53. *Une remarque sur les projections dans certains espaces du type (B).*

Par Hitosi KOMATUZAKI.

(Comm. by T. YOSIE, M.I.A., July 12, 1941.)

Considérons le problème suivant: existe-t-il dans un espace R donné du type (B) pour tout sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{M}$ de l'espace R un sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{N}$ tel que tout élément f de l'espace R se laisse représenter d'une seule manière dans la forme $f=g+h$ où $g\in\mathfrak{M}$ $h\in\mathfrak{N}$? M. F. J. Murray[1] a montré que le problème est équivalent au suivant: existe-t-il une projection de l'espace R sur $\mathfrak{M}$?

Ce problème est résolu affirmativement pour les espaces $(L^{(2)})$ et $(l^{(2)})$, et négativement pour les espaces $(L^{(p)})$ et $(l^{(p)})$ $(1<p<\infty,\ p\neq 2)$[2]. J'ai prouvé qu'il est résolu aussi négativement dans les espaces (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ $(p=1, 2, \dots)$ et (c_0)[3]. Notre démonstration est basée sur un résultat de M. S. Banach d'après lequel il est résolu négativement dans l'espace (l). Mais ce résultat est signalé sans démonstration dans un livre de M. Banach: *Théorie des opérations linéaires.* Or, dans cette note, nous allons prouver directement qu'il est résolu négativement pour l'espace (c), et montrer que cela entraîne immédiatement la réponse négative au problème pour tous les autres espaces considérés: (C), (M), $(C^{(p)})$ $(p=1, 2, \dots)$, (c_0) et (l). Donc, nous avons non seulement une démonstration directe — que nous croyons assez simple — de notre résultat, mais encore celle de l'énoncé de M. Banach.

Donnons d'abord quelques définitions sur les notions que nous employerons plusieurs fois dans la suite. Étant donné un sous-espaces $\mathfrak{M}$ linéaire fermé d'un espace R, nous définissons $C(\mathfrak{M})$ et $\bar{C}(R)$ comme suivant:

$$C(\mathfrak{M})\begin{cases} =\infty, \text{ quand il n'existe aucune projection de l'espace } R \text{ sur } \mathfrak{M}. \\ =\text{borne inf } |E|, \text{ pour toute projection } E \text{ telle qu'on ait } ER=\mathfrak{M}, \\ \quad \text{quand il existe au moins une telle projection.}\end{cases}$$

$$\bar{C}(R)=\underset{\mathfrak{M}<R}{\text{borne sup}}\ \{C(\mathfrak{M})\}.$$

Désignons par (c_n) l'espace des suites ordonnées $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ des n-nombres réels où la norme de cet espace est définie par $\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\| = \max_{i=1,\dots,n} |a_i|$, et $(c_\infty)=(c)$ et par (l_n) l'espace des suites dernières dont la norme est définie par $\|(a_1, a_2, \dots, a_n)\|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$. Nous entendrons par $(c_m)\boxtimes(c_n)$ l'espace (c_{mn}) et il exprime l'espace composé des espaces (c_m) et (c_n) tel que son élément soit de la forme $f\boxtimes g=(a_1b_1, a_1b_2, \dots,$

1) Cf. F. J. Murray: Relations between certain problems of Banach. Studia Math. Tome VI 1936, p. 199.

2) Cf. F. J. Murray: On complementary manifolds and projections in spaces L_p and l_p. Trans. Math. Soc. Vol. 41, 1937, p. 138–152.

3) Cf. H. Komatuzaki: Sur les projections dans certains espaces du type (B). Proc. **16** (1940), 274.

$a_1b_n, a_2b_1, \dots, a_mb_n)$ où $f=(a_1, a_2, \dots, a_m)\in(c_m)$, $g=(b_1, b_2, \dots, b_n)\in(c_n)$. Pour tout élément $f=(a_1, a_2, \dots, a_n)\in(c_n)$ désignons par $\{f\}$ l'élément $(a_1', a_2', \dots, a_n')$ de (l_n) tel que $a_i'=a_i$ ou 0 $(i=1, 2, \dots, n)$ suivant que $|a_i|=\max_{j=1,2,\dots,n}|a_j|$ ou non, et par $[g]$ l'élément $(\operatorname{sgn} b_1, \operatorname{sgn} b_2, \dots, \operatorname{sgn} b_n)$ de l'espace (c_n) pour tout élément $g=(b_1, b_2, \dots, b_n)\in(l_n)$. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace linéaire fermé de l'espace (c_n), et désignons par $\mathfrak{M}^*$ l'espace constitués de tout élément $g\in(l_n)$ tel que $(f, g)=0$ pour tout élément $f\in\mathfrak{M}$. Puisque les lemmes 2.2.1, 2.3.1. 2.3.2 et 2.3.3 de l'article cité de M. Murry[4] sont vrais pour nos espaces (c_n) et (l_n), nous avons le

théorème $\qquad \bar{C}(c)\leqslant\bar{C}(l)+1\,.$

Donc, si $\bar{C}(c)$ est infini, $\bar{C}(l)$ est aussi, c. à d. notre problème est résolu négativement dans l'espace (l). Maintenant, nous allons montrer que $\bar{C}(c)=\infty$.

Nous considérons l'espace $\mathfrak{M}_1$ qui est constitué par tous les combinaisons linéaires des éléments $\phi_1^{(1)}=(1, 1, 0)$ et $\phi_2^{(1)}=(0, 1, 1)$. Alors éléments $\psi_1^{(1)}=\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $\psi_2^{(1)}=\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ de l'espace $\mathfrak{M}_1$, jouissent de la propriété: $(\phi_i^{(1)}, \psi_j^{(1)})=\delta_{ij}$. Les éléments $h_1^{(1)}=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$, $h_2^{(1)}=\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $h_3^{(1)}=\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ de celui-ci ont la norme 1. Or, *nous pouvons montrer que* $\bar{C}(c_3)\geqslant\frac{4}{3}$. En effet, quand nous prenons les éléments ϕ_i $(i=1, 2, \dots, k)$ qui sont linéairement indépendents dans l'espace $\mathfrak{M}$ à k-dimension de (c_n), la transformation E définie par $Ef=\sum_{i=1}^{k}(\psi_i, f)\phi_i$ est une projection de (c_n) sur $\mathfrak{M}$, puisque nous avons $(\phi_i, \psi_j)=\delta_{ij}$ les élements $\psi_j\in(l_n)$ $(j=1, 2, \dots, k)$. Or, pour tous $f\in(c_n)$ et $g\in(l_n)$ un élément g^* existe tel que $(Ef, g)=(f, g^*)$, et g^* est alors donné par la formule $g^*=E^*g=\sum_{i=1}^{k}(g, \phi_i)\psi_i$ et $|E|=|E^*|$. Il est donc suffisant de montrer que pour toute projection E_1 de (c_3) sur $\mathfrak{M}_1$ $|E_1^*|\geqslant\frac{4}{3}$. Comme les éléments $\{h_i^{(1)}\}$ $(i=1, 2, 3)$ ont la norme 1 dans l'espace (l_3), il suffira de montrer que $|E_1^*\{h_i^{(1)}\}|\geqslant\frac{4}{3}$ pour au moins un i. On peut s'assurer cela toute de suite par un calcul simple. Dans l'espace (c_{3^2}), nous considérons l'espace $\mathfrak{M}_2$ c. à d. $\mathfrak{M}_1\boxtimes\mathfrak{M}_1$ qui est composé espaces identiques $\mathfrak{M}_1$, $\phi_{2(s-1)+t}^{(2)}=\phi_s^{(1)}\boxtimes\phi_t^{(1)}$ $(s, t=1, 2)$, $\psi_{2(s-1)+t}^{(2)}=\psi_s^{(1)}\boxtimes\psi_t^{(1)}$ $(s, t=1, 2)$ et $h_{3(s-1)+t}^{(2)}=h_s^{(1)}\boxtimes h_t^{(1)}$ $(s, t=1, 2, 3)$. *Nous avons alors* $\bar{C}(c_{3^2})\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^2$. En effet $|E_2^*\{h_i^{(2)}\}|=|E_1^*\boxtimes E_1^*\cdot\{h_s^{(1)}\boxtimes h_t^{(1)}\}|=|E_1^*\{h_s^{(1)}\}\boxtimes E_1^*\{h_t^{(1)}\}|=|E_1^*\{h_s^{(1)}\}|^2\geqslant\left(\frac{4}{3}\right)^2$ [5] pour certaines s, t c. à d.

4) Cf. loc. cit. 2) p. 142–143.
5) Cf. loc. cit. 2) p. 146.

un i, d'où nous avons $\bar{C}(c_{3^2}) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^2$. Par l'induction mathématique, *nous pouvons établir l'inégalité* $\bar{C}(c_{3^n}) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^n$. Puisque nous pouvons trouver, pour tout nombre n, un nombre N tel que $3^N \leqslant n \leqslant 3^{N+1}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^N \leqslant \bar{C}(c_{3^N}) \leqslant \bar{C}(c_n) \leqslant \bar{C}(c)$[6] donc $\bar{C}(c) = \infty$. Il existe un sous-espace linéaire fermé $\mathfrak{N}$ dans l'espace (c) tel que $\bar{C}(c) = C(\mathfrak{N}) = \infty$[7]. Notre problème est aussi résolu négativement pour l'espace (c). Et, par conséquent, il est résolu aussi négativement pour les espaces (C), (M), (m) $(C^{(p)})$, (c_0) et (l)[8].

6), 7) Cf. loc. cit. 3) théorème I.
8) Cf. loc. cit. 3).