92. Sur la réductibilité des anneaux des opérateurs.

Par Motokiti KONDÔ.
L'institut mathématique, l'université impériale de Kyusyu, Fukuoka.
(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., July 12, 1944.)

Le but de cette note est de rechercher la réductibilité des anneaux des opérateurs. Comme nous avons vu dans une autre note[1], il y a les diverses définitions des sommes directes des espaces et nous devons considérer les réductibilités des anneaux des opérateurs qui correspondent à celles. Et, les propriétés globaux des réductibilités ont synthetisée par celles qui correspondent aux sommes directes des espaces. Or, dans cette note, nous nous bornons de la voir au point des sommes directes (L_p).

Le résultat principal de cette note est de donner la décomposition complète d'un anneaux $\mathscr{M}$ des opérateurs en les anneaux $\mathscr{M}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ des opérateurs de manière que

(1) $\mathscr{M}$ est une somme directe (L_p) de $\mathscr{M}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$,

(2) quand $\mathscr{M}$ est une somme directe (L_p) des idéaux $\mathscr{M}^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ de deux côtés de $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ sont aussi les sommes directes (L_p) de quelques de $\mathscr{M}_\lambda$,

et c'est une extension directe du résultat annoncé de M. J. v. Neumann[3] sur les anneaux réductibles des opérateurs d'un espace hilbertien. De plus, la démonstration de notre résultat est du de "Somentheorie" de M. C. Caratheodory[4] et il me parait qu'il est une des applications intéressantes de ce théorie.

1. Soient $\mathfrak{B}$ un espace linéaire, normé et complet, et $\mathscr{M}$ un anneau borné des opérateurs[2] sur celui. Quand un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}$ remplit les conditions :

1) $A_k \in \mathscr{A}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ entrainent $\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \in \mathscr{A}$ $(\sum_{k=1}^{n} B_k A_k \in \mathscr{A})$ pour les éléments B_k $(k=1, 2, \dots, n)$ de $\mathscr{M}$,

2) $\mathscr{A}$ est fermé dans $\mathscr{M}$ par rapport à quelque topologie,

nous l'appelons un idéal droit (gauche) de $\mathscr{M}$, et quand $\mathscr{A}$ est un idéal droit et celui gauche en même temps, nous l'appelons un idéal de deux côtés.

Puis, lorsqu'il existe les idéaux droits $\mathscr{A}_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$ de $\mathscr{M}$ tels que tout élément A de $\mathscr{M}$ peut être écrire univoquement sous la forme $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, où $A_k \in \mathscr{A}_k$ $(k=1, 2, \dots, n)$, nous dirons que $\mathscr{M}$ est une somme directe de $\mathscr{A}_k$, et nous désignons ce fait par

---

1) M. Kondô, Sur les sommes directes des espaces linéaires, paru dans ce journal.

2) Pour les terminologies, voir ma note, M. Kondô, Les anneaux des opérateurs et les dimensions, paru dans ce journal.

3) Il est annoncé dans sa mémoire, J. v. Neumann, On infinite direct products. Comp. Math., t. **6** (1939).

4) C. Caratheodory, Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs, Münch. Sitzungsberichte, 1938, et Über die Differentiation von Massfunktionen. Math. Zeitschrift. t. **46** (1940).

$\mathscr{M}=\mathscr{A}_1\oplus\mathscr{A}_2\oplus\cdots\oplus\mathscr{A}_n$. De même, nous définirons une somme directe des idéaux gauches et celle des idéaux de deux côtés.

(1.1) Quand un anneau borné $\mathscr{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$ est une somme directe des idéaux droits $\mathscr{A}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, il existe les projections I_k $(k=1,2,\ldots,n)$ de $\mathscr{M}$ telles qu'on ait

1) $\mathscr{A}_k=I_k\mathscr{M}$,

2) $I=\sum_{k=1}^{n} I_k$,

3) $I_iI_j=0$ pour $i\neq j$ et $I_iI_i=I_i$.

Inversement, quand il existe dans $\mathscr{M}$ les éléments I_k $(k=1,2,\ldots,n)$ qui remplissent les conditions 2) et 3), $\mathscr{A}_k=I_k\mathscr{M}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ sont les idéaux droits de $\mathscr{M}$ et il est une somme directe de ceux.

(1.2) Quand un anneau borné $\mathscr{M}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}$ est une somme directe des idéaux de deux côtés $\mathscr{A}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, nous avons $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=0$ pour $i\neq j$ et $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_i=\mathscr{A}_i$, et de plus quand nous avons $I=\sum_{k=1}^{n} I_k$ et $I_k\in\mathscr{A}_k$, ils remplissent 1)–3) de (1.1) et

4) $AI_k=I_kA$ $(k=1,2,\ldots,n)$ pour tout élément A de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire, I_k appartiennent au commutateur borné de $\mathscr{M}$.

Inversement, quand il existe les sous-ensembles $\mathscr{A}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ de $\mathscr{M}$ qui remplissent les conditions 1)–4) au-dessus, $\mathscr{A}_k$ sont tous les idéaux de deux côtés de $\mathscr{M}$ et il est une somme directe de ceux.

(1.3) Quand les projections I_k $(k=1,2,\ldots,n)$ de (1.2) remplissent les égalités $|I_kf|^p+|(I-I_k)f|^p=|f|^p$ $(p\geqq 1)$ pour tout élément f de $\mathfrak{B}$, $\mathscr{M}$ est une somme directe (L_p) de $\mathscr{A}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ donnés précédent.

(1.4) Quand nous posons $\mathfrak{M}_k=I_k\mathfrak{B}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ pour les projections I_k de (1.2), nous avons

1) $\mathfrak{B}$ est une somme directe de $\mathfrak{M}_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$, et de plus quand I remplissent les égalités de (1.3), $\mathfrak{B}$ est une somme directe (L_p) de ceux,

2) $\mathscr{M}$ est réductible sur $\mathfrak{M}_k$, c'est-à-dire, nous avons $Af\in\mathfrak{M}_k$ pour tout élément f de $\mathfrak{M}_k$ et celui A de $\mathscr{M}$.

2. Nous désignons par $\mathbb{I}(\mathscr{M})$ l'ensemble de tous les idéaux de deux côtés de $\mathscr{M}$ qui donnent la décomposition en les sommes directes, par $\mathbb{P}(\mathscr{M})$ celui de toutes projections I' de $\mathscr{M}$ telles que $I'\mathscr{M}$ appartiennent à $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ et par $\mathbb{Z}_0(\mathscr{M})$ celui de tous les sous-ensembles linéaires et fermés $J\mathfrak{B}$, où $J\in\mathbb{P}(\mathscr{M})$.

(2.1) $\mathbb{L}(\mathscr{M})$ est une algèbre boolienne, quand $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ désigne le plus petit idéal de deux côtés qui contient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ en même

1) Nous entendrons par la projection P sur $\mathfrak{B}$ un opérateur linéaire et borné sur $\mathfrak{B}$ tel qu'on ait $P^2=P$.

temps, et $\mathscr{A} \frown \mathscr{B}$ désigne le plus grand idéal de deux côtés contenu dans $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ en même temps.

(2.2) $\mathbb{P}(\mathscr{M})$ est une algèbre boolienne, quand nous écrivons $P \smile Q = (P+Q)-PQ$ et $P \frown Q = PQ$.

(2.3) $\mathbb{Z}_0(\mathscr{M})$ est une algèbre boolienne, quand $\mathfrak{M} \smile \mathfrak{N}$ désigne le plus petit sous-ensembles linéaire et fermé de $\mathfrak{B}$ qui contient $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ en même temps et $\mathfrak{M} \frown \mathfrak{N}$ désigne le plus grand sous-ensemble linéaire et fermé contenu dans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ en même temps.

(2.4) $\mathbb{I}(\mathscr{M})$, $\mathbb{P}(\mathscr{M})$ et $\mathbb{Z}_0(\mathscr{M})$ sont isomorphiques deux-à-deux.

(2.5) Quand nous désignons par $\mathbb{P}_0(\mathscr{M})$ l'ensemble de toutes les projections contenues dans le centre de $\mathscr{M}$, nous avons $\mathbb{P}(\mathscr{M}) = \mathbb{P}_0(\mathscr{M})$.

(2.6) Quand nous désignons par $\mathbb{Z}(\mathscr{M})$ le centre de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$, nous avons $\mathbb{Z}_0(\mathscr{M}) = \mathbb{Z}(\mathscr{M}) \frown \mathbb{Z}(\mathscr{M}')$.

3. Maintenant, nous considérons la relation entre la décomposition de $\mathscr{M}$ en les idéaux de deux côtés et la somme directe (L_p) $(p \geqq 1)$. Pour cela, nous introduissons la notion de la mesurabilité sur les projections de $\mathbb{P}(\mathscr{M})$. Etant donné une projection P de $\mathbb{P}(\mathscr{M})$, quand nous avons pour tout élément f de $\mathfrak{B}$

$$|Pf|^p + |(I-P)f|^p = |f|^p,$$

nous dirons que P est sommable (L_p) et nous désignons par $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ l'ensemble de toutes les projections sommables (L_p) de $\mathbb{P}(\mathscr{M})$ et par $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ celui de tous les sous-ensembles linéaires et fermés $P\mathfrak{B}$, où $P \in \mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$.

(3.1) Quand une projection P appartient à $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$, $(I-P)$ appartient aussi à $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ et $|P| = |(I-P)| = 1$.

(3.2) Si les projections P_α $(\alpha \in I)$ appartiennent à $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ et $P_\alpha P_\beta = 0$ pour $\alpha \neq \beta$, la somme $P = \sum_{\alpha \in I} P_\alpha$[1] est aussi une projection et appartient à $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$.

(3.3) $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ est une algèbre boolienne complète au sens de (2.2) et $\mathbb{Z}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ est aussi celle au sens de (2.3).

(3.4) Nous pouvons donner une mesure $m(\mathfrak{M})$ pour les éléments de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ de manière que

1) $m(\mathfrak{M}) \geqq 0$ et $m(\mathfrak{M}) = 0$ entraine $\mathfrak{M} = 0$,
2) quand les éléments $\mathfrak{M}_\alpha$ $(\alpha \in I)$ sont disjoints deux-à-deux, nous avons $m(\bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{M}_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} m(\mathfrak{M}_\alpha)$,
3) $m(\mathfrak{M}) = +\infty$ entraine l'existence des éléments $\mathfrak{M}_k$ $(k=1, 2, \dots)$ de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ tels qu'on ait $\mathfrak{M}_k \leqq \mathfrak{M}_{k+1} \leqq \mathfrak{M}$, $m(\mathfrak{M}_k) < +\infty$ $(k=1, 2, \dots)$ et $\lim_{k \to \infty} m(\mathfrak{M}_k) = +\infty$.

---

1) Pour chaque élément f de $\mathfrak{B}$, $Pf = \sum_{\alpha \in I} P_\alpha f$ désigne la limite au sens de MM. E. H. Moore et H. L. Smith des éléments $(P_{\alpha_1} f + P_{\alpha_2} f + \cdots P_{\alpha_n} f)$, où $\alpha_1, \dots \alpha_n \in I$.

(3.5) Quand nous désignons par $[\mathfrak{M}]$ l'ensemble de tous les idéaux maximaux de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathcal{M})$ qui ne contiennent pas $\mathfrak{M}$ et par $m([\mathfrak{M}])$ la mesure $m(\mathfrak{M})$, nous avons

1) $[\mathfrak{M}\cup\mathfrak{N})=[\mathfrak{M}]\cup[\mathfrak{N}]$ et $[\mathfrak{M}\cap\mathfrak{N}]=[\mathfrak{M}]\cap[\mathfrak{N}]$,
2) $[0]=0$,
3) $m([\mathfrak{M}])\geqq 0$ et $m([\mathfrak{M}])=0$ entraine $\mathfrak{M}=0$,
4) $[\mathfrak{M}]\cap[\mathfrak{N}]=0$ entraine $m([\mathfrak{M}]\cup[\mathfrak{N}])=m([\mathfrak{M}])+m([\mathfrak{N}])$.

(3.6) Nous pouvons prolonger $m([\mathfrak{M}])$ sur les sous-ensembles de $[\mathfrak{B}]$ de manière que

1) la famille $\mathbb{F}$ de tous les sous-ensembles de $[\mathfrak{B}]$ sur lesquels $m([\mathfrak{M}])$ est prolongée est un corps complet,
2) pour les ensembles disjoints $\mathfrak{P}_k$ $(k=1,2,\dots)$ de $\mathbb{F}$, nous avons $m(\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathfrak{P}_k)=\sum_{k=1}^{\infty}m(\mathfrak{P}_k)$.

(3.7) Pour chaque élément f de $\mathfrak{B}$, nous posons $\Phi(f,\mathfrak{M})=|Pf|^p$, où $p\geqq 1$ et P désigne une projection de $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathcal{M})$ telle qu'on ait $\mathfrak{M}=P\mathfrak{B}$. Elle est alors une fonction additives complètement sur $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathcal{M})$ et donc en posant $\Phi(f,[\mathfrak{M}])=\Phi(f,\mathfrak{M})$, nous pouvons la prolonger sur $\mathbb{F}$ de façon qu'elle est complètement additive.

(3.8) Il existe une "Ortsfunktion" $\theta(f,r)$ de M. C. Caratheory sur $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathcal{M})$ telle qu'on ait pour tout élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathcal{M})$

$$\Phi(f,\mathfrak{M})=\int_{\mathfrak{M}}\theta(f,r)dm\,.$$

Alors, une fonction $\Psi(f,\mathfrak{n})$ est déterminée univoquement sur $[\mathfrak{B}]$ par les égalités $\underset{\mathfrak{n}}{\mathrm{Ens}}\left(\Psi(f,\mathfrak{n})\geqq r\right)=\theta(f,r)$ pour tout nombre réel r et nous avons pour tout élément Γ de $\mathbb{F}$

$$\Phi(f,\Gamma)=\int_{\Gamma}\Psi(f,\mathfrak{n})dm\,.$$

4. Alors, s'il existe un nombre positif M tel qu'on ait $\Psi(f,\mathfrak{n})<M$ pour tout élément $\mathfrak{n}$ de $[\mathfrak{B}]$, nous dirons que f est borné, et sinon, il est non borné. Or, au grâce de (3.8), nous pouvons classifier les éléments bornés de $\mathfrak{B}$ en les classes comme il suit, c'est-à-dire, pour un élément $\mathfrak{n}$ de $[\mathfrak{B}]$, nous dirons que deux élements bornés f et g de $\mathfrak{B}$ équivalents l'un l'autre en $\mathfrak{n}$, si nous avons $\Psi(f-g,\mathfrak{n})=0$, et nous désignons ce fait par $f\equiv g\pmod{\mathfrak{n}}$.

(4.1) (i) $f\equiv g\pmod{\mathfrak{n}}$ est déterminé univoquement pour f et g, (ii) $f\equiv f\pmod{\mathfrak{n}}$, (iii) $f\equiv g\pmod{\mathfrak{n}}$ entraine $g\equiv f\pmod{\mathfrak{n}}$, (iv) $f\equiv g\pmod{\mathfrak{n}}$ et $g\equiv h\pmod{\mathfrak{n}}$ entrainent $f\equiv h\pmod{\mathfrak{n}}$. Donc, la classe — nous la désignons par $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ — des éléments équivalents à f en $\mathfrak{n}$ est précisément déterminée.

(4.2) Pour deux classes $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ et $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$, nous entendrons par la somme — nous la désignons par $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$ — la classe $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f'+g')$, où $f'\in\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ et $g'\in\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$. (i) $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$ est déterminée univoquement pour f et g, et (ii) $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)=\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f+g)$, (iii) $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)=\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$, (iv) $\big(\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)\big)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(h)=\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\big(\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(h)\big)$.

(4.3) Pour une classe $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$, nous entendrons par la produit—nous la désignons par $\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$—la classe $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(\alpha f')$, où $f'\in\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$. (i) $\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ est déterminé univoquement pour α et f, (ii) $\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)=\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(\alpha f)$, (iii) $\alpha\big(\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)\big)=\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$, (iv) $(\alpha+\beta)\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)=\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\beta\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)$, (v) $\alpha\big(\beta\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)\big)=(\alpha\beta)\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$.

(4.4) Pour une classe $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$, nous posons $|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|=|\Psi(f,\mathfrak{n})|^{\frac{1}{p}}$. (i) $|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|$ est déterminée univoquement pour f, (ii) $|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|\geqq 0$ et $|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|=0$ entraine $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)=\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(0)$, (iii) $|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)+\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)|\leqq|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|+|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(g)|$; (iv) $|\alpha\,\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|=|\alpha|\;|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|$. Donc, l'ensemble de toutes classes $\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ $(f\in\mathfrak{B})$ est un espace linéaire et normé. Nous le désignons par $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{n}}$ et par $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ l'espace linéaire obtenu en completant lui.

5. Maintenant, nous construirons la somme directe $(\bar{L}_p)$ $\bar{\mathfrak{B}}=\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ des espaces $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ $(\mathfrak{n}\in[\mathfrak{B}])$. Alors, $\mathfrak{B}$ est contenu isométriquement dans $\bar{\mathfrak{B}}$. En effet, pour un élément borné f de $\mathfrak{B}$, nous avons d'après (3.8) et (4.4) $\Psi(f,\mathfrak{n})=|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|^p$ et donc

$$|Pf|=\left\{\int_{[\mathfrak{M}]}|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|^p\,dm\right\}^{\frac{1}{p}},$$

où P désigne une projection de $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathcal{M})$ et $\mathfrak{M}=P\mathfrak{B}$. En particulier, nous avons

$$|f|=\left\{\int_{[\mathfrak{B}]}|\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|^p\,dm\right\}^{\frac{1}{p}},$$

c'est-à-dire, une somme directe $(\bar{L}_p)$ $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ existe et $|\sum_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)|=|f|$. Donc, quand nous faisons correspondre les éléments bornés f de $\mathfrak{B}$ à $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ de $\bar{\mathfrak{B}}$, ils ont appliqué isométriquement dans $\bar{\mathfrak{B}}$, d'où l'ensemble $\hat{\mathfrak{B}}$ de toutes les sommes directes $(\bar{L}_p)$ $\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ et celui de tous les éléments bornés de $\mathfrak{B}$ sont isomorphes isométriquement. Or, les éléments bornés distribuent partout dense dans $\mathfrak{B}$ et par suite $\mathfrak{B}$ est appliqué isométriquement dans $\bar{\mathfrak{B}}$, c'est-à-dire, la ferméture $\mathfrak{B}_0$ de $\hat{\mathfrak{B}}$ est isomorphe isométriquement avec $\mathfrak{B}$.

Ici, nous pouvons déterminer un elément de $\bar{\mathfrak{B}}$ qui correspond à un élément f non borné de $\mathfrak{B}$. En effet, quand nous posons $\mathfrak{M}_k=\mathrm{Ens}\big(\Psi(f,n)\geqq k\big)$ $(k=0,1,2,\ldots)$, nous avons $\mathfrak{M}_k\in\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathcal{M})$ et donc il existe les projections P_k $(k=0,1,2,\ldots)$ tels qu'on ait $\mathfrak{M}_k=P_k\mathfrak{B}$. Alors, $(P_k-P_{k+1})f$ $(k=0,1,2,\ldots)$ sont bornés et nous avons $f=\sum_{k=0}^{\infty}(P_k-P_{k+1})f$, d'où f correspond à $\sum_{k=0}^{\infty}\overline{\sum}_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}\big((P_k-P_{k+1})f\big)$.

6. Puis, nous considérons la continuité des sommes directes $(\bar{L}_p)$ $\sum_{L_p}\oplus\mathrm{cl}_{\mathfrak{n}}(f)$. Comme on sait bien, nous définirons une topologie sur $[\mathfrak{B}]$ de manière qu'il soit bicompact et $[\mathfrak{M}]$, où $\mathfrak{M} \in \mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$, soit toujours ouvert et fermé en même temps. Encore, nous définirons une topologie sur la somme $\mathfrak{S} = \sum_{\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}]} \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ comme il suit. Etant donnés un élément $f_{\mathfrak{n}_0}$ de $\mathfrak{S}$, un élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ tel qu'on ait $\mathfrak{n}_0 \in [\mathfrak{M}]$, un nombre fini des éléments bornés $g^{(k)}$ $(k=1, 2, \dots, n)$ tels qu'on ait $f_{\mathfrak{n}_0} = \mathrm{cl}_{\mathfrak{n}_0}(g^{(k)})$ et un nombre positif ε, nous désignons par $\mathscr{M}(f_{\mathfrak{n}_0}, \varepsilon, \mathfrak{M}, g^{(1)}, g^{(2)}, \dots, g^{(k)})$ l'ensemble de tous les éléments $f_\mathfrak{n}$ tels qu'on ait $\mathfrak{n} \in [\mathfrak{M}]$ et $|f_\mathfrak{n} - \mathrm{cl}_\mathfrak{n}(g^{(k)})| < \varepsilon$ $(k=1, 2, \dots, n)$, et nous l'appelons un voisinage de $f_{\mathfrak{n}_0}$. Puis, nous définirons les voisinages des éléments $f_{\mathfrak{n}_0}$ de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}_0}$ par ceux des éléments de $\hat{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{n}_0}$ qui contient $f_\mathfrak{n}$.

(6.1) $\mathfrak{S}$ est un espace de M. F. Hausdorff et $f_\mathfrak{n} + g_\mathfrak{n}$ et $\alpha f_\mathfrak{n}$, où $f_\mathfrak{n}, g_\mathfrak{n} \in \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$, sont continus par rapport à respectivement $f_\mathfrak{n}, g_\mathfrak{n}$ et $\alpha, f_\mathfrak{n}$.

(6.2) Pour un élément borné de $\mathfrak{B}$, la somme directe (L_p) $\sum_{L_p} \oplus \mathrm{cl}_\mathfrak{n}(f)$ est continue par rapport à $\mathfrak{n}$ sur $[\mathfrak{B}]$ et inversement toute somme directe (L_p) $\sum_{L_p} \oplus f_\mathfrak{n}$ telle qu'on ait $f_\mathfrak{n} \in \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$ et qui est continue par rapport à $\mathfrak{n}$ sur $[\mathfrak{B}]$ est un élément d'accumulation de $\hat{\mathfrak{B}}$. Donc, quand nous désignons par $\mathfrak{B}_c$ l'ensemble de toutes sommes directes (L_p) continues, $\overline{\sum}_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ est continuellement distribué et son noyau continu est $\mathfrak{B}_c$. De plus, nous avons $\hat{\mathfrak{B}} \leqq \mathfrak{L}_c \leqq \mathfrak{B}_0$.

(6.3) $\mathfrak{B}_0$ est une somme directe (L_p) continue de $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$ et donc quand nous identifions chaque élément f de $\mathfrak{B}$ à celui de $\mathfrak{B}_0$ qui correspond à f, nous avons $\mathfrak{B} = \sum_{L_p} \oplus \mathfrak{B}_\mathfrak{n}$.

(6.4) Tout élément $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ peut être representé comme une somme directe (L_p) de quelques de $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$.

7. Or, en correspondant la décomposition de $\mathfrak{B}$, nous considérons la décomposition de l'anneau $\mathscr{M}$ des opérateurs. Pour cela, étant donné un élément A de $\left(\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})\right)'$ et celui $\mathfrak{n}$ de $[\mathfrak{B}]$, nous désignons par $A_\mathfrak{n}$ un opérateur défini par l'égalité $A_\mathfrak{n}\left(\mathrm{cl}_\mathfrak{n}(f)\right) = \mathrm{cl}_\mathfrak{n}(Af)$. Il est alors linéaire et borné sur $\mathfrak{B}_\mathfrak{n}$ et de plus nous avons $|A| = \underset{\in [\mathfrak{B}]}{\text{borné sup}} |A_\mathfrak{n}|$. Donc, A est une somme directe $(\overline{L_\infty})$ de $A_\mathfrak{n}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$, c'est-à-dire, $A = \overline{\sum}_{L_\infty} \oplus A_\mathfrak{n}$. De plus, il est continu par rapport à $\mathfrak{n}$ sur $[\mathfrak{B}]$ et il transforme les éléments bornés de $\mathfrak{B}$ en ceux bornés. D'où, nous pouvons voir que la somme directe $(\overline{L_\infty})$ $\overline{\sum}_{L_\infty} \oplus \mathscr{R}(\mathfrak{B}_\mathfrak{n})$ est continuellement distribuée et son noyau est $\left(\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})\right)'$.

(7.1) La somme directe $(\bar{L}_\infty)$ des anneaux $\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\mathfrak{n})$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$ est continuellement distribuée et son noyau continu $\left(\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})\right)'$ est en soi une somme directe (L_∞) de $\mathscr{R}(\mathfrak{B}_\mathfrak{n})$, c'est-à-dire nous avons

$$\sum_{L_\infty} \oplus \mathscr{R}(\mathfrak{B}_\mathfrak{n}) = \left(\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})\right)'.$$

(7.2) Il existe les anneaux $\mathscr{M}_{\mathfrak{n}}$ des opérateurs sur $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$ tels qu'on ait

$$\mathscr{M}'' = \sum_{L_\infty} \oplus \mathscr{M}_{\mathfrak{n}}\,.$$

(7.3) Tout élément $\mathscr{A}$ de $\mathbb{I}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ peut être representé comme une somme directe (L_∞) de quelques de $\mathscr{M}_{\mathfrak{n}}$ $(\mathfrak{n} \in [\mathfrak{B}])$.

8. Or, nous avons le suivant sur la décomposition de $\mathbb{L}(\mathscr{M})$.

(8.1) $$\mathbb{L}(\mathscr{M}) = \sum \oplus \mathbb{L}(\mathscr{M}_{\mathfrak{n}})\,.$$

9. Enfin, nous envisageons algébriquement la considération au-dessus. Etant donné un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathbb{Z}_0^{(L_p)}(\mathscr{M})$ et deux éléments f et g de $\mathfrak{B}$, quand il existe une projection P de $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ telle qu'on ait $(I-P)f=(I-P)g$ et $P\mathfrak{B} \in \mathfrak{n}$, nous dirons que f et g sont équivalents l'un l'autre par rapport à $\mathfrak{n}$, et nous désignons ce fait par $f \equiv g \pmod{\mathfrak{n}}$. Encore, nous désignons par $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ la classe des éléments équivalents à f par rapport à $\mathfrak{n}$.

(9.1) La relation de l'équivalence par rapport à $\mathfrak{n}$ sur les éléments de $\mathfrak{B}$ est symétrique, réflexive et transitive.

(9.2) L'ensemble $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ de toutes classes $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{n}}(f)$ $(f \in \mathfrak{B})$ est linéaire et $\mathfrak{B}_{\mathfrak{n}}$ est une image homomorphique de celui-ci.

Puis, pour deux opérateurs A et B de $\mathscr{M}$, quand il existe une projection P de $\mathbb{P}^{(L_p)}(\mathscr{M})$ telle qu'on ait $P\mathfrak{B} \in \mathfrak{n}$ et $(I-P)A=(I-P)B$, nous dirons que A et B sont équivalents par rapport à $\mathfrak{n}$, et nous désignons ce fait par $A \equiv B \pmod{\mathfrak{n}}$. Encore, nous désignons par $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{n}}(A)$ la classe de tous les opérateurs équivalents à A par rapport à $\mathfrak{n}$.

(9.3) La relation de l'équivalence par rapport à $\mathfrak{n}$ sur les opérateurs sont aussi symétrique, réflexive et transitive.

(9.4) L'ensemble $\widetilde{\mathscr{M}}_{\mathfrak{n}}$ de toute classes $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{n}}(A)$ $(A \in \mathscr{M})$ est un anneau des opérateurs sur $\widetilde{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{n}}$ et isomorphique algébriquement à $\mathscr{M}_{\mathfrak{n}}$.