91. Existence de Solutions Locales pour Quelques Opérateurs Différentiels

Par Mutsuhide MATSUMURA
Université de Kyoto
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1961)

1. *Introduction.* Nous savons que l'équation aux dérivées partielles:

$$P(x, D)u=f$$

n'admet pas toujours une solution (locale) pour toute f donnée (voir [5]). Les travaux récents de M. L. Hörmander [2], [3] ont élucidé cette situation de la manière suivante:

Soit $C_{2m-1}(x, D)$ la partie homogène d'ordre $2m$-1 dans le commutateur $\bar{P}_m(x, D)\cdot P_m(x, D)-P_m(x, D)\cdot \bar{P}_m(x, D)$ où $\bar{P}_m$ est l'opérateur obtenu en prenant la conjugaison complexe des coefficients de la partie principale P_m de P.

a) Il existe un voisinage $\Omega_\eta=\{x; |x-x^0|\langle\eta\}$ d'un point x^0 tel que l'équation $P(x, D)u=f$ admet toujours une solution $u\in L^2(\Omega_\eta)$ pour toute $f\in L^2(\Omega_\eta)$, si $P(x, D)$ satisfait à deux conditions suivantes

1° $$\sum_j \left|\frac{\partial P_m}{\partial \xi_j}(x^0, \xi)\right|^2 \neq 0 \qquad \text{pour tout } \xi\neq 0.^{1)}$$

2° On peut trouver un polynôme $Q(x, \xi)$ de degré $m-1$ en ξ tel qu'on ait

$$C_{2m-1}(x, \xi)=\bar{Q}(x, \xi)P_m(x, \xi)+Q(x, \xi)\bar{P}_m(x, \xi)$$

dans un voisinage de x^0 et pour tout ξ.

b) Pour que l'équation $P(x, D)u=f$ ait une solution $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ pour toute $f\in\mathcal{D}(\Omega)$, il faut que $C_{2m-1}(x, \xi)=0$ si $P_m(x, \xi)=0$ $x\in\Omega, \xi$. Le but de cette Note est d'étendre les résultats ci-dessus en interprétant du point de vue des caractéristiques. Plus précisément, M. Hörmander a traité des opérateurs à caractéristiques simples réelles. Par contre, nous traiterons des opérateurs à caractéristiques multiples réelles. Mais nous sommes obligés en essence de nous borner au cas où les multiplicités sont invariantes par rapports à x et ξ.

2. Commençons par le cas élémentaire et d'ailleurs fondamental:

$$L=\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda$$

où H est un opérateur intégral singulier de classe

1) ξ désignera dans la suite toujours un vecteur réel.

$$\sigma(H)=\frac{p(x,t,\xi)}{|\xi|}+i\frac{q(x,t,\xi)}{|\xi|}\in C_\beta^\infty,\ \text{avec}\ \beta=+\infty^{2)}$$

p et q étant des fonctions réelles. Pour simplifier les notations, nous discuterons toujours au voisinage de l'origine, car il s'agit de l'existence de solutions locales.

Par abus de langage nous dirons que L est elliptique et hyperbolique au voisinage de l'origine, si $q(0,0,\xi)\neq 0$ et $q(x,t,\xi)\equiv 0$ respectivement. Dans ces cas, on voit facilement qu'il existe un voisinage (petit) $\Omega_\eta=\{x:|x|<\eta\}$ tel que $Lu=f$ admet toujours une solution $u\in L^2(\Omega_\eta)$ pour toute $f\in L^2(\Omega_\eta)$. Nous allons aussi traiter le cas où il y a un $\xi^0\neq 0$ tel que $q(0,0,\xi^0)=0$.

Il faut noter que si l'on n'impose aucune condition pour le comportement de $q(x,t,\xi)$ au voisinage de l'origine, on ne peut pas garantir l'existence des solutions locales pour $Lu=f$ (voir [3], [5]).

Par abus de langage nous appelons $\lambda-p(x,t,\xi)$ la forme caractéristique correspondante à la partie hyperbolique de L. Alors nous pouvons considérer les bicaractéristiques correspondantes à cette forme:

$$\frac{dx_j}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial \xi_j}(x,t,\xi)$$
$$\frac{d\xi_j}{dt}=+\frac{\partial p}{\partial x_j}(x,t,\xi).$$

On entend par $\dfrac{dq}{dt}$ la dérivée suivant la direction des bicaractéristiques. Alors elle a l'expression

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial q}{\partial t}-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q}{\partial x_j}\frac{\partial p}{\partial \xi_j}-\frac{\partial q}{\partial \xi_j}\frac{\partial p}{\partial x_j}\right).$$

Maintenant nous supposons qu'elle est proportionnelle à $q(x,t,\xi)$ au voisinage de l'origine, c'est-à-dire, il existe $r(x,t,\xi)\in C_\beta^\infty$, avec $\beta=+\infty$ telle que

$$(\mathscr{H})\qquad \frac{dq}{dt}=r(x,t,\xi)q(x,t,\xi)$$

pour tout ξ et (x,t) voisin de l'origine $(x,t)=(0,0)$.
Cette condition est toujours satisfaite pour l'opérateur L elliptique ou hyperbolique.

Dans cette condition $(\mathscr{H})$, on a la

Proposition 2.1. Il existe un nombre réel η_0 tel que, pour $\eta<\eta_0$ et toute $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega_\eta)$, on ait

$$\|\varphi\|\leq M\eta\|L[\varphi]\|,^{3)}$$

2) Le symbole dépend du t, mais on considère t comme paramètre dans ce qui suit. Donc, Λ signifie un opérateur de convolution tel que l'image de Fourier $\hat{\Lambda}(\xi)=|\xi|$.

3) Nous écrivons désormais, sauf mention expresse, $\|\ \|$ au lieu de $\|\ \|_{L^2(x,t)}$. Le produit scalaire associé sera noté $(\,,\,)$ avec $\int f\bar{g}\,dx\,dt$.

où M est une constante qui dépend de L, mais pas de φ et de η. Pour démontrer cette proposition, il faut utiliser la théorie de l'opérateur intégral singulier due à M. M. Calderón et Zygmund [1] et quelques techniques inventées dans M. S. Mizohata [6], [7] et M. M. Yamaguti [8].

Preuve. Nous indiquerons seulement le principe. De la formule

$$\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)(t\varphi)-t\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi$$

il résulte $\|\varphi\|^2=\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)(t\varphi),\varphi\right)-\left(t\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi,\varphi\right)$

$$=-\left(t\varphi,\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\varphi\right)-\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi,t\varphi\right).$$

En vertu de l'inégalité de Schwarz, on a

$$\|\varphi\|\leq\eta\left\{\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi\right\|+\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\varphi\right\|\right\}\text{pour toute } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega_\eta).$$

Pour estimer $\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\varphi\right\|$ par $\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi\right\|$ et $\|\varphi\|$, nous considérons $\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\varphi\right\|^2-\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi\right\|^2$

$$=\left(\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\right\}\varphi,\varphi\right).$$

Pour obtenir l'inégalité désirée, il suffit de démontrer

$$\left(\left\{i\left(\Lambda\frac{\partial H^*}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial t}\Lambda\right)+(H\Lambda^2H^*-\Lambda H^*H\Lambda)\right\}\varphi,\varphi\right)$$

$$\leq M'\|\varphi\|^2+\frac{1}{\rho}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-iH\Lambda\right)\varphi\right\|^2+\frac{1}{\rho}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}-i\Lambda H^*\right)\varphi\right\|^2,$$

où $\rho>1$ et M' est une constante qui dépend de L, mais pas de φ. On peut vérifier cette inégalité en utilisant deux lemmes suivants et l'hypothèse $(\mathcal{H})$.

Lemme 2.1. Soient V et V' deux voisinages bornés d'un point (x^0,t^0) tels que $\overline{V'}\subset V$ et H un opérateur intégral singulier tel que $\sigma(H)(x,t,\xi)=0$ pour $(x,t)\in V$. Alors, on a l'inégalité:

$$\|H\Lambda^m\varphi\|\leq M\|\varphi\| \qquad \text{pour toute } \varphi\in\mathcal{D}(V'),$$

où m est un entier et M est une constante qui dépend de H, V' et m, mais pas de φ.

Lemme 2.2. Soient H et K deux opérateurs intégraux singuliers de classe

$$\sigma(H)=h(x,t,\xi),\quad \sigma(K)=k(x,t,\xi)\in C^\infty_\beta,\ \text{avec } \beta=+\infty$$

on peut alors exprimer

1) $\Lambda H = H\Lambda + H_0 + A_1$ où $\sigma(H_0) = -i\sum_j \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_j}(|\xi|)$ [4]

2) $H^* = H^\# + H_1'$

3) $\Lambda H^\# = H^\#\Lambda + H_0'' + A_1''$ où $\sigma(H_0'') = -i\sum_j \frac{\partial \tilde{\tilde{h}}}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_j}(|\xi|)$

4) $HK - H\circ K = C_0 + C_1$ où $\sigma(C_0) = -i\sum_j \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x_j}$

où H_0, H_0'', C_0 sont des opérateurs continus de L^2 dans lui-même, et A_1, H_1', A_1'', C_1 sont des opérateurs continus de L^2 dans lui-même avec ΛA_1, $A_1\Lambda$, $\Lambda H_1'$, $H_1'\Lambda$, $\cdots$ etc.

La démonstration est un peu délicate, mais on peut les montrer de la même manière que dans M. S. Mizohata [6], [7].

3. Maintenant on considère l'opérateur kowalewskien:

$$P(x,t,D) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m - \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}. \tag{3.1}$$

On suppose ici $a_\alpha(x,t,) \in \le \mathcal{E}(V)$ où V est un voisinage de l'origine $(x,t)=(0,0)$. Désignons par $P(x,t,\xi,\lambda)$ la partie principale de l'opérateur P. Désignons les racines en λ de $P_m(x,t,\xi,\lambda)=0$ par $\lambda_j(x,t,\xi)$ $(j=1,2,\cdots,m)$

$$\lambda_j(x,t,\xi) = p_j(x,t,\xi) + iq_j(x,t,\xi). \tag{3.2}$$

Parmi les λ_j, laissons de côté des λ_j telles que $q_j(0,0,\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$. En écrivant,

$$P_m(x,t,\xi,\lambda) = (\lambda - \lambda_1(x,t,\xi))^{\nu_1}\cdots(\lambda-\lambda_k(x,t,\xi))^{\nu_k}Q(x,t,\xi,\lambda),$$

où Q est un polynôme en ξ provenant des facteurs elliptiques, on suppose ici d'abord:

1° $\lambda_j(x,t,\xi/|\xi|)$[5] $\in C_\beta^\infty$, avec $\beta = +\infty$.

2° Si éventuellement $\lambda_i = \lambda_j$ $(i \neq j)$ pour un point $(x^0, t^0; \xi^0)$, ils doivent être en conjugé pour tout $(x,t) \in V$ et ξ: $\lambda_i(x,t,\xi) = \overline{\lambda_j(x,t,\xi)}$.

3° Toutes les $q_j(x,t;\xi)$ $(j=1,2,\cdots,k)$ satisfont à la condition $(\mathcal{H})$.

Posons $\delta_j = \frac{\partial}{\partial t} - iH_j\Lambda$ $(j=1,2,\cdots k)$, où $\sigma(H_j) = \lambda_j(x,t,\xi/|\xi|)$. Soit $\Pi_\nu = \delta_1^{\nu_1}\cdot\delta_2^{\nu_2}\cdots\delta_k^{\nu_k}$.

---

4) $\tilde{h}(x,\xi)$ désigne $\alpha(\xi)h(x,\xi)$ où $\alpha(\xi)$ est une fonction indéfiniment dérivable telle que

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |\xi| \le R \\ 1 & \text{pour } |\xi| \ge R \\ 0 \le \alpha(\xi) \le 1, & \text{pour } R \le |\xi| \ge 2R. \end{cases}$$

5) $\lambda_j(x,t,\xi)$ n'est définie qu' au voisinage de l'origine $(x,t)=(0,0)$, mais en remplaçant au besoin $P(x,t,D)$ par $\alpha(x)P(x,t,D) + (1-\alpha(x))P(0,t,D)$, on peut considérer $\lambda_j(x,t,\xi/|\xi|)$ comme un symbole d'opérateur intégral singulier où $\alpha(x)=1$ dans un petit voisinage de $x=0$. Alors le symbole satisfait à 1°, 2°, pour tout x.

Ensuite, pour les termes d'ordre inférieur, on suppose que l'opérateur différentiel (3.1) peut s'exprimer de la manière suivante:

4° $$P(x,t,D)=N_\nu\cdot\Pi_\nu+\sum_\mu N_\mu\cdot\Pi_\mu,$$

où N_μ sont des opérateurs vérifiant

$$\| N_\mu(t)\varphi \| \leq M \sum_{i+j\leq m-|\nu|} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i \Lambda^j \varphi \right\| \qquad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}(V)$$

et N_ν est l'opérateur correspondant à Q, Π_μ étant des opérateurs en forme de $\delta_1^{\nu_1-\mu_1}\cdots\delta_k^{\nu_k-\mu_k}$ $|\mu|\neq 0$ $(\nu_j\geq\mu_j)$.

Théorème 3.1. *Sous les conditions énumérées ci-dessus* (1°, 2°, 3°, 4°), *il existe un voisinage* $\Omega_\eta=\{(x,t);\sqrt{|x|^2+t^2}<\eta$ (*petit*)$\}$ *tel que l'équation* $P(x,t,D)u=f$ *admet toujours au moins une solution* $u\in L^2(\Omega_\eta)$ *dans le sens de distribution pour toute* $f\in L(\Omega_\eta)$.

Un article ultérieur donnera la démonstration détaillée avec des résultats concernant le cas des systèmes. Ces travaux ont été inspirés par S. Mizohata [6], [7], M. Yamaguti [8] et A. Lax [4].

En terminant ce Note, l'auteur voudrait exprimer une vive gratitude à MM. Professeurs S. Mizohata et M. Yamaguti pour leurs suggestions et leurs conseils.

Références

[1] A. P. Calderón and A. Zygmund: Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., **79**, 901–921 (1957).

[2] L. Hörmander: Differential operators of principal type, Math. Ann., **140**, 124–146 (1960).

[3] L. Hörmander: Differential equations without solutions, Math. Ann., **140**, 169–173 (1960).

[4] A. Lax: On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure Appl. Math., **9**, 135–168 (1956).

[5] H. Lewy: An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. Math., (2) **66**, 155–158 (1957).

[6] S. Mizohata: Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., ser. A, **31**, 219–239 (1958).

[7] S. Mizohata: Systèmes hyperboliques, J. Math. Soc. Japan, **11**, 205–233 (1959).

[8] M. Yamaguti: Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrale singulière, Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ., ser. A, **32**, 121–151 (1959).