(n, K)$ eine *einfache* Gruppe, ausser in zwei Fällen $n=2$, $K=GF(2)$ und $n=2$, $K=GF(3)$. Dieser Satz wurde zuerst von L. E. Dickson für endliche Grundkörper K bewiesen[3]. Sein Beweis aber wird, wie van der Waerden bemerkt[4], durch eine kleine Abänderung auch für den Fall unendlicher Grundkörper K gültig, wenn K von der Charakteristik $\neq 2$ oder vollkommen ist.

In der vorliegenden Note soll dieser Satz ohne oben erwähnte Einschränkung über K neu bewiesen werden.

Hilfssatz 1. $SL(n, K)$ fällt mit seiner Kommutatorgruppe zusammen, ausser wenn $n=2$, $K=GF(2)$ oder $n=2$, $K=GF(3)$.

Beweis. Zunächst sei $n \geqq 3$ und i, j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ beliebig gegeben. Für $k \neq i, j$ gilt dann

$$B_{i,k,\lambda} B_{k,j,1} B_{i,k,\lambda}^{-1} B_{k,j,1}^{-1} = B_{i,j,\lambda}.$$

Damit ist unsere Behauptung erledigt.

---

1) Bzgl. der Bezeichnungen $GL(n, K)$, $SL(n, K)$ u.s.w. vgl. B. L. van der Waerden: Gruppen von linearen Transformationen, 1935.

2) Vgl. L. E. Dickson: Linear groups, with an exposition of Galois Field theory, 1901, S. 78.

3) Vgl. loc. cit. 2), S. 83.

4) Vgl. loc. cit. 1), S. 7.

Nun sei $n=2$. Alsdann ist

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu(\lambda^2-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn K nicht $GF(2)$ oder $GF(3)$ ist, so gibt es in K mindestens ein Element $\lambda \neq 0$ mit $\lambda^2 \neq 1$. Da μ ein beliebiges Element aus K ist, so enthält die Kommutatorgruppe von $SL(2, K)$ alle $B_{1,2,\lambda}$ und ebenso alle $B_{2,1,\lambda}$: sie fällt also mit $SL(2, K)$ selbst zusammen.

Die Gruppe $PSL(n, K)$ besteht bekanntlich aus projektiven Transformationen des $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes über K. Wir können also diese Gruppe als Permutationsgruppe von Punkten in $P_{n-1}(K)$ auffassen. Es gilt dann

Hilfssatz 2. $PSL(n. K)$ ist $(n > 1)$, als Permutationsgruppe, zweifach transitiv.

Beweis. Es seien a, b zwei beliebige Punkte von $P_{n-1}(K)$:

$$a=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \quad b=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n).$$

Es genügt ersichtlich nur zu zeigen, dass es eine solche Transformation σ in $PSL(n, K)$ gibt, die Punkte $e_1=(1, 0, 0, \cdots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0)$ in a bzw. b überführt. Wegen $a \neq b$ gibt es dann eine geeignete Matrix

$$A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \cdots\cdots \\ \alpha_2 & \beta_2 \cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n \cdots\cdots \end{pmatrix}$$

mit $|A_0| \neq 0$. σ wird dann wie ersichtlich durch die Matrix $A_0/|A_0|$ angegeben.

Nunmehr sei $\mathfrak{H}$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{G}=PSL(n, K)$ $(n > 1)$, die aus allen Transformationen aus $\mathfrak{G}$ besteht, die e_1 festlassen. Eine Transformation aus $\mathfrak{H}$ ist daher von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

wobei A_1 eine $(n-1)$-reihige Matrix mit $\alpha_1 |A_1| = 1$ ist. In $\mathfrak{H}$ bilden alle Matrizen[1] der Form

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 \cdots\cdots \beta_n \\ 0 & \\ \vdots & E_{n-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

einen Normalteiler $\mathfrak{N}_0$, denn genau diese Matrizen werden beim Homomorphismus $A \rightarrow A_1$ der $(n-1)$-reihigen Einheitsmatrix E_{n-1} zugeordnet. $B_{1,2,\lambda}$ sind sämtlich in $\mathfrak{N}_0$ enthalten.

---

1) Ausführlicher: die durch diese Matrizen vertretenen Restklassen von $SL(n, K)/\mathfrak{Z} \simeq PSL(n, K)$.

Nun sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, der keine Einheitsgruppe ist. Da $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 2 zweifach transitiv ist, so ist $\mathfrak{N}$ als Permutationsgruppe von Punkten aus $P_{n-1}(K)$ sicherlich transitiv. Es ist also $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{N}^*=\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ ist natürlich ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da ein beliebiges $B_{i,j,\lambda}$ mit $B_{1,2,\pm\lambda}$ in $SL(n, K)$ konjugiert ist, so enthält $\mathfrak{N}^*$ mit $B_{1,2,\lambda}$ zugleich alle $B_{i,j,\lambda}$; $\mathfrak{N}^*$ fällt also mit $\mathfrak{G}$ zusammen. Aus $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}\mathfrak{N}_0$ folgt $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}\simeq\mathfrak{N}_0/\mathfrak{N}\cap\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{N}$ ist mithin ein Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe. Da aber $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 1 ausser in zwei genannten Fällen mit seiner Kommutatorgruppe zusammenfällt, so ergibt sich hieraus $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}$.

Es gilt also der

Hauptsatz. Die Gruppe $PSL(n, K)$ ist einfach $(n>1)$, ausser wenn $n=2$, $K=GF(2)$ oder $n=2$, $K=GF(3)$.

Für $n=2$, $K=GF(2)$ bzw. $n=2$, $K=GF(3)$ ist $PSL(n, K)$ bekanntlich isomorph mit der symmetrischen Gruppe von 3 Symbolen bzw. mit der Tetraedergruppe.

In ähnlicher Weise kann man auch die Einfachheit der projektiven Komplexgruppen $PC(2m, K)$[1] nachweisen.

---

1) $PC(2m, K)$ ist als Permutationsgruppe von Punkten aus $P_{2m-1}(K)$ nicht zweifach transitiv. Es lässt sich aber leicht beweisen, dass jeder Normalteiler von $PC(2m, K)$ transitiv ist, was für den Beweis der Einfachheit wesentlich ist.