3. *Zum Teilerkettensatz in kommutativen Ringen*

Von Hazimu SATO
Pädagogische Fakultät, Hiroshima Universität
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., Jan. 12, 1953)

In der vorliegenden Note verstehen wir unter dem Ring $\mathfrak{R}$ stets einen allgemeinen kommutativen Ring. Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, dass wir, unter den folgenden Bedingungen, die Gültigkeit vom Teilerkettensatz in $\mathfrak{R}$ herleiten können.

Bedingungen:

(1) *Ist eine Teilerkette von Halbprimidealen*[1] $\mathfrak{h}_1 \subseteqq \mathfrak{h}_2 \subseteqq \cdots$ *in* $\mathfrak{R}$ *gegeben, so bricht die Kette nach endlich vielen Gliedern ab.*

(2) *Wenn ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *einen und nur einen minimalen Primidealteiler*[2] $\mathfrak{p}$ *(einschl.* $\mathfrak{R}$*) besitzt, so gilt der Teilerkettensatz zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{p}$.

Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Im folgenden wollen wir zeigen, dass die Bedingungen hinreichend sind.

1. Erstens behaupten wir:

Gilt in $\mathfrak{R}$ *die Bedingung* (1), *so können wir jedes Halbprimideal* $\mathfrak{h}$ *als einen kürzesten Durchschnitt von endlich vielen minimalen Primidealteilern von* $\mathfrak{h}$ *darstellen.*

Es sei $\mathfrak{h}$ ein Halbprimideal. Benutzt man die Tatsache, dass der Idealquotient $\mathfrak{h}:\mathfrak{b}$ auch ein Halbprimideal ist, wo $\mathfrak{b}$ ein beliebiges Ideal ist, so können wir auf ganz dieselben Weisen, wie S. Mori in seinen Arbeiten[3] gezeigt hat, die Behauptung beweisen.

2. Wir gehen nun zum Beweise des Teilerkettensatzes über. Es sei

$$\text{(A)} \qquad \mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 \subseteqq \mathfrak{a}_3 \subseteqq \cdots$$

eine Teilerkette von Idealen $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{h}_i$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}_i$ $(i=1, 2, \cdots)$.[4] Dann ist offenbar $\mathfrak{h}_1 \subseteqq \mathfrak{h}_2 \subseteqq \cdots$, und wegen (1) muss diese Kette im Endlichen (etwa nach N_1 Schritten) abbrechen, nämlich $\mathfrak{h}_{N_1} = \mathfrak{h}_{N_1+1} = \cdots$. Zur Abkürzung setzen wir $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{N_1}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{N_1}$

---

1) Ein Ideal $\mathfrak{h}$ heisst Halbprimideal, wenn es in dem Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{h}$ kein nilpotentes Element gibt.

2) Unter einem minimalen Primidealteiler eines Ideals $\mathfrak{a}$ verstehen wir einen Primidealteiler, zwischen dem und $\mathfrak{a}$ kein Primideal eingeschaltet werden kann.

3) S. Mori: Über Ringe, in denen die grössten Primärkomponenten jedes Ideals eindeutig bestimmt sind, Jour. Sci. Hiroshima Univ., **1**, 161 (1931).

——: Über eindeutige Reduktion von Idealen in Ringen ohne Teilerkettensatz, ibid., **3**, 299 (1933).

——: Über Ringe, die den Durchschnittssatz gestatten, ibid., **2**, 130 (1942).

4) Die Gesamtheit der Elemente, die in bezug auf $\mathfrak{a}$ nilpotent sind, heisst das zu $\mathfrak{a}$ gehörige Halbprimideal.

$=\mathfrak{h}_{N_1+1}=\cdots$. Ist $\mathfrak{h}$ prim, so folgt aus (2), dass die Kette (A) im Endlichen abbrechen muss. Es sei damit $\mathfrak{h}$ ein echtes Halbprimideal. Nach dem Ergebnisse von 1 erhalten wir $\mathfrak{h}=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_n (n>1)$, und daraus können wir einen Idealquotient $\mathfrak{a}:(r_1)$ mit den Eigenschaften:

$$r_1\notin\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{a}:(r_1)\subseteqq\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{a}:(r_1)\subseteqq\!\!\!\!\!/\ \mathfrak{p}_2$$

bilden[5].

Dann ist es leicht einzusehen, dass das zugehörige Halbprimideal $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{a}:(r_1)$ ein echter Teiler von $\mathfrak{h}$ ist und $\mathfrak{p}_1$ ein minimaler Primidealteiler von $\mathfrak{h}'$ ist; also $\mathfrak{h}'=\mathfrak{p}_1\cap\mathfrak{p}_2'\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m'$. Wenn $m>1$ ist, so bilden wir wieder einen Idealquotient $\mathfrak{a}:(r_1r_2)$ mit den soeben gezeigten Eigenschaften, d.h. $r_2\notin\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{a}:(r_1r_2)\subseteqq\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{a}:(r_1r_2)\subseteqq\!\!\!\!\!/\ \mathfrak{p}_2'$. Ist $\mathfrak{h}''$ das zugehörige Halbprimideal von $\mathfrak{a}:(r_1r_2)$, so ist $\mathfrak{h}'\subset\mathfrak{h}''$ und $\mathfrak{p}_1$ ist auch ein minimaler Primidealteiler von $\mathfrak{h}''$. Da durch die Wiederholung dieses Verfahrens eine Kette von Halbprimidealen $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}'\subset\cdots$ sich ergibt, so erhalten wir nach endlichen Schritten einen Idealquotient $\mathfrak{a}:(r_1r_2\cdots r_k)$, der $\mathfrak{p}_1$ als das zugehörige Halbprimideal besitzt, d.h. $\mathfrak{p}_1$ ist ein einziger minimaler Primidealteiler von $\mathfrak{a}:(r_1r_2\cdots r_k)$.

Wir setzen nun $r_1'=r_1r_2\cdots r_k$ und betrachten die Kette

$$\text{(B)}\qquad \mathfrak{a}:(r_1')=\mathfrak{a}_{N_1}:(r_1')\subseteqq\mathfrak{a}_{N_1+1}:(r_1')\subseteqq\cdots.$$

Dann ist $\mathfrak{p}_1\supseteqq\mathfrak{a}_i:(r_1')$ $(i\geqq N_1)$, weil $\mathfrak{p}_1$ alle $\mathfrak{a}_i$ $(i\geqq N_1)$ enthält und $r_1'\notin\mathfrak{p}_1$ ist. Also nach (2) muss die Kette (B) im Endlichen abbrechen: etwa $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}_{N_2}:(r_1')=\mathfrak{a}_{N_2+1}:(r_1')=\cdots$ und dabei ist $\mathfrak{p}_1$ ein einziger minimaler Primidealteiler von $\mathfrak{a}'$. Ist $\mathfrak{a}'$ nicht primär, so gibt es ausserhalb von $\mathfrak{a}'$ zwei Elemente r_2', p_2' $(r_2'p_2'\in\mathfrak{a}',\ r_2'\notin\mathfrak{p}_1,\ p_2'\in\mathfrak{p}_1)$. Der Idealquotient $\mathfrak{a}':(r_2')$ ist folglich ein echter Teiler von $\mathfrak{a}'$ und durch $\mathfrak{p}_1$ teilbar, da $\mathfrak{p}_1$ prim ist. Wenn $\mathfrak{a}':(r_2')$ noch nicht primär ist, so fahren wir mit diesem Verfahren fort, und wegen (2) erhalten wir eine zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige Primärkomponente $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{a}'$ in der Form $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}':(r_2'r_3'\cdots r_t')=\mathfrak{a}_{N_2}:(r_1'r_2'\cdots r_t')=\cdots$, worin $r_1'r_2'\cdots r_t'\notin\mathfrak{p}_1$ ist.

Im vorigen haben wir gesehen, dass man, wenn $\mathfrak{h}$ nicht prim ist, eine hinreichend grosse ganze Zahl N_2 so bestimmen kann, dass jedes Ideal $\mathfrak{a}_i$ von (A) für $i\geqq N_2$ eine zu $\mathfrak{p}_1$ gehörige gemeinsame Primärkomponente $\mathfrak{q}$ besitzt, wobei $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}_i:(r_1'')$, $r_1''=r_1'r_2'\cdots r_t'\notin\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1$ ein beliebig bestimmter minimaler Primidealteiler von $\mathfrak{h}$ ist. Wir betrachten nun eine Darstellung[6]:

---

5) Wir finden p_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ mit den Eigenschaften:

$$p_1\in\mathfrak{p}_1,\ p_1\notin\mathfrak{p}_2;\ p_i\in\mathfrak{p}_i,\ p_i\notin\mathfrak{p}_1,\ (i=2, 3, \ldots, n).$$

So ist $p_1p_2\ldots p_n\in\mathfrak{h}$, und $(p_1p_2\ldots p_n)^\rho\in\mathfrak{a}$. Es genügt zu setzen $r_1=(p_2p_3\ldots p_n)^\rho$.

6) Es ist klar, dass $\mathfrak{a}_i\subseteqq\mathfrak{q}\cap(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{R}r_1'')$ ist. Es sei x irgendein Element von $\mathfrak{q}\cap(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{R}r_1'')$. Da $x\in(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{R}r_1'')$ ist, so $x=a_i+rr_1''$. Andererseits $x\in\mathfrak{q}$, folglich $a_ir_1''+rr_1''^2\in\mathfrak{a}_i$, daraus $rr_1''^2\in\mathfrak{a}_i$, und $rr_1''\in\mathfrak{q}$. Weil $r_1''\notin\mathfrak{p}_1$ ist, muss $r\in\mathfrak{q}$ sein, somit $rr_1''\in\mathfrak{a}_i$. Es muss also $x\in\mathfrak{a}_i$ sein, i.e. $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}\cap(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{R}r_1'')$.

$$\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}\cap(\mathfrak{a}_i, \Re r_1'') \qquad (i\geqq N_2)\ ,$$

wobei $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}_{N_2}:(r_1'')=\mathfrak{a}_{N_2+1}:(r_1'')=\cdots$ ist. Dann ergibt sich eine Kette

$$\text{(C)} \qquad (\mathfrak{a}_{N_2}, \Re r_1'')\subseteqq(\mathfrak{a}_{N_2+1}, \Re r_1'')\subseteqq\cdots\ .$$

Es sei $\mathfrak{h}^{(1)}$ das zu $\mathfrak{h}$ entsprechende Halbprimideal von (C), dann ist $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}^{(1)}$, weil $r_1''\notin\mathfrak{h}$, $r_1''^2\in\mathfrak{h}^{(1)}$ ist. Ist $\mathfrak{h}^{(1)}$ prim, so muss wegen (2) die Kette (C) im Endlichen abbrechen, also für eine Zahl N_3 gilt

$$\mathfrak{q}'=(\mathfrak{a}_{N_3}, \Re r_1'')=(\mathfrak{a}_{N_3+1}, \Re r_1'')=\cdots$$

$$\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{q}' \qquad (i\geqq N_3)\ .$$

Ist $\mathfrak{h}^{(1)}$ nicht prim, so wiederholen wir für (C) den bisher gegen (A) geführten Prozess und auf diese Weise gehen wir weiter. Dabei erscheint dann eine Kette von Halbprimidealen $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}^{(1)}\subset\cdots$. Wegen (1) muss aber diese Kette im Endlichen abbrechen, und das letzte Glied (etwa $\mathfrak{h}^{(n)}$) soll nach obigem Prozess gerade prim sein. Also muss nach (2) die dabei entstehende Teilerkette, wo jedes Ideal die folgende Form:

$$(\mathfrak{a}_i, \Re r_1'', \Re r_2'', \cdots, \Re r_n'')$$

hat, im Endlichen abbrechen, d.h. für ein gewisses N ist

$$\mathfrak{q}^{(n)}=(\mathfrak{a}_N, \Re r_1'', \cdots, \Re r_n'')=(\mathfrak{a}_{N+1}, \Re r_1'', \cdots, \Re r_n'')=\cdots.$$

Da aber nach unserem Prozess die Darstellung $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{n-1}\cap(\mathfrak{a}_i, \Re r_1'', \cdots, \Re r_n'')$ gelten soll, so erhalten wir eine identische Durchschnittsdarstellung:

$$\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_{n-1}\cap\mathfrak{q}^{(n)} \quad (i\geqq N),$$

d.h. $\mathfrak{a}_N=\mathfrak{a}_{N+1}=\cdots$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Satz. *In einem kommutativen Ring* $\Re$ *sind die folgenden Bedingungen zum Teilerkettensatz äquivalent:*

(1) *Ist eine Teilerkette von Halbprimidealen* $\mathfrak{h}_1\subseteqq\mathfrak{h}_2\subseteqq\cdots$ *in* $\Re$ *gegeben, so bricht die Kette nach endlich vielen Gliedern ab.*

(2) *Wenn ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *einen und nur einen minimalen Primidealteiler* $\mathfrak{p}$ *(einschl.* $\Re$*) besitzt, so gilt der Teilerkettensatz zwischen* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{p}$.

Herrn Professor S. Mori bin ich für seine Anregung zu dieser Arbeit zu grossem Dank verpflichtet.