18. *Sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe un plan à un nombre quelconque de dimensions.*

Par Kentaro YANO
Mathematical Institute, Tokyo University, Tokyo

et Shigeo SASAKI
Mathematical Institute, Tôhoku University, Sendai.

(Comm. by T. KUBOTA, M. J. A., July 12, 1948.)

§ 1. *Le cas où le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point.*

Nous allons tout d'abord rappeler rapidement les résultats déjà obtenus sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point.

A chaque point $\boldsymbol{M}$ d'un espace de Riemann dont la forme fondamentale est

(1. 1) $$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu, \ldots=1, 2, \ldots, n)$$

attachons un repère mobile formé par n vecteurs $\boldsymbol{e}_\lambda$ unitaires et orthogonaux l'un à l'autre. Alors la connexion euclidiene sans torsion de l'espace de Riemann s'exprime par

(1. 2) $$\begin{cases} d\mathbf{M}=\omega^\lambda \mathbf{e}_\lambda, \\ d\mathbf{e}_\mu=\omega_\mu^\lambda \mathbf{e}_\lambda, \end{cases}$$

où

(1. 3) $$ds^2=(\omega^1)^2+(\omega^2)^2+\ldots+(\omega^n)^2$$

et

(1. 4) $$\omega_\mu^\lambda+\omega_\lambda^\mu=0$$

Si le groupe d'holonomie de l'espace fixe une direction, on prend le premier vecteur unitair $\mathbf{e}_1$ dans cette direction. Alors, on doit avoir $d\mathbf{e}_1=0$, et par conséquent

(1. 5) $$\omega_1^i=-\omega_i^1=0 \quad (i=2, 3, \ldots, n)$$

Donc, les équations de structure

(1. 6) $$(\omega^\lambda)'=[\omega^\alpha\omega_\alpha^\lambda]$$

nous donnent

(1. 7) $$(\omega^1)'=[\omega^\alpha\omega_\alpha^1]=\omega^i\omega_i^1]=0$$

et par conséquent, l'équation

(1. 8) $$\omega^1=0$$

est complètement intégrable. Donc, il existe une famille des ∞^1 hypersurfaces dont les normales $\boldsymbol{e}_1$ sont toujours parallèles, c'est-à-dire, une famille des ∞^1 hypersurfaces totalement géodésiques dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques. Inversement, s'il existe, dans l'espace, une telle famille des hypersurfaces, il est

1) S. Sasaki: Sur la structure des espaces de Riemann dont le groupe d'holonomie fixe une direction ou un point (en japanais). Nippon-Sugaku-Butsuri-Gakkai-Kaishi, **16** (1942), 193—200.

évident que les normales unitaires à ces hypersurfaces donnent un champ de vecteur parallèle, et par conséquent le groupe d'holonomie de l'espace fixe cette direction.

Nous avons ainsi le

THÉORÈME 1 : *Si le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une direction, il existe, dans l'espace, une famille de* ∞^1 *hypersurfaces totalement geodesiques dont les trajectoires orthogonales sont geodesiques. La reciproque est aussi vraie.*

Dans ce cas, si l'on prend un système de coordonnées dans lequel les hypersurfaces sont représentées par x^1=constante et les trajectoires orthogonales par x^i=constantes, x^1 étant la longueur d'arc mesurée le long de chaque trajectoire, la forme fondamentale de l'espace s'écrit

$$ds^2=(dx^1)^2+g_{jk}(x^i)dx^j dx^k. \quad (i, j, k=2, 3, \ldots\ldots, n) \tag{1. 9}$$

Réciproquement, s'il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale prend cette forme, x^1=constante représente une famille des hypersurfaces totalement geodésiques et x^i=constantes leurs trajectoires orthogonales qui sont géodésiques de l'espace. Par conséquent, le groupe d'holonomie de l'espace fixe une direction. Donc, nous avons le

THÉORÈME 2 : *Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une direction, il faut et il suffit qu'il existe un systeme de coordonnees dans lequel la forme fondamentale prend la forme* (1. 9).

Cela dit, dans un tel système de coordonnées, on a

$$\omega^1 = dx^1,$$

et par conséquent

$$d(\boldsymbol{M}-x^1\boldsymbol{e}_1)=\omega^\lambda\boldsymbol{e}_\lambda-dx^1\boldsymbol{e}_1=\omega^i\boldsymbol{e}_i,$$

ce qui nous montre que la variation du point $\boldsymbol{M}-x^1\boldsymbol{e}_1$, situé sur le vecteur $\boldsymbol{e}_1$, est dans la direction orthogonale à cette direction, par conséquent le groupe d'holonomie de l'espace fixe l'hyperplan orthogonal à cette direction et passant par le point $\boldsymbol{M}-x^1\boldsymbol{e}_1$, donc il fixe tous les hyperplans orthogonaux à cette direction. La réciproque étant évidente, nous avons le

THÉORÈME 3 : *Si le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une direction, il fixe dussi une famille de* ∞^1 *hyperplans tout paralleles entre elles, la reciproque etant aussi vraie.*

Supposons cette fois que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un point. En prenant un repère mobile par rapport auquel ce point est désigné par $\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_1$, on a

$$d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_1)=(\omega^\lambda da\,\delta^\lambda_1+a\omega^\lambda_1)\boldsymbol{e}_\lambda=0, \tag{1. 10}$$

d'ou

$$\omega^\lambda+da\,\delta^\lambda_1+a\omega^\lambda_1=0. \tag{1. 11}$$

Donc, les équations de structure (1. 6) nous donnent

$$(\omega^1)'=[\omega^\lambda\omega^1_\lambda]=[\omega^i\omega^1_i]=\left[\omega^i \quad \frac{1}{a}\,\omega^i\right]=0,$$

et par conséquent, l'équation $\omega^1=0$ est complètement intégrable. Donc, il existe une famille des ∞^1 hypersurfaces dont les normales $\boldsymbol{e}_1$ sont concourantes, c'est-à-dire, une famille des hypersurfaces totalement ombiliquées et dont la courbure moyenne est constante, les trajectoires orthogonales étant géodésiques. Inversement, s'il existe, dans l'espace, une telle famille des ∞^1 hypersurfaces, il est évident que les normales unitaires à ces hypersurfaces donnent un champ de vecteur concourant, et par conséquent le groupe d'holonomie de l'espace fixe un point. Nous avons ainsi le

THÉOREME 4 : *Si le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un point, il existe, dans l'espace, une famille des ∞^1 hypersurfaces totalement ombiliquées et dont la courbure moyenne est constante, les trajectoires orthogonales étant geodesiques. La réciproque est aussi vraie.*

Dans ce cas, si l'on prend un système de coordonnées tout à fait analogue à celui du cas précédent, la forme fondamentale de l'espace s'écrit

$$ds^2=(dx^1)^2+(x^1)^2 g_{jk}(x^i)dx^j dx^k. \tag{1. 13}$$

Réciproquement, s'il exist un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale prend la forme (1. 13), x^1=constante représente une famille des hypersurfaces totalement ombiliquées dont la courbure moyenne est constante et x^i=constantes leurs trajectoires orthogonales qui sont géodésiques de l'espace. Par conséquent, le groupe d'holonomie de l'espace fixe un point. Donc nous avons le.

THEORÈME 5 : *Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un point, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale prend la forme* (1. 13).

§ 2. *Le cas où le groupe d'holonomie fixe une droite.*

Supposous que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une droite. Si l'on prend un repère mobile dont le premier vecteur unitaire $\boldsymbol{e}_1$ est dirigé dans la direction de cette droite et dont le second $\boldsymbol{e}_2$ dans la direction de la perpendiculaire abaissée de $\boldsymbol{M}$ à cette droite, le point arbitraire sur cette droite s'exprime per $\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_1$, t étant un paramètre. D'après le fait que le groupe d'holonomie fixe cette droite on doit avoir

$$d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_2+t\boldsymbol{e}_1)=(\omega^\lambda+da\,\delta^\lambda_2+a\omega^\lambda_2+dt\,\delta^\lambda_1+t\omega^\lambda_1)\boldsymbol{e}_\lambda=\beta\boldsymbol{e}_1$$

pour n'importe quel t, d'ou

$$\omega^i_1 = 0, \tag{2. 1}$$

$$\omega^i+da\,\delta^i_2+a\omega^i_2=0. \tag{2. 2}$$

Les équations (2. 1) nous montrent que $d\boldsymbol{e}_1=0$, donc le résultat du Paragraphe précédent s'applique, c'est-à-dire, il existe une famille des ∞^1 hypersurfaces V_{n-1} totalement géodésiques dont les trajectoires orthogonales sont géodésiques et par conséquent il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale est

$$ds^2=(dx^1)^2+g_{jk}(x^i)dx^j dx^k. \tag{2. 3}$$

Dans ce système de coordonnées, on a $\omega^1=dx^1$.

Les équations (2. 2) nous montrent que

$$(\omega^2)'=[\omega^\lambda\omega^2_\lambda]=[\omega^1\omega^2_1]+[\omega^i\omega^2_i]=\left[\omega^i,\frac{1}{a}(\omega^i+da\,\delta^i_2)\right]=\left[\omega^2,\frac{da}{a}\right],$$

et par conséquent, l'équation de Pfaff

$$\omega^2 = 0$$

est complètement intégrable. Donc, il existe une famille de ∞^1 hypersurfaces $^*V_{n-1}$ dont les normales sont $\boldsymbol{e}_2$. D'autre part, les équations (2. 2) nous donnent

$$d(\boldsymbol{M}+\alpha\boldsymbol{e}_2)=\omega^1\boldsymbol{e}_1=dx^1\boldsymbol{e}_1, \tag{2. 4}$$

ce qui montre que les normales des hypersurfaces $^*V_{n-1}$ sont concourantes si l'on se déplace sur $^*V_{n-1}$ dans la direction orthogonale à $\boldsymbol{e}_1$. Donc, nous avons le

THÉORÈME 6 : *Si le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une droite, il existe dans cet espace une famille des ∞^1 hypersurfaces V_{n-1} totalement géodésiques et de plus il existe une autre famille des ∞^1 hypersurfaces V_{n-1}, orthogonales à celles de la première et dont les normales sont concourantes si l'on se déplace, sur $^*V_{n-1}$, dans la direction orthogonale à normale de celles de la première. La réceproque est aussi vraie.*

L'équation (2. 4) montre que, si l'on définit V_{n-1} par x^1=constante, le groupe d'holonomie des hypersurface totalement géodésiques V_{n-1} fixe le point $\boldsymbol{M}+\alpha\boldsymbol{e}_2$. Donc, la forme fondamentale de V_{n-1} peut etre aussi écrite sous la forme

$$g_{jk}(x^i)dx^jdx^k=(dx^2)^2+(x^2)^2g_{qr}(x^p)dx^qdx^r, \quad (p, q, r=3, 4,\ldots\ldots, n). \tag{2. 5}$$

Donc, en substituant (2. 5) dans (2. 3), nous avons

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+(x^2)^2g_{qr}(x^p)dx^qdx^x. \tag{2. 6}$$

Inversement, si la forme fondamentale de l'espace peut s'écrire sous cette forme, le groupe d'holonomie de l'espace fixe une droite. Donc, nous avons le

THÉORÈME 7 : *Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une droite, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées dans lequel la forme fondamentale de l'espace peut s'ecrire sous la forme* (2. 6).

REMARQUE : Si l'on suppose que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe deux points, il fixe la droit passant par ces deux points. Inversement, si l'on suppose que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe une droite, le groupe d'holonomie fixe une direction parallèle à cette droite. Mais, d'après le Théorème 3 du paragraphe précédent, si le groupe d'holonomie fixe une droite, il fixe aussi une hyperplan orthogonal à cette droite et par conséquent il fixe tous les points sur cette droite. Donc la structure de l'espace dont le groupe d'holonomie fixe deux points est identique à celle dont le groupe d'holonomie fixe une droite.

§ 3. *Le cas où le groupe d'holonomie fixe un plan à un nombre quelconque de dimensions.*

Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un plan à m dimensions. Si l'on prend un repère mobile dont les m premiers vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\ldots\ldots, \boldsymbol{e}_m$ sont parallèles au plan fixe par le groupe d'holonomie et orthogonaux l'un à l'autre. et dont le $(m+1)^{er}$ $\boldsymbol{e}_{m+1}$ dans la direction de la perpendiculaire abaissée de $\boldsymbol{M}$ au plan, le point sur ce plan peut s'exprimer par $\boldsymbol{M}+\alpha\boldsymbol{e}_{m+1}+t^a\boldsymbol{e}_a$ $(a=1, 2,\ldots.., m)$, t^a étant les paramètres. D'après le fait que le groupe d'holonomie fixe ce plan, on doit avoir

$$d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_{m+1}+t^a\boldsymbol{e}_a)=(\omega^\lambda+da\,\delta^\lambda_{m+1}+a\omega^\lambda \quad +dt^a\delta^\lambda_a+t^a\omega^\lambda_a)\boldsymbol{e}_\lambda$$
$$=\beta^a\boldsymbol{e}_a$$

pour n'importe quels t^a, **d'où**

(3. 1) $$\omega^i_a=\omega^a_i=0,$$

(3. 2) $$\omega^i+da\,\delta^i_{m+1}+a\omega^i_{m+1}=0.$$

où i prend les valeurs $m+1$, ..., n. Les équations (3. 1) nous montrent que

$$d\boldsymbol{e}_a = \omega^b_a\boldsymbol{e}_b,$$

et par conséquent que les m-directions définies par $\boldsymbol{e}_a$ forment un champ parallèle de l'espace. De plus, les équations de structure nous donnent

$$(\omega^a)'=[\omega^\lambda\omega^a_\lambda]=[\omega^b\omega^a_b]+[\omega^i\omega^a_i]=[\omega^b\omega^a_b]$$

et par conséquent, les équations de Pfaff

$$\omega^a = 0$$

sont complètement intégrables. Donc, il existe une famille des ∞^m surfaces dont les normales forment un champ de m-direction parallèle et par conséquent une famille des ∞^m surfaces V_{n-m} totalement géodésiques. De même, les $(n\text{-}m)$-directions définies par $\boldsymbol{e}_i$ étant champ parallèle, et les équations $\omega^i=0$ étant complètement intégrables, il existe une famille des ∞^{n-m} surfaces dont les normales forment un champ de $(n\text{-}m)$-direction parallèle et par conséquent une famille des ∞^{n-m} surfaces $*V_m$ totalement géodésiques. $*V_{n-m}$ et $*V_m$ sont orthogonaux. Si l'on prend un système de coordonnées dans lequel ces familles sont représentées par x^a=constantes et x^i=constantes, la forme fondamentale prend la forme

(3. 3) $$ds^2=g_{bc}(x^a)dx^b dx^c+g_{jk}(x^i)dx^j dx^k$$
$$(a,\ b,\ c,\ =\ 1,\ 2, \ldots\ldots m;\quad i,\ j,\ k=m+1, \ldots\ldots,\ n).$$

D'autre part, les équations (3. 2) nous donnent

(3. 4) $$d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_{m+1})=\omega^a\boldsymbol{e}_a,$$

ce qui montre que le vecteur $\boldsymbol{e}_{m+1}$ est concourant si l'on se deplace sur V_{n-m}. De plus, les équations de structure (1. 6) et les équations (3. 2) nous donnent

$$(\omega^{m+1})'=[\omega^\lambda\omega^{m+1}_\lambda]=[\omega^i\omega^{m+1}_i]=\left[\omega^i,\ \frac{1}{a}(\omega^i+da\,\delta^i_{m+1})\right]$$
$$=\left[\omega^{m+1}\frac{da}{a}\right],$$

et par conséquent, l'équation de Pfaff

$$\omega^{m+1} = 0$$

est complètement intégrable. Donc il existe une famille des ∞^1 hypersurfaces $*V_{n-1}$ orthogonales aux V_{n-m} et dont la normale est concourante si l'on se déplace dans l'intersection de V_{n-m} et $*V_{n-1}$. Donc, nous avons le

THÉORÈME 8 : *Si le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un plan à m dimensions, il existe dans l'espace une famille des ∞^m surfaces V_{n-m} à n-m dimensions totalement géodésiques et une* *famille des* ∞^{n-m} *surfaces* V_m *à m dimensions totalement géodésiques et orthogonales à celles de la première, et de plus, il existe une autre famille des* ∞^1 *hypersurfaces* $*V_{n-1}$ *orthogonales à celle de la première famille et dont les normales sont concourantes si l'on se déplace dans l'intersection de* V_{n-m} *et* $*V_{n-1}$. *La réciproque est aussi vraie.*

Les équations (3. 4) nous montrent que le vecteur $\boldsymbol{e}_{m+1}$ est concourante le long des surfaces totalement géodésiques V_{n-m}, donc, en prenant un système de coordonnées convenablement, la forme fondamentale $g_{jk}(x^i)dx^j dx^k$ de V_{n-m} prend la forme

$$(3.\ 5) \qquad g_{jk}(x^i)dx^j dx^k=(dx^{m+1})^2+(x^{m+1})^2 g_{qr}(x^p)dx^q dx^r, \quad (p,\ q,\ r=m+2,\ \ldots\ldots,\ n).$$

En substituant (3. 5) dans (3. 3), on obtient

$$(3.\ 6) \qquad ds^2=g_{bc}(x^a)dx^b dx^c+(dx^{m+1})^2+(x^{m+1})^2 g_{qr}(x^p)dx^q dx^r.$$

Inversement, s'il existe un système de coordonnées pour lequel la forme fondamentale prend la forme (3. 6), le groupe d'holonomie de l'espace fixe un plan à m dimensions, donc, nous avons le.

THÉORÈME 9 : *Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe un plan à m dimensions, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées pour lequel la forme fondamentale de l'espace prend la forme* (3. 6).

§ 4. *Le cas où lé groupe d'holonomie fixe* $m+1$ *points.* Supposons que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe $m+1$ points. D'après la remarque dite à la fin du Paragraphe 2, on sait que le groupe d'holonomie fixe tous les points sur le plan à m dimensions déterminé par ces $m+1$ points. Donc, en prenant un repère mobile tout à fait analogues à celui du Paragraphe précédent on doit avoir

$$(4.\ 1) \qquad d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_{m+1}+t^a\boldsymbol{e}_a)=0,$$

pour n'importe quelles valeurs des t^a, d'où

$$(4.\ 2) \qquad \omega_a^\lambda = 0,$$

$$(4.\ 3) \qquad \omega^\lambda+da\,\delta_{m+1}^\lambda+a\omega_{m+1}^\lambda+dt^a\delta_a^\lambda=0.$$

Les équations (4. 2) nous montrent que $d\boldsymbol{e}_a=0$, c'est-à-dire que les vecteurs $\boldsymbol{e}_a$ sont tous les champs de vecteurs parallèles. De plus, d'après les équations

$$(\omega^a)'=[\omega^\lambda\omega_\lambda^a]=-[\omega^\lambda\omega_a^\lambda]=0,$$

les formes de Pfaff ω^a sont toutes les differentielles exactes, par conséquent, il existe les fonctions $f^a(x^\lambda)$ telles que

$$\omega^a=df^a(x^\lambda).$$

Donc, si l'on prend le système de coordonnées tel qu'on ait

$$\omega^a = dx^a,$$

la forme fondamentale de l'espace sera de la forme

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\ldots\ldots+(dx^m)^2+g_{jk}(x^i)dx^j dx^k, \quad (i,\ j,\ k=m+1,\ \ldots\ldots,\ n).$$

D'autre part, les équations (4. 3) nous donnent

$$d(\boldsymbol{M}+a\boldsymbol{e}_{m+1})=\omega^a\boldsymbol{e}_a,$$

ce qui montre que le vecteur $\boldsymbol{e}_{m+1}$ est concourant le long des surfaces

V_{n-m} définies par les équations x^a=constantes.

De plus, en posant $\lambda=b$ dans les equations (4. 3), on trouve $\omega^b+dt^b=0$, donc d'après les équations

$$(\omega^{m+1})'=[\omega^\lambda\omega_\lambda^{m+1}]=\left[\omega^\lambda,\ \frac{1}{a}(\omega^\lambda+da\,\delta^\lambda_{m+1}+dt^a\,\delta^\lambda_a)\right]=\left[\omega^{m+1},\frac{da}{a}\right],$$

léquation de Pfaff

$$\omega^{m+1} = 0$$

est complètement intégrable. Donc, il existe une familles des ∞^1 hypersurface $*V_{n-1}$ dont les normales sont données par $\boldsymbol{e}_{m+1}$. Il va sans dire que les surfaces V_{n-m} et les hypersurfaces $*V_{n-1}$ sont orthogonales l'une à l'autre.

De plus, les hypersurfaces $*V_{n-1}$ contiennent les champs de vecteurs parallèles $\boldsymbol{e}_a$ et ses normales $\boldsymbol{e}_{m+1}$ sont concourantes dans les directions orthogonales aux $\boldsymbol{e}_a$. Par conséquent, la forme fondamentale de l'espace doit avoir la forme

$$ds^2=(dx^1)^2+(dx^2)^2+\dots\dots+(dx^m)^2 \\ +(dx^{m+1})^2+(x^{m+1})^2g_{qr}(x^p)dx^q dx^r. \tag{4. 4}$$

Inversement, si la forme fondamentale a la forme (4. 4), ce groupe d'holonomie de l'espace fixe $m+1$ points. Donc, nous avons le

THÉORÈME 10 : *Pour que le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann fixe $m+1$ points, il faut et il suffit qu'il existe un système de coordonnées par rapport auquel la fondamentale de l'espace prend la forme* (4. 4).