3. Über die Stetigkeit des normierten teilweise geordneten Moduls.

Von Hidegorô NAKANO.
Mathematical Institute, Tokyo Imperial University.
(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., Jan. 12, 1943.)

In einer früheren Abhandlung[1] haben wir die Stetigkeit des normierten teilweisegeordneten Moduls definiert: ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ heisst *stetig*, wenn für $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ stets $\lim\limits_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$ ist; $\mathfrak{M}$ heisst *universal stetig*, wenn für jede abnehmende Menge positiver Elemente $\{a_\alpha\}$ mit $\bigcap\limits_\alpha a_\alpha = 0$ stets

$$\text{Untere Grenze}_{\alpha} \|a_\alpha\| = 0$$

ist. Hier wollen wir bemerken, dass wenn $\mathfrak{M}$ stetig ist, $\mathfrak{M}$ auch universal stetig ist.

Satz. Wenn ein normierter teilweisegeordneter Modul $\mathfrak{M}$ stetig ist, so ist $\mathfrak{M}$ superuniversal und folglich universal stetig[2].

Beweis. $\{a_\alpha\}$ sei eine abnehmende Menge positiver Elemente. Setzt man

$$\lambda = \text{Unter Grenze}_{\alpha} \{\text{Obere Grenze}_{\beta:\, a_\alpha \geq a_\beta \in \{a_\alpha\}} \|a_\alpha - a_\beta\|\},$$

so ist $\lambda = 0$. Denn sonst gäbe es für $\lambda > \varepsilon > 0$ eine Folge $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots$ in $\{a_\alpha\}$, für welche

$$\|b_\nu - b_{\nu+1}\| > \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

besteht, und für $b_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu$ gälte sodann

$$\varepsilon < \|b_\nu - b_{\nu+1}\| \leqq \|b_\nu - b_0\|,$$

was nach Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ unmöglich ist.

Wegen $\lambda = 0$ kann man aus $\{a_\alpha\}$ eine Folge $a'_1, a'_2, \ldots$ auswählen, für welche

$$\text{Obere Grenze}_{\alpha:\, a'_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}} \|a'_\nu - a_\alpha\| < \frac{1}{2^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Da $\{a_\alpha\}$ abnehmend ist, gibt es dann eine Folge $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$ in $\{a_\alpha\}$, für welche $a'_\nu \geqq a_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ist, und für diese neue Folge gilt auch

$$(*) \qquad \text{Obere Grenze}_{\alpha:\, a_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}} \|a_\nu - a_\alpha\| \leqq \text{Obere Grenze}_{\alpha:\, a'_\nu \geq a_\alpha \in \{a_\alpha\}} \|a'_\nu - a_\alpha\| < \frac{1}{2^\nu}.$$

---

1) H. Nakano: Stetige lineare Funktionale auf dem teilweisegeordneten Modul, Jour. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **4**, 201–382 (1942).

2) Diesen Satz haben wir unter der stärkeren Voraussetzung bewiesen: aus $|a| < |b|$ folgt $\|a\| < \|b\|$. Vgl. 1) Satz 14.1.

Setzt man $a_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$, so gilt nach Stetigkeit von $\mathfrak{M}$ wegen (*)

$$\| a_\nu - a_0 \| \leqq \frac{1}{2^\nu}$$

und für jedes $a_\alpha \in \{a_\alpha\}$

$$(**) \qquad \| (a_\nu \frown a_\alpha) - (a_0 \frown a_\alpha) \| \leqq \| a_\nu - a_0 \|^{1)} \leqq \frac{1}{2^\nu} .$$

Da $\{a_\alpha\}$ abnehmend ist, gibt es ein $a_\beta \in \{a_\alpha\}$, für das $a_\nu \frown a_\alpha \geqq a_\beta$ ist. Dann gilt nach (*)

$$\| a_\nu - (a_\nu \frown a_\alpha) \| \leqq \| a_\nu - a_\beta \| < \frac{1}{2^\nu} .$$

Daher besteht nach (**)

$$\| a_\nu - (a_0 \frown a_\alpha) \| < \frac{1}{2^{\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, \dots) .$$

Da $\mathfrak{M}$ nach Voraussetzung stetig ist, folgt hieraus wegen $a_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$

$$\| a_0 - (a_0 \frown a_\alpha) \| = 0 .$$

Hieraus ergibt sich

$$a_0 = a_0 \frown a_\alpha , \quad \text{d. h.} \quad a_0 \leqq a_\alpha .$$

Daher ist $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \bigcap\limits_\alpha a_\alpha$.

---

1) $a_\nu \frown a_\alpha \leqq (a_0 + a_\nu - a_0) \frown (a_\alpha + a_\nu - a_0) = (a_0 \frown a_\alpha) + a_\nu - a_0$.