30. *Klassenkörpertheoretische Deutung der Struktur der Klassengruppe des zyklischen Zahlkörpers.*

Von Eizi INABA.

Navy College, Etazima.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., May 12, 1941.)

K sei ein zyklischer Zahlkörper über dem rationalen Zahlkörper R vom Primzahlgrad l. Im Fall $l=2$ haben schon Herren Iyanaga und Reichardt die Rédeischen Resultate über die Struktur der Klassengruppe mittels der Klassenkörpertheorie erklärt[1]. In der vorliegenden Note soll eine Klassenkörpertheoretische Deutung der von mir kürzlich gewonnenen allgemeinen Resultate über die l-Klassengruppe von K erwähnt werden[2]. D sei die Diskriminante von K und t die Anzahl der in D aufgehenden Primzahlen p_i $(i=1, 2, \dots t)$. $K^{(i)}$ sei der eindeutig bestimmbare zyklische Zahlkörper vom Grade l, dessen Diskriminante nur eine einzige Primzahl p_i enthält. Im Fall $p_i \neq l$ ist $K^{(i)}$, wegen $p_i - 1 \equiv 0$ mod. l, der l-gradige Unterkörper des Körpers von p_i-ten Einheitswurzeln. Im Fall $p_i = l$, $l \neq 2$ ist $K^{(i)}$ der l-gradige Unterkôrper des Körpers von l^2-ten Einheitswurzeln. Im Fall $p_i = l = 2$ ist $K^{(i)} = R(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{2})$ oder $R(\sqrt{-2})$, je nachdem der Quotient von D durch das Produkt der Diskriminanten aller $K^{(i)}$ $(p_i \neq 2)$ gleich -4, 8 oder -8 ist. *Die Menge $\mathfrak{M}_1$ aller im Kompositum Ω von $K^{(i)}$ $(i=1, 2, \dots t)$ enthaltenen l-gradigen zyklischen Zahlkörper, K ausgeschlossen, heisse ein Körpersystem erster Stufe. Zwei Körper K_1, K_2 aus $\mathfrak{M}_1$ heissen assoziert, im Zeichen $K_1 \sim K_2$, wenn das Kompositum KK_1 den K_2 enthält.* Offenbar gilt $K_1 \sim K_1$; aus $K_1 \sim K_2$ folgt $K_2 \sim K_1$, und aus $K_1 \sim K_2$, $K_2 \sim K_3$ folgt $K_1 \sim K_3$. *Die Menge aller zu K_1 assozierten Körper aus $\mathfrak{M}_1$ heisse die K_1 enthaltende Körperklasse erster Stufe und werde mit (K_1) bezeichnet. Die Körperklassen (K_i) $(i=1, 2, \dots m)$ heissen ferner voneinander unabhängig, wenn keine (K_j) im Kompositum $KK_1K_2 \dots K_{j-1}K_{j+1} \dots K_m$ enthalten wird.*

Sei G die absolute Klassengruppe von K und H die Gruppe aller Klassen, deren Ordnungen zu l prim sind. Die Quotientengruppe $\bar{G} = G/H$ wird durch die Klassen aus der l-Klassengruppe repräsentiert und ist isomorph mit dieser. Die l-Klassengruppe, folglich auch $\bar{G}$, ist als direktes Produkt der durch Klassen $C_i^{(\nu)}$ von Ordnungen $(1-\sigma)^\nu$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\nu;\ \nu=1, 2, \dots s)$ erzeugten Gruppen darstellbar[3].

Es ist nämlich

$$\bar{G} \cong \{C_1^{(1)}\}\{C_2^{(1)}\} \cdots \{C_{\lambda_1}^{(1)}\}\{C_1^{(2)}\} \cdots \{C_{\lambda_s}^{(s)}\}$$

---

1) Vgl. S. Iyanaga, Sur les classes d'ideaux dans les corps quadratiques (Actualités scientifiques et industrielles 197) und H. Reichardt, Zur Struktur der absoluten Idealklassengruppe im quadratischen Zahlkörper, Journ. f. Math. **170** (1933).

2) Vgl. E. Inaba, Über die Struktur der l-Klassengruppe zyklischer Zahlkörper vom Primzahlgrad l, Journ. Fac. Sci., Tokyo, (1), **4** (1940), 61–115.

3) Vgl. E. Inaba l. c. Kapitel I.

Die Anzahl der ambigen Klassen ist offenbar gleich $l^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s}=l^{t-1}$. Folglich ist $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=t-1$. Die Anzahl n_i der durch $(1-\sigma)^i$ teilbaren Invarianten der l-Klassengruppe ist $\lambda_i+\lambda_{i+1}+\cdots+\lambda_s$. Die Untergruppe $\bar{G}^{1-\sigma}$ von $\bar{G}$ hat offenbar den Index l^{n_1}. Der Klassenkörper K' zu $\bar{G}^{1-\sigma}$ über K is abelsch über R vom Grad l^t. Wenn man einen Trägheitskörper K'_1 von K', alsdann einen Trägheitskörper K'_2 von K'_1, und so weiter herausnimmt, so erkennt man, dass K' alle $K^{(i)}$ enthält. Folglich ist Ω in K' enthalten. Weil Ω und K' beide über R den Grad l^t besitzen, so ist $\Omega=K'$. Sei $\bar{H}$ eine beliebige $\bar{G}^{1-\sigma}$ enthaltende Untergruppe von $\bar{G}$ mit dem Index l, dann ist der Klassenkörper $\bar{K}$ zu $\bar{H}$ abelsch über R mit dem Grade l^2. Alle zyklischen Zahlkörper l-ten Grades in $\bar{K}$, nur K ausgeschlossen, bilden offenbar die $\bar{H}$ zugeordnete Körperklasse. Setzt man $\bar{H}^{(1)}_{i\nu}=\bar{G}^{1-\sigma}\{C^{(1)}_1\}\{C^{(1)}_2\}\cdots\{C^{(\nu)}_{i-1}\}\{C^{(\nu)}_{i+1}\}\cdots\{C^{(s)}_{\lambda_s}\}$, so sind die $\bar{H}^{(1)}_{i\nu}$ zugeordneten Körperklassen $(K^{(1)}_{i\nu})$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\nu;\ \nu=1, 2, \dots s)$ voneinander unabhängig. Die Anzahl von $(K^{(1)}_{i\nu})$ ist genau n_1, und alle Körperklassen erster Stufe sind abhängig von diesen.

Allgemein definiert man ein Körpersystem ν-ter Stufe $\mathfrak{M}_\nu$ als die Gesamtheit aller algebraischen Zahlkörper $K^{(\nu)}$ über R vom Grade l^ν, welche folgende Eigenschaften besitzen:

(A) *Die Diskriminante von $K^{(\nu)}$ besitzt nur in D aufgehende Primteiler, und der p-Beitrag der Diskriminante von $K^{(\nu)}K$ ist die l^ν-te Potenz des p-Beitrags der Diskriminante von K;*

(B) *$K^{(\nu)}$ enthält nicht K, und $K^{(\nu)}K$ ist über R galoissch und über K abelsch.*

$\{\mathfrak{M}_\nu\}$ bedeute das Kompositum aller Körper in $\mathfrak{M}_\nu$. Zwei Körper $K^{(\nu)}_1$, $K^{(\nu)}_2$ aus $\mathfrak{M}_\nu$ heissen assoziert, im Zeichen $K^{(\nu)}_1\sim K^{(\nu)}_2$, wenn das Kompositum $KK^{(\nu)}_1$ den $K^{(\nu)}_1$ enthält. Alle zu $K^{(\nu)}_2$ assozierten Körper aus $\mathfrak{M}_\nu$ bilden eine Körperklasse ν-ter Stufe $(K^{(\nu)}_1)$. $(K^{(\nu)}_i)$ $(i=1, 2, \dots m)$ heissen voneinander unabhängig, wenn keine $(K^{(\nu)}_j)$ im Kompositum $K^{(\nu)}_1K^{(\nu)}_2\dots K^{(\nu)}_{j-1}K^{(\nu)}_{j+1}\dots K^{(\nu)}_m\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ enthalten ist.

Weil $KK^{(\nu)}$ über $K^{(\nu)}$ vom Grade l und $K^{(\nu)}$ über R vom Grade l^ν ist, so ist $KK^{(\nu)}$ über R vom Grad $l^{\nu+1}$. Folglich ist $KK^{(\nu)}$ über K vom Grade l^ν, abelsch und unverzweigt, weil die Relativdiskriminante von $KK^{(\nu)}$ in bezug auf K gleich (1) ist. Die $KK^{(\nu)}$ zugeordnete Idealgruppe $\bar{H}^{(\nu)}$ in K ist beim Automorphismus σ von K invariant, da $KK^{(\nu)}$ über R galoissch ist. Weil ferner $\bar{H}^{(\nu)}$ den Index l^ν in bezug auf $\bar{G}$ besitzt, so enthält $\bar{H}^{(\nu)}$ die Gruppe $\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}$. Setzt man $\bar{H}^{(\nu)}_{i\mu}=\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}\{C^{(1)}_1\}\{C^{(1)}_2\}\cdots\{C^{(\mu)}_{i-1}\}\{C^{(\mu)}_{i+1}\}\cdots\{C^{(s)}_{\lambda_s}\}$, so haben wir die $\bar{H}^{(\nu)}_{i\mu}$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\mu;\ \mu=\nu, \nu+1, \dots s)$ zugeordneten Körperklassen $(K^{(\nu)}_{i\mu})$, indem man einen Trägheitskörper $K^{(\nu)}_{i\mu}$ des Klassenkörpers $\bar{K}^{(\nu)}_{i\mu}$ zu $\bar{H}^{(\nu)}_{i\mu}$ nimmt. *Diese $(K^{(\nu)}_{i\mu})$ sind voneinander unabhängig und alle anderen Körperklassen ν-ter Stufe von diesen und $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ abhängig. Die Anzahl der unabhängigen Körperklassen ν-ter Stufe ist folglich n_ν.* Wir wollen diese Behauptung durch Induktion beweisen. Man erkennt leicht, dass der Durchschnitt von $\bar{H}^{(t)}_{i\mu}$ $(t=1, 2, \dots \nu-1;\ i=1, 2, \dots \lambda_\mu;\ \mu=t, t+1, \dots s)$

die Gruppe $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ ist, und dass diese nach der Induktionsannahme die $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ zugeordnete Idealgruppe in K ist. Der Durchschnitt von $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ und $\bar{H}_{i\mu}^{(\nu)}$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\mu;\ \mu=\nu, \nu+1, \dots s)$ ausser $\bar{H}_{j\lambda}^{(\nu)}$ ist nun $\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}\{C_j^{(\lambda)(1-\sigma)^{\nu-1}}\}$, wo $\lambda \geqq \nu$ ist. Diese Gruppe ist offenbar nicht in $\bar{H}_{j\lambda}^{(\nu)}$ enthalten. Also ist $(K_{j\lambda}^{(\nu)})$ nicht im Kompositum von $K_{i\mu}^{(\nu)}$ $(i \neq j,\ \mu \neq \lambda)$ und $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ enthalten. Ist ferner $(K^{(\nu)})$ eine Körperklasse ν-ter Stufe, deren zugeordnete Idealgruppe $\bar{H}^{(\nu)}$ ist, so ist der Durchschnitt $\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}$ aller $\bar{H}_{i\mu}^{(\nu)}$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\mu;\ \mu=\nu, \nu+1, \dots s)$ und $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ in $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten. Also ist $K^{(\nu)}$ im Kompositum aller $K_{i\mu}^{(\nu)}$ und $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ enthalten.

Eine Körperklasse ν-ter Stufe $(K^{(\nu)})$ heisse ausgezeichnet, wenn in $(K^{(\nu)})$ stets für jeden Primteiler $\mathfrak{p}$ von D ein solcher Körper existiert, dass $\mathfrak{p}$ in diesem voll zerfällt. Die Anzahl der unabhängigen ausgezeichneten Körperklassen ν-ter Stufe ist $n_{\nu+1}$. In der Tat enthalten alle $\bar{H}_{i\mu}^{(\nu)}$ $(\mu \geqq \nu+1)$ die Klassen $C_i^{(t)}$ $(t \leqq \nu)$ und folglich auch alle ambigen Klassen. Also zerfällt jeder Primteiler aus K von D in $\bar{K}_{i\mu}^{(\nu)}$ $(\mu \geqq \nu+1)$ voll. Die aus $\bar{K}_{i\mu}^{(\nu)}$ stammenden Körperklassen $(K_{i\mu}^{(\nu)})$ $(\mu \geqq \nu+1)$ sind hiermit ausgezeichnet und voneinander unabhängig. Ist $\bar{H}^{(\nu)}$ die einer ausgezeichneten $(K^{(\nu)})$ zugeordnete Idealgruppe, dann ist der Durchschnitt $\bar{D}$ von $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ und $\bar{H}_{i\mu}^{(\nu)}$ $(\mu \geqq \nu+1)$ in der Gruppe $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten, weil $\bar{D}=\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}\{C_1^{(\nu)(1-\sigma)^{\nu-1}}\}\{C_2^{(\nu)(1-\sigma)^{\nu-1}}\}\cdots\{C_{\lambda_\nu}^{(\nu)(1-\sigma)^{\nu-1}}\}$ und die ambigen Klassen $C_i^{(\nu)(1-\sigma)^{\nu-1}}$ $(i=1, 2, \dots \lambda_\nu)$ in $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten sind. Also ist $(K^{(\nu)})$ im Kompositum von $K_{i\mu}^{(\nu)}$ $(\mu \geqq \nu+1)$ und $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ enthalten.

Eine Körperklasse $(\nu+1)$-ter Stufe $(K^{(\nu+)})$ heisse eine Oberkörperklasse der Körperklasse ν-ter Stufe $(K^{(\nu)})$, wenn $K^{(\nu+1)}$ von $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_\nu\}$ unabängig und $K^{(\nu)}K$ in $K^{(\nu+1)}K$ enthalten ist. $(K^{(\nu)})$ besitzt dann und nur dann ihre Oberkörperklasse, wenn $(K^{(\nu)})$ ausgezeichnet und von $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ unabhängig ist. Hat $(K^{(\nu)})$ ihre Oberkörperklasse $(K^{(\nu+1)})$, so sei $\bar{H}^{(\nu+1)}$ die $KK^{(\nu+1)}$ zugeordnete Idealgruppe, die offenbar die $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_\nu\}$ zugeordnete Idealgruppe $\bar{G}^{(1-\sigma)^\nu}$ nicht enthält. Also gibt es eine Klasse C, deren $(1-\sigma)^{\nu+1}$-te Potenz erst zu $\bar{H}^{(\nu+1)}$ gehört, und es gilt $\bar{G}=\{C\}\bar{H}^{(\nu+1)}$. Die $K^{(\nu)}K$ zugeordnete Idealgruppe ist nun $\bar{H}^{(\nu)}=\{C^{(1-\sigma)^\nu}\}\bar{H}^{(\nu+1)}$. Folglich sind alle ambigen Klassen in $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten. Somit ist $(K^{(\nu)})$ ausgezeichnet. Weil ferner die Gruppe $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ nicht in $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten ist, so ist $(K^{(\nu)})$ von $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ unabhängig. Ist umgekehrt $(K^{(\nu)})$ ausgezeichnet und von $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_{\nu-1}\}$ unabhängig, so ist $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu-1}}$ nicht in der $KK^{(\nu)}$ zugeordneten Idealgruppe $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten. Also gibt es eine Klasse C, deren $(1-\sigma)^\nu$-te Potenz erst zu $\bar{H}^{(\nu)}$ gehört, und gilt $\bar{G}=\bar{H}^{(\nu)}\{C\}$. $C^{(1-\sigma)^\nu}$ ist nicht die $(1-\sigma)$-te Potenz einer Klasse aus $\bar{H}^{(\nu)}$, weil alle ambigen Klassen in $\bar{H}^{(\nu)}$ enthalten sind. Somit wird $C^{(1-\sigma)^\nu}$ eine Basisklasse der Gruppe

$\bar{H}^{(\nu)}/\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu+1}}$, und diese ist als direktes Produkt von $\{C^{(1-\sigma)^{\nu}}\}$ und einer Gruppe $\bar{H}'$ darstellbar. Die Gruppe $\bar{H}^{(\nu+1)}=\bar{H}'\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu+1}}$ ist bei σ invariant und vom Index l in bezug auf $\bar{H}^{(\nu)}$. Der Klassenkörper $KK^{(\nu+1)}$ zu $\bar{H}^{(\nu+1)}$ enthält den $KK^{(\nu)}$ und ist unabhängig von $\{\mathfrak{M}_1\}\{\mathfrak{M}_2\}\cdots\{\mathfrak{M}_\nu\}$, weil $\bar{G}^{(1-\sigma)^{\nu}}$ nicht in $\bar{H}^{(\nu+1)}$ enthalten ist.