95. Einige Sätze über ein System von Pfaffschen Ausdrücken und ihre Anwendungen.

Von Shisanji HOKARI.
Geometrisches Seminar der Hokkaido Kaiserlichen Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., Dec. 12, 1941.)

1. Es sei X_n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, welche auf ein System von n Koordinaten x^i $(i=1, 2, \dots, n)$ bezogen ist, und unter einem Punkte verstehen wir ein System von n reellen Werten, die n Variable x^i annehmen. Adjungieren wir nun jedem Punkte x^i von X_n ein beliebiges Wertesystem $x^{(1)i}=\frac{dx^i}{dt}, \dots, x^{(m)i}=\frac{d^m x^i}{dt^m}$, so kommt eine Mannigfaltigkeit $K_n^{(m)}$ von nm Dimensionen zustande, die aus allen Wertesystemen $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i})$ besteht. Diese Mannigfaltigkeit $K_n^{(m)}$ bzw. ein System der $(m+1)n$ Werte $(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i})$ ist von A. Kawaguchi die Mannigfaltigkeit m-ter Ordnung bzw. ein parametrisiertes Linienelement m-ter Ordnung genannt worden. Es versteht sich von selbst, dass jede geometrische Grösse f in $K_n^{(m)}$ im allgemeinen die Funktionen von $x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i}$ ist; mit anderen Worten, müssen die Grössen in $K_n^{(m)}$ Funktionen von Linienelement m-ter Ordnung sein, d. h. $f(x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i})$. Wir bezeichnen die $K_n^{(m)}\times t$-Mannigfaltigkeit mit $K_n^{*(m)}$, welche aus allen Wertesystemen $(t, x^i, x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i})$ besteht. Wir möchten in dieser Arbeit einige Sätze über das System von Pfaffschen Ausdrücken, die im Sinne von E. Bortolotti *intrinsik* sind, in $K_n^{(m)}$ oder $K_n^{*(m)}$ aufstellen und ihre Anwendungen zeigen.

Wenn man die r-maligen Ableitungen von x^i nach neuem Parameter t^* durch $\overset{*}{x}{}^{(r)i}=\frac{d^r x^i}{dt^{*r}}$ $(r=1, 2, \dots, m)$ bezeichnet, so drücken sich unter einer allgemeinen Parametertransformation

$$t=t(t^*) \tag{1}$$

die Grössen $\overset{*}{x}{}^{(r)i}$ durch die Grössen $x^{(1)i}, \dots, x^{(m)i}$ in der Form aus:

$$\overset{*}{x}{}^{(r)i}=\sum_{s=1}^{r} a_s^r x^{(s)i}, \qquad r=1, 2, \dots, m, \tag{2}$$

wobei a_s^r ein Polynom der Ableitungen von t nach t^* ist und durch den folgenden Algorithmus bestimmt wird:

$$a_s^r=\begin{cases} a^r=\left(\dfrac{dt}{dt^*}\right)^r & \text{für} \quad r=s, \\ \overset{*}{a}{}^{(r)}=\dfrac{d^r a}{dt^{*r}} & \text{für} \quad s=1, \\ a a_{s-1}^{r-1}+\dfrac{d}{dt^*}a_s^{r-1} & \text{für} \quad r>s>1. \end{cases} \tag{3}$$

Andererseits transformieren diese Grössen sich unter einer Koordinatentransformation

$$(4)\qquad x^{\lambda}=x^{\lambda}(x^1, x^2, \dots, x^n) \qquad \lambda, \mu, \dots =1, 2, \dots, n$$

in X_n folgendermassen:

$$x^{(1)\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^i}x^{(1)i}, \qquad x^{(2)\lambda}=\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^i}x^{(2)i}+\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x^i \partial x^j}x^{(1)i}x^{(1)j},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Wenn die geometrischen Grössen, z. B. $T^i_{jk}(t, x^h, x^{(1)h}, \dots, x^{(m)h})$ und $T^{*\lambda}_{\mu\nu}(t^*, x^a, \overset{*}{x}{}^{(1)a}, \dots, \overset{*}{x}{}^{(m)a})$, sich unter den beiden Transformationen (1) und (4) folgendermassen verbinden:

$$T^{*\lambda}_{\mu\nu}=a^{\mathfrak{K}}T^i_{jk}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^i}\frac{\partial x^j}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{\nu}},$$

so nennen wir T^i_{jk} intrinsike Grösse oder genauer intrinsiker Affinor dritter Stufe vom Gewichte $\mathfrak{K}$. Alle auftretenden Funktionen von t^* bezeichnet man durchweg mit Hinzufügung des Sternes wegen kürzerer Bezeichnung und besserer Übersicht wie oben.

2. Über die Parametertransformation besteht der

Satz 1[1]. *Damit die Pfaffschen Ausdrücke in bezug auf* $dx^{(s)i}, \dots, dx^i, dt$

$$(5)\qquad \Omega^i_{(s)}=\sum_{r=0}^{s}P^{(r)i}_{(s)j}(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})\,dx^{(r)j}+Q^i_{(s)}(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})\,dt$$

$$\text{für}\quad 0\leqq s\leqq m$$

unter der Parametertransformation (1) *das Gewicht* $\mathfrak{K}$ *habe, ist es notwendig und hinreichend, dass deren Koeffizienten* $P^{(r)i}_{(s)j}$ *und* $Q^i_{(s)}$ *die Transformationsformeln haben:*

$$(6)\qquad \begin{cases} a^{\mathfrak{K}}P^{(r)i}_{(s)j}=\sum\limits_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}a^u_r & \text{für}\quad r=0, 1, 2, \dots, s, \\ a^{\mathfrak{K}+1}Q^i_{(s)}=Q^{*i}_{(s)}+\sum\limits_{r=1}^{s}x^{(r)j}\sum\limits_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\overset{*}{a}{}^{u(1)}_r, \end{cases}$$

wo $a^0_0=1,\ a^t_0(t>0)=0.$

Beweis. Differenzierend die beiden Seiten von (2), haben wir

$$(7)\qquad d\overset{*}{x}{}^{(r)i}=\sum_{u=1}^{r}a^r_u\,dx^{(u)i}+\sum_{u=1}^{r}a^{r(1)}_u x^{(u)i}dt.$$

Da die Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s)}$ das Gewicht $\mathfrak{K}$ haben, so bestehen nach Definition die Beziehungen $\Omega^{*i}_{(s)}=a^{\mathfrak{K}}\Omega^i_{(s)}$. Setzen wir (7) in $\Omega^{*i}_{(s)}$ ein, so gilt

---

1) Vgl. A. Kawaguchi, Die Differentialgeometrie höherer Ordnung III. Erweiterte Parametertransformationen und P-Tensoren, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **10** (1941).

$$\begin{aligned}\Omega^{*i}_{(s)} &= \sum_{r=1}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j} \sum_{u=1}^{r} a^r_u dx^{(u)j} + P^{*(0)i}_{(s)j} dx^j \\ &\quad + \alpha^{-1}\left\{\sum_{r=1}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j} \sum_{u=1}^{r} a a^{r(1)}_u x^{(u)j} + Q^{*i}_{(s)}\right\} dt \\ &= \sum_{u=1}^{s} dx^{(u)j} \sum_{r=1}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j} a^r_u + P^{*(0)i}_{(s)j} dx^j \\ &\quad + \alpha^{-1}\left\{\sum_{u=1}^{s} x^{(u)j} \sum_{r=u}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j} \overset{*}{a}{}^{r(1)}_u + Q^{*i}_{(s)}\right\} dt .\end{aligned}$$

Dann folgen unmittelbar die gesuchten Beziehungen (6), indem man dies in $\Omega^{*i}_{(s)} = \alpha^{\mathfrak{R}} \Omega^i_{(s)}$ einsetzt und die Koeffizienten von $dx^{(m)i}, \dots, dx^{(1)i}$, dx^i, dt der beiden Seiten vergleicht. Die Bedingungen (6) sind also notwendig. Da die Umkehrung des Satzes ohne Schwierigkeit bewiesen wird, so lassen wir sie hier weg.

Wenn wir ferner den Parameter t festhalten und nur die Koordinatentransformation (4) anwenden, so stellen die Differentiale $dx^{(r)\lambda}$ sich in den homogenen Linearformen in bezug auf $dx^i, dx^{(1)i}, \dots, dx^{(r)i}$ dar; d. h.

$$(8) \qquad dx^{(r)\lambda} = \sum_{u=0}^{r} M^{(r)\lambda}_{(u)j} dx^{(u)j} ,$$

wobei $M^{(r)\lambda}_{(t)j}$ ein Polynom der Ableitungen von $\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}$ nach t ist und durch die rekurrenten Formeln

$$(9) \qquad M^{(r)\lambda}_{(u)j} = \begin{cases} \dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^j} & \text{für} \quad r = u , \\ \dfrac{d}{dt} M^{(r-1)\lambda}_j = \dfrac{d^r}{dt^r}\left(\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^j}\right) & \text{für} \quad u = 0 , \\ M^{(r-1)\lambda}_{(u-1)j} + \dfrac{d}{dt} M^{(r-1)\lambda}_{(u)j} & \text{für} \quad r > u > 0 \end{cases}$$

bestimmt wird. Wir können jetzt den folgenden Satz behaupten, der auf ganz ähnliche Weise wie in Satz 1 bewiesen wird.

Satz 2. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass die Pfaffschen Ausdrücke (5) *sich unter der Koordinatentransformation* (4) *in derselben Weise wie kontravarianter Vektor transformieren sind, dass die Funktionen $P^{(r)i}_{(s)j}$ und $Q^i_{(s)}$ unter den betreffenden Transformationen* (4) *die Transformationsformeln*

$$(10) \qquad \begin{cases} P^{(u)i}_{(s)k} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^\lambda} \displaystyle\sum_{r=u}^{s} P^{(r)\lambda}_{(s)\mu} M^{(r)\mu}_{(u)k} & \textit{für} \quad u = 0, 1, \dots, s , \\ Q^i_{(s)} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x^\lambda} Q^\lambda_{(s)} \end{cases}$$

haben.

Aus den letzten Beziehungen und (6) erkennen wir, dass $Q^i_{(s)}$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten aber nicht intrinsiken Vektors sind. Satz 1 und 2 liefern uns ohne weiteres

Satz 3. Dafür, dass die Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s)}$ *sich in derselben Weise wie Bestimmungszahlen eines intrinsiken kontravarianten Vektors transformieren, ist notwendig und hinreichend, dass deren Koeffizienten* $P^{(r)i}_{(s)j}$ *und* $Q^i_{(s)}$ *unter den betreffenden Transformationen* (1) *und* (4) *die folgenden Transformationsformeln haben:*

$$(11)\quad \begin{cases} a^{\mathfrak{R}}\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}P^{(u)i}_{(s)k}=\sum\limits_{r=u}^{s}M^{(r)\mu}_{(u)k}\sum\limits_{p=r}^{s}P^{*(p)\lambda}_{(s)\mu}a^p_r\,, \qquad u=0,1,\dots,s\,, \\ a^{\mathfrak{R}+1}\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}Q^i_{(s)}=Q^{*\lambda}_{(s)}+\sum\limits_{r=1}^{s}x^{(r)\mu}\sum\limits_{u=r}^{s}P^{*(u)\lambda}_{(s)\mu}\overset{*}{a}{}^{u(1)}_r\,. \end{cases}$$

3. Um die neuen Pfaffschen Ausdrücke aus den vorgegebenen $\Omega^i_{(s)}$ herzuleiten, setzen wir voraus, dass zwei Grössen Γ^i_j und $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\Gamma^{*\lambda}_{\mu}=a\dfrac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\Gamma^i_j-a\dfrac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^j\partial x^h}x^{(1)h}\,, \\ a\bar{\mathfrak{A}}^*=a^2\mathfrak{A}-\overset{*}{a}{}^{(1)} \end{cases}$$

unter den Transformationen (1) und (4) gegeben seien. Wenn man aus den Pfaffschen Ausdrücken (5) die Grössen

$$\omega^i_{(s)}=\Omega^i_{(s)}/dt=\sum_{r=0}^{s}P^{(r)i}_{(s)j}x^{(r+1)j}+Q^i_{(s)}$$

herleitet, so sind $\omega^i_{(s)}$ die Bestimmungszahlen eines intrinsiken kontravarianten Vektors in $K^{*(m)}_n$ oder in $K^{*(m+1)}_n$ vom Gewichte $\mathfrak{R}+1$. Benutzend diese Grössen Γ^i_j, $\mathfrak{A}$ und $\omega^i_{(s)}$ definieren wir die folgenden Grössen

$$(13)\quad \begin{cases} P^{(r)i}_{(s+1)j}=P^{(r-1)i}_{(s)j}+DP^{(r)i}_{(s)j}+\Gamma^i_kP^{(r)k}_{(s)j}+\mathfrak{R}\mathfrak{A}P^{(r)i}_{(s)j} \quad \text{für } r=0,1,\dots,s+1, \\ Q^i_{(s+1)}=\Gamma^i_jQ^j_{(s)}+DQ^i_{(s)}+\mathfrak{A}\omega^i_{(s)}+\mathfrak{R}\mathfrak{A}Q^i_{(s)}\,, \end{cases}$$

wobei gesetzt sind:

$$(14)\qquad P^{(-1)i}_{(s)j}=P^{(s+1)i}_{(s)j}=0$$

und für die Grösse $f(t,x,x^{(1)},\dots,x^{(m)})$ in $K^{*(m)}_n$

$$(15)\qquad Df=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{r=0}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^{(r)i}}x^{(r+1)i}\,.$$

Dann ergeben sich die neuen Pfaffschen Ausdrücke in bezug auf $dx^{(s+1)i},\dots,dx^i,dt$

$$(16)\quad \Omega^i_{(s+1)}=\sum_{r=0}^{s+1}P^{(r)i}_{(s+1)j}(t,x,x^{(1)},\dots x^{(m+1)})\,dx^{(r)j}+Q^i_{(s)}(t,x,x^{(1)},\dots,x^{(m+1)})dt,$$

welche in $K^{*(m+1)}_n$ enthalten werden. Da die Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s+1)}$ aus den vorgegebenen $\Omega^i_{(s)}$ vermöge (13) hergeleitet werden, wollen wir dies nun einfacher durch die Form

$$(17)\qquad \Omega^i_{(s+1)}=\mathfrak{D}\Omega^i_{(s)}$$

bezeichnen.

Wir betrachten nun die Eigenschaft der oben-definierten Pfaffschen

Ausdrücke $\Omega^i_{(s+1)}$. Wenn man zuerst die Parametertransformation festhält und nur die Koordinatentransformation anwendet, so entstehen aus (12) für die Grössen Γ^i_j, $\mathfrak{A}$ in $K^{*(m)}_n$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^j}\Gamma^\lambda_\mu=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^i}\Gamma^i_j-\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^i \partial x^j}x^{(1)i}, \qquad \bar{\mathfrak{A}}=\mathfrak{A}.$$

Dann erhalten wir mit Hilfe von (13) und (14)

$$\begin{aligned}
(18) \qquad Q^i_{(s+1)}&=\Gamma^i_j Q^j_{(s)}+DQ^i_{(s)}+\mathfrak{A}\omega^i_{(s)}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}Q^i_{(s)}\\
&=\frac{\partial x^\nu}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_\nu-\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\nu \partial x^\rho}x^{(1)\rho}\right)\frac{\partial x^j}{\partial x^\mu}Q^\mu_{(s)}+\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}DQ^\lambda_{(s)}\\
&\quad+Q^\nu_{(s)}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\nu \partial x^\rho}x^{(1)\rho}+\mathfrak{A}\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\omega^\lambda_{(s)}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}Q^\lambda_{(s)}\\
&=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}Q^\lambda_{(s+1)}\,;
\end{aligned}$$

demnach sind die Grössen $Q^i_{(s+1)}$ die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors.

Zunächst haben wir unter Berücksichtigung der Beziehung $P^{(s+1)i}_{(s+1)j}=P^{(s)i}_{(s)j}$

$$\begin{aligned}
P^{(r)i}_{(s+1)j}&=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\sum_{u=r-1}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r-1)j}+\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\lambda \partial x^\nu}x^{(1)\nu}\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\\
&\quad+\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\sum_{u=r}^{s}DP^{(u)\lambda}_{(s)\mu}\cdot M^{(u)\mu}_{(s)j}+\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}DM^{(u)\mu}_{(r)j}\\
&\quad+\frac{\partial x^\nu}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\Gamma^\lambda_\nu-\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\nu \partial x^\rho}x^{(1)\rho}\right)\frac{\partial x^k}{\partial x^\sigma}\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\sigma}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\\
&\quad+\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{A}}\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\\
&=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\Bigg\{\sum_{u=r-1}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r-1)j}+\sum_{u=r}^{s}DP^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}+\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u+1)\mu}_{(r)j}\\
&\quad-\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r-1)j}+\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{A}}\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}+\sum_{u=r}^{s}\Gamma^\lambda_\nu P^{(u)\nu}_{(s)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\Bigg\}\\
&=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\Bigg\{P^{(s)\lambda}_{(s)\mu}M^{(s+1)\mu}_{(r)j}+\sum_{u=r}^{s}(P^{(u-1)\lambda}_{(s)\mu}+DP^{(u)\lambda}_{(s)\mu}\\
&\quad+\Gamma^\lambda_\nu P^{(u)\nu}_{(s)\mu}+\mathfrak{K}\bar{\mathfrak{A}}P^{(u)\lambda}_{(s)\mu})M^{(u)\mu}_{(r)j}\Bigg\}\\
&=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\Bigg\{P^{(s)\lambda}_{(s)\mu}M^{(s+1)\mu}_{(r)j}+\sum_{u=r}^{s}P^{(u)\lambda}_{(s+1)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\Bigg\}
\end{aligned}$$

oder

$$(19) \qquad P^{(r)i}_{(s+1)j}=\frac{\partial x^i}{\partial x^\lambda}\sum_{u=r}^{s+1}P^{(u)\lambda}_{(s+1)\mu}M^{(u)\mu}_{(r)j}\,.$$

Aus (18) und (19) können wir wegen Satz 2 schliessen, dass *die Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s+1)}$ sich unter der Koordinatentransformation* *in derselben Weise wie* $\Omega^i_{(s)}$ *transformieren; mit anderen Worten sind die Grössen* $\Omega^i_{(s+1)}$ *die Bestimmungszahlen eines kontravarianten Vektors.*

4. Wir betrachten im Folgenden die Eigenschaft von $\Omega^i_{(s+1)}$ unter der Parametertransformation (1), indem wir das Koordinatensystem festhalten. Da die Grössen Γ^i_j und $\mathfrak{A}$ sich $\Gamma^{*i}_j=\alpha\Gamma^i_j$, $\alpha\mathfrak{A}^*=\alpha^2\mathfrak{A}-\overset{*}{\alpha}{}^{(1)}$ transformieren, so folgt aus (6) und (13)

$$
\begin{aligned}
(20)\qquad \alpha^{\mathfrak{K}+1}P^{(r)i}_{(s+1)j} &= \alpha\sum_{u=r-1}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_{r-1}+\sum_{u=r}^{s}DP^{*(u)i}_{(s)j}\cdot\alpha^u_r \\
&\quad+\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r-\mathfrak{K}\overset{*}{\alpha}{}^{(1)}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_r \\
&\quad+\Gamma^{*i}_k\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)k}_{(s)j}\alpha^u_r+\mathfrak{K}(\mathfrak{A}^*+\alpha^{-1}\overset{*}{\alpha}{}^{(1)})\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_r \\
&= \alpha\sum_{u=r-1}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_{r-1}+\sum_{u=r}^{s}DP^{*(u)i}_{(s)j}\cdot\alpha^u_r+\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^{u+1}_r \\
&\quad-\alpha\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_{r-1}+\Gamma^{*i}_k\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)k}_{(s)j}\alpha^u_r+\mathfrak{K}\mathfrak{A}^*\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\alpha^u_r \\
&= P^{*(r-1)i}_{(s)j}\alpha^r+\sum_{u=r+1}^{s}(P^{*(u-1)i}_{(s)j}+DP^{*(u)i}_{(s)j} \\
&\quad+\Gamma^{*i}_kP^{*(u)k}_{(s)j}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}^*P^{*(u)i}_{(s)j})\alpha^u_r \\
&\quad+\alpha^r(DP^{*(r)i}_{(s)j}+\Gamma^{*i}_kP^{*(r)k}_{(s)j}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}^*P^{*(r)i}_{(s)j})+P^{*(s)i}_{(s)j}\alpha^{s+1}_r \\
&= \sum_{u=r+1}^{s}P^{*(u)i}_{(s+1)j}\alpha^t_r+P^{*(r)u}_{(s+1)j}\alpha^r+P^{*(s+1)i}_{(s+1)j}\alpha^{s+1}_r \\
&= \sum_{u=r}^{s+1}P^{*(u)i}_{(s+1)j}\alpha^u_r\,.
\end{aligned}
$$

Die Grössen $P^{(r)i}_{(s+1)j}$ $(r=0,1,\dots,s+1)$ transformieren sich also ganz analog wie $P^{(r)i}_{(s)j}$ $(r=0,1,\dots,s)$ in $\Omega^i_{(s)}$.

Zuletzt berechnen wir nach (13)

$$
\begin{aligned}
Q^i_{(s+1)} &= \alpha^{-(\mathfrak{K}+2)}\Gamma^{*i}_j\Big\{Q^{*j}_{(s)}+\sum_{r=1}^{s}x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)j}_{(s)k}\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r\Big\}+\alpha^{-(\mathfrak{K}+2)}DQ^{*i}_{(s)} \\
&\quad-(\mathfrak{K}+1)\alpha^{-(\mathfrak{K}+3)}\overset{*}{\alpha}{}^{(1)}\Big\{Q^{*i}_{(s)}+\sum_{r=1}^{s}x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r\Big\} \\
&\quad+\alpha^{-(\mathfrak{K}+2)}\sum_{r=1}^{s}x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\overset{*}{\alpha}{}^{u(2)}_r+\alpha^{-(\mathfrak{K}+1)}\sum_{r=1}^{s}x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r \\
&\quad+\alpha^{-(\mathfrak{K}+2)}\sum_{r=1}^{s}x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s}DP^{*(u)i}_{(s)j}\cdot\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r+(\alpha^{-1}\mathfrak{A}^*+\alpha^{-2}\overset{*}{\alpha}{}^{(1)})\alpha^{-(\mathfrak{K}+1)}\omega^{*i}_{(s)} \\
&\quad+\mathfrak{K}(\alpha^{-1}\mathfrak{A}^*+\alpha^{-2}\overset{*}{\alpha}{}^{(1)})\alpha^{-(\mathfrak{K}+1)}\Big\{Q^{*i}_{(s)}+\sum_{r=1}^{s}x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)j}\overset{*}{\alpha}{}^{u(1)}_r\Big\}\,.
\end{aligned}
$$

Multiplizieren wir den beiden Seiten $\alpha^{\mathfrak{K}+2}$, so folgt

$$
\begin{aligned}
a^{\mathfrak{R}+2}Q^i_{(s+1)} = {} & Q^{*i}_{(s+1)} + \Gamma^{*i}_{j}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)j}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} - (\mathfrak{R}+1)a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}Q^{*i}_{(s)} \\
& - (\mathfrak{R}+1)a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(2)}} \\
& + a\sum_{r=1}^{s} x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} DP^{*(u)i}_{(s)j}\cdot a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\omega^{*i}_{(s)} + \mathfrak{R}\mathfrak{A}^{*}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \mathfrak{R}a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}Q^{*i}_{(s)} \\
& + \mathfrak{R}a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
= {} & Q^{*i}_{(s+1)} + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s+1)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} - \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u-1)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}Q^{*i}_{(s)} - a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(2)}} \\
& + a\sum_{r=1}^{s} x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\left\{Q^{*i}_{(s)} + \sum_{r=0}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j}x^{\overset{*}{(r+1)}j}\right\}
\end{aligned}
$$

oder

$$
a^{\mathfrak{R}+2}Q^i_{(s+1)} = Q^{*i}_{(s+1)} + \sum_{r=1}^{s+1} x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s+1} P^{*(u)i}_{(s+1)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + A^i, \tag{21}
$$

wobei einfachheitshalber gesetzt sind:

$$
\begin{aligned}
A^i = {} & -x^{(s+1)k}P^{*(s)i}_{(s)k}a^{s+1\overset{*}{(1)}} - \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}P^{*(s)i}_{(s)k}a_r^{s+1\overset{*}{(1)}} - \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u-1)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& - a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)j}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)j}a_r^{u\overset{*}{(2)}} \\
& + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=0}^{s} P^{*(r)i}_{(s)j}x^{\overset{*}{(r+1)}j} + a\sum_{r=1}^{s} x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}}.
\end{aligned}
$$

Wir können mit Hilfe von (3) beweisen, dass die Grössen A^i identisch verschwinden; d. h.

$$
\begin{aligned}
A^i = {} & -(s+1)a^s a^{\overset{*}{(1)}}x^{(s+1)k}P^{*(s)i}_{(s)k} + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}P^{*(s)i}_{(s)j}x^{\overset{*}{(s+1)}j} \\
& + a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s} x^{\overset{*}{(r)}j}P^{*(r-1)i}_{(s)j} + a\sum_{r=1}^{s} x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& + \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\Bigg\{-P^{*(s)i}_{(s)k}a_r^{s+1\overset{*}{(1)}} - \sum_{u=r}^{s} P^{*(u-1)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& - a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(2)}}\Bigg\} \\
= {} & \sum_{r=1}^{s} x^{(r)k}\Bigg\{-P^{*(s)i}_{(s)k}a_r^{s+1\overset{*}{(1)}} - \sum_{u=r}^{s} P^{*(u-1)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
& - a^{-1}a^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(1)}} + \sum_{u=r}^{s} P^{*(u)i}_{(s)k}a_r^{u\overset{*}{(2)}}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}P^{*(s)i}_{(s)k}\sum_{r=1}^{s+1}\alpha_r^{s+1}x^{(r)k}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\sum_{r=1}^{s}x^{(r)k}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u-1)i}_{(s)k}\alpha_r^u \\
&+\alpha\sum_{r=1}^{s}x^{(r+1)k}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_r^{u\overset{*}{(1)}}-(s+1)\alpha^s\alpha^{\overset{*}{(1)}}x^{(s+1)k}P^{*(s)i}_{(s)k} \\
={}&P^{*(s)i}_{(s)k}x^{(s+1)k}\left\{\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha_{s+1}^{s+1}-(s+1)\alpha^s\alpha^{\overset{*}{(1)}}+\alpha\alpha_s^{s\overset{*}{(1)}}\right\} \\
&+\sum_{r=2}^{s}x^{(r)k}\Bigg\{-P^{*(s)i}_{(s)k}\alpha_r^{s+1\overset{*}{(1)}}-\sum_{u=r}^{s}P^{*(u-1)i}_{(s)k}\alpha_r^{u\overset{*}{(1)}} \\
&-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_r^{u\overset{*}{(1)}}+\sum_{u=r}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_r^{u\overset{*}{(2)}} \\
&+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}P^{*(s)i}_{(s)k}\alpha_r^{s+1}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=r}^{s}P^{*(u-1)i}_{(s)k}\alpha_r^u+\alpha\sum_{u=r-1}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_{r-1}^{u\overset{*}{(1)}}\Bigg\} \\
&+x^{(1)k}\Bigg\{-P^{*(s)i}_{(s)k}\alpha_1^{s+1\overset{*}{(1)}}-\sum_{u=1}^{s}P^{*(u-1)i}_{(s)k}\alpha_1^{u\overset{*}{(1)}}-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=1}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_1^{u\overset{*}{(1)}} \\
&+\sum_{u=1}^{s}P^{*(u)i}_{(s)k}\alpha_1^{u\overset{*}{(2)}}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}P^{*(s)i}_{(s)k}\alpha_1^{s+1}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\sum_{u=1}^{s}P^{*(u-1)i}_{(s)k}\alpha_1^u\Bigg\} \\
={}&\sum_{r=2}^{s}x^{(r)k}\Bigg\{P^{*(s)i}_{(s)k}\left(-\alpha_r^{s+1\overset{*}{(1)}}-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha_r^{s\overset{*}{(1)}}+\alpha_r^{s\overset{*}{(2)}}+\alpha\alpha_{r-1}^{s\overset{*}{(1)}}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha_r^{s+1}\right) \\
&+\sum_{u=r}^{s-1}P^{*(u)i}_{(s)k}\left(-\alpha_r^{u+1\overset{*}{(1)}}-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha_r^{u\overset{*}{(1)}}+\alpha_r^{u\overset{*}{(2)}}+\alpha^{-1}\alpha^{(1)}\alpha_r^{u+1}+\alpha\alpha_{r-1}^{u\overset{*}{(1)}}\right) \\
&+P^{*(r-1)i}_{(s)k}\left(-\alpha_r^{r\overset{*}{(1)}}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha_r^r+\alpha\alpha_{r-1}^{r-1\overset{*}{(1)}}\right)\Bigg\} \\
&+x^{(1)k}\Bigg\{P^{*(s)i}_{(s)k}\left(-\alpha^{(\overset{*}{s+2})}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha^{(\overset{*}{s+1})}-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha^{(\overset{*}{s+1})}+\alpha^{(\overset{*}{s+2})}\right) \\
&+\sum_{u=1}^{s-1}P^{*(u)i}_{(s)k}\left(-\alpha^{(\overset{*}{u+2})}-\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha^{(\overset{*}{u+1})}+\alpha^{(\overset{*}{u+2})}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha^{(\overset{*}{u+1})}\right) \\
&+P^{*(0)i}_{(s)k}\left(-\alpha^{\overset{*}{(1)}}+\alpha^{-1}\alpha^{\overset{*}{(1)}}\alpha\right)\Bigg\} \\
={}&0\,.
\end{aligned}
$$

Daraus erkennen wir, dass die durch (13) definierten Grössen $P^{(r)i}_{(s+1)j}$ bzw. $Q^i_{(s+1)}$ unter der Parametertransformation (1) dieselbe Eigenschaft wie $P^{(r)i}_{(s)j}$ bzw. $Q^i_{(s)}$ in $\Omega^i_{(s)}$ haben. Infolgedessen können wir wegen Satz 1 schliessen, dass die Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s+1)}$ unter der Parametertransformation das Gewicht $\mathfrak{K}+1$ haben, oder anders gesagt, $\Omega^i_{(s+1)}$ intrinsike Grössen in $K_n^{*(m+1)}$ oder in $K_n^{*(m)}$ sind. Die obigen Ergebnisse zusammenfassend erreichen wir

Satz 4. Sind die Pfaffschen Ausdrücke (5) *in* $K_n^{*(m)}$ *in bezug auf* i *kontravariant und vom Gewichte* $\mathfrak{K}$, *so bestimmen sich die neuen Pfaffschen Ausdrücke* (16), *die sich wie ein intrinsiker kontravarianter Vektor transformieren, vom Gewichte* $\mathfrak{K}+1$, *wenn zwei Grössen* Γ^i_j *und* $\mathfrak{A}$ *mit den Transformationsformeln* (12) *gegeben werden.*

5. Zum Schlusse wollen wir Anwendungen dieser Sätze zeigen. Wir ziehen erstens das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen $(m+1)$-ter Ordnung

$$x^{(m+1)i}+H^i(t, x^j, x^{(1)j}, \dots, x^{(m)j})=0$$

in Betracht[1]. In diesem Falle können die Übertragungsparameter Γ^i_j und $\mathfrak{A}$ aus H^i und ihren Ableitungen nach $x^{(m)j}$ bestimmt werden. Unsere Mannigfaltigkeit ist also im allgemeinen $K_n^{*(m)}$.

Wir gehen von den speziellen Ausdrücken dx^i vom Gewichte Null aus, und erhalten mit Hilfe von Satz 4 sukzessiv die folgenden intrinsiken kontravarianten Systeme der Pfaffschen Ausdrücke

$$\Omega^i_{(0)}=dx^i,\ \Omega^i_{(1)}=\mathfrak{D}\Omega^i_{(0)},\ \dots\dots\dots\dots,\ \Omega^i_{(m)}=\mathfrak{D}\Omega^i_{(m-1)}, \tag{22}$$

die bzw. vom Gewichte $1, 2, \dots, m$ sind. Diese Pfaffschen Ausdrücke $\Omega^i_{(s)}$ sind wegen $P^{(s)i}_{(s)j}=\delta^i_j$ von der Gestalt

$$\Omega^i_{(s)}=dx^{(s)i}+\sum_{r=0}^{s-1}P^{(r)i}_{(s)j}dx^{(r)j}+Q^i_{(s)}dt, \qquad s=0, 1, \dots, m, \tag{23}$$

in denen die Koeffizienten $P^{(r)i}_{(s)j}$, $Q^i_{(s)}$ infolge (13) durch die rekurrenten Formeln

$$\left\{\begin{aligned} &P^{(s)i}_{(s+1)j}=P^{(s-1)i}_{(s)j}+\Gamma^i_j+s\mathfrak{A}\delta^i_j=(s+1)\Gamma^i_j+\frac{s(s+1)}{2}\delta^i_j\mathfrak{A} \quad \text{für } 0\leqq s\leqq m-1,\\ &P^{(r+1)i}_{(s+1)j}=P^{(r-1)i}_{(s)j}+DP^{(r)i}_{(s)j}+\Gamma^i_kP^{(r)k}_{(s)j}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}P^{(r)i}_{(s)j}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } \ 0\leqq r, \quad r+2\leqq s\leqq m-1,\\ &P^{(0)i}_{(s+1)j}=DP^{(0)i}_{(s)j}+\Gamma^i_kP^{(0)k}_{(s)j}+s\mathfrak{A}P^{(0)i}_{(s)j} \qquad \text{für } 1\leqq s\leqq m-1,\\ &Q^i_{(s+1)}=\Gamma^i_kQ^k_{(s)}+DQ^i_{(s)}+\mathfrak{A}\omega^i_{(s)}+\mathfrak{K}\mathfrak{A}Q^i_{(s)} \qquad \text{für } 0\leqq s\leqq m-1\end{aligned}\right. \tag{24}$$

gegeben werden. Hierbei bedeutet die Ableitung D für die Grösse f in $K_n^{*(m)}$, dass

$$Df=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{r=0}^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x^{(r)i}}x^{(r+1)i}-\frac{\partial f}{\partial x^{(m)i}}H^i;$$

und alle Pfaffschen Ausdrücke (22) werden also in der Mannigfaltigkeit $K_n^{*(m)}$ enthalten. Da $\Omega^i_{(s)}(s=0, 1, \dots, m)$ in bezuf auf i kontravariant und unter den betreffenden Transformationen (1) und (4) invariant sind, können wir deshalb durch $\Omega^i_{(s)}$ die Grundübertragungen in der behandelten $K_n^{*(m)}$ definieren, und noch dazu die kovarianten Ableitungen einer vorgegebenen Grösse erhalten[2].

Wir wollen zweitens den sogenannten Kawaguchischen Raum, in dem die Bogenlänge einer parametrisierten Kurve $x^i=x^i(t)$ durch ein vom Linienelement m-ter Ordnung abhängiges Integral

$$s=\int F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(m)})\,dt \tag{25}$$

gegeben ist, betrachten. In diesem Raume ist das Übertragungsparameter Γ^i_j von A. Kawaguchi durch die Beziehung

1) S. Hokari, Zur neuen Behandlung der Geometrie des Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ., (I), **8** (1940), 47–62; Die intrinsike Theorie der Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Proc. **16** (1940), 332.

2) Der Fall $m=2$ ist bereits vom Verfasser behandelt worden; siehe Tokyo Butsuri-gakko Zasshi, **50** (1941).

$$\Gamma^i_j = g^{ik}\left(F^{2m-1}F_{(m)k(m)j} + \frac{1}{m}F^{2m-2}F_{(m)k}F_{(m-1)j}\right) \tag{26}$$

$$+\frac{1}{m}F^{-1}F^{(1)}(\delta^i_j + F^{-1}x^{(1)i}\overset{1}{\mathfrak{C}}_j) + F^{-1}x^{(1)i}\Xi_j$$

gegeben werden, wobei Γ^i_j im allgemeinen vom Linienelement $(2m-1)$-ter Ordnung abhängig ist[1]. Da die Bogenlänge von Parametrisierung der betreffenden Kurve unabhängig ist, oder anders gesagt, das Integral (25) unter der Parametertransformation (1) invariant ist, so muss die Funktion F der Beziehung $F^* = \alpha F$ genügen. Setzen wir dann

$$\mathfrak{A} = -\frac{d}{dt}\log F, \tag{27}$$

so lautet $\alpha\overset{*}{\mathfrak{A}} = \alpha^2\mathfrak{A} - \alpha^{(1)}$; deshalb ergeben sich in diesem Falle zwei Grössen Γ^i_j und $\mathfrak{A}$ in $K^{(2m-1)}_n$. Wie wir schon gesehen haben, können wir die $2m-1$ Pfaffschen Ausdrücke

$$\Omega^i_{(0)}(=dx^i)\,,\quad \Omega^i_{(1)}\,,\quad \Omega^i_{(2)}\,,\ \ldots\ldots\ldots\,,\quad \Omega^i_{(2m-1)}$$

bilden. Diese geben uns die Grundübertragungen in dem Kawaguchischen Raume $K^{(2m-1)}_n$.

In den Koeffizienten dieser Pfaffschen Ausdrücke treten die Linienelemente höherer Ordnung als $(2m-1)$-ter ein, und mithin müssen wir für $x^{(2m)i}$ die von den Eulerschen Gleichungen

$$\overset{0}{E}_i = \sum_{\beta=0}^{m}(-1)^\beta F_{\dot{(\beta)}i}{}^{:(\beta)} = (-1)^m\{F_{(m)i(m)j}x^{(2m)j} + H_i\} = 0$$

erhaltenen Grössen

$$x^{(2m)i} = H^i + \Phi x^{(1)i}$$

einsetzen. Wir können in diesem Falle beweisen, dass die kovarianten Ableitungen von f, welche unter der Parametertransformation das Gewicht Null hat, als die Koeffizienten von $\Omega^i_{(0)}, \Omega^i_{(1)}, \ldots, \Omega^i_{(2m-1)}$ in ihrem kovarianten Differentiale erhalten werden und der Koeffiziente von dt identisch verschwindet.

---

1) A. Kawaguchi, Theory of Connections in a Kawaguchi Space of Higher Order, Proc. **13** (1937), 237–240.