72. *Sur le Type d'Ordination de Famille Monotone d'Ensembles*

Par Tosiyuki TUGUÉ et Zen-iti OKUYAMA
Université Métropolitaine, Tokyo
(Comm. by Z. SUETUNA, M.J.A., May 13, 1954)

1. Le but de cette note est de donner les conditions pour que diverses familles d'ensembles et monotones présentent les types d'ordinations linéaires. Nous dirons avec M. A. Denjoy[1] qu'un ensemble ordonné E présente un type d'ordination linéaire si E est semblable à un ensemble linéaire, et qu'un ensemble ordonné E présente un type d'ordination planaire si E est semblable à un ensemble de points situés sur un plan et ordonnés alphabétiquement. Considérons une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles conténus dans l'espace euclidien U_r à r dimensions et tels que, de deux quelconques d'entre eux, l'un contient l'autre, et ordonnons entre eux dans le sens de la décroissance — c'est-à-dire de façon que l'ordination $E_1 \prec E_2$ soit simultanée à la relation l'inclusion $E_1 \supset E_2$.[2] Nous l'appelons une famille monotone.

Si la famille donnée $\mathfrak{F}$ consiste d'ensembles fermés et est monotone, on sait que cela présente un type d'ordination linéaire.[3] Voici une démonstration très briève. Soit:

$$(1) \qquad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

une base ouverte, énumérée et bien déterminée de l'espace U_r. Maintenant, définissons les applications $f^{(n)}(E)$ pour tout ensemble de $\mathfrak{F}$ de manière que

$$(2) \qquad f^{(n)}(E)=\begin{cases} 0, & \text{lorsque} \quad E \cap u_n \neq 0, \\ 1, & \text{lorsque} \quad E \cap u_n = 0, \end{cases}$$

et posons

$$(3) \qquad f(E)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(E)}{2^n}.$$

Prenons deux ensembles E_1, E_2 appartenants à $\mathfrak{F}$. Si l'on a $E_1 \neq E_2$, l'un contient l'autre proprement, soit p. e. $E_1 \supset E_2$; on peut alors trouver un point p tel qu'on ait $p \in E_1$ et $p \bar{\in} E_2$. E_2 étant fermé, il existe un ensemble ouvert u_n de la base (1) qui contient p, mais auquel E_2 est disjoint. D'après la définition (2), il est $f^{(n)}(E_1)=0$,

1) A. Denjoy: *L'énumération transfinie*, Livre I (1946).

2) Nous écrivons $E_1 \supset E_2$, lorsque $E_1 \supseteqq E_2$ et $E_1 \neq E_2$.

3) A. Denjoy: Loc. cit., et C. Kuratowski: *Sur les familles monotones d'ensembles fermés et leurs applications à la théorie des espaces connexes*. Fund. Math., **30** (1938).

mais $f^{(n)}(E_2)=1$.

D'autre part, l'inclusion $E_1 \supset E_2$ extraîne que pour tout nombre naturel n, si $f^{(n)}(E_1)=1$, on a toujours $f^{(n)}(E_2)=1$. Donc, on a $f(E_1) < f(E_2)$, d'après la définition (3). D'où, $f(E)$ est une application conforme demandée.

Ce fait a aussi lieu pour une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles ouverts, mais il n'a pas en général lieu pour celle d'ensembles fermés ou bien ceux ouverts — surtout, celle d'ensembles F_ρ. Voici les exemples très simples:

1°. La famille des intervalles $[x, 1] (0 \leqq x \leqq 1)$ et les intervalles $[x, 1]$, qui consistent de tous nombres réels $\xi : x < \xi \leqq 1 \, (0 \leqq x < 1)$, ne présente aucun type d'ordination linéaire comme on voit sans peine.

2°. Pour tout point (x, y) du rectangulaire $Q(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$, posons

$$E_{(x,y)} = \underset{(\xi,\eta)}{\mathrm{Ens}} [(\xi, \eta) \in Q . [\xi > x . \vee : (\xi = x)(\eta > y)]].$$

La famille de tous ensembles $E_{(x,y)}$ ne présente alors aucun type d'ordination linéaire.

2. Maintenant, considérons le cas où $\mathfrak{F}$ est une famille d'ensembles F_ρ. Nous avons le

Théorème 1. *Toute famille $\mathfrak{F}$ monotone d'ensembles F_ρ présente un type d'ordination planaire.*

En effect, on peut appliquer $\mathfrak{F}$ dans le rectangulaire $Q(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$ par $\Theta(E) = (f(\bar{E}),\ 1 - f(\bar{E} - E))$,[4] en utilisant l'application (3), parce que $\bar{E} - E$ est fermé pour tout ensemble E de la classe F_ρ.

Avant d'énoncer le théorème 2, nous posons quelques définitions.

Définition 1. Un ensemble E de $\mathfrak{F}$ est dit *un élément de première espèce de* $\mathfrak{F}$ si $\underset{X}{\mathrm{Ens}} (X \in \mathfrak{F} . \bar{X} = \bar{E})$ n'admet qu'un seul élément E lui-même, et il est dit *un élément de deuxième espèce de* $\mathfrak{F}$ si non.

Définition 2. Une famille $\mathfrak{F}$ est dit *de jouir de la propriété P* si la totalité des $\bar{E}$, tels que E soient les éléments de deuxième espèce de $\mathfrak{F}$, est au plus dénombrable.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathfrak{F}$ monotone d'ensembles F_ρ présente un type d'ordination linéaire est qu'elle jouisse de la propriété P.*

En effect, si $\mathfrak{F}$ ne jouit pas de la propriété P, il y a des ensembles $\bar{E}$ indénombrables tels que E soient des éléments de deuxième espèce de $\mathfrak{F}$, et donc, on verra sans peine que $\mathfrak{F}$ ne présente aucun type d'ordination linéaire.

---

4) Désignons par $\bar{E}$ la fermeture de E, et $\bar{E} - E$ la différence de $\bar{E}$ et E.

En autre part, si $\mathfrak{F}$ jouit de la propriété P, la totalité de $\overline{E}$, tels que E soient les éléments de deuxième espèce, est au plus dénombrable; l'énumérons et soit:

$$(4) \qquad \overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n, \ldots .$$

Pour tout ensemble E de $\mathfrak{F}$, définissons l'application $\varphi(E)$ comme il suit:

$$(5) \qquad \varphi(E) = \frac{1}{2} f(\overline{E}) + \sum_{n \in \sigma(E)} \frac{1}{3^n},$$

où $\sigma(E)$ est un ensemble de nombres naturels n tels qu'on ait $\overline{E}_n \supseteqq \overline{E}$. Nous avons alors

$$(6) \qquad \text{si} \quad E \prec E' \; (E \supset E'), \quad \varphi(E) \leqq \varphi(E')$$

pour deux ensembles E et E' de $\mathfrak{F}$.

Ensuite, si E est un élément de première espèce de $\mathfrak{F}$, posons

$$(7) \qquad f_1(E) = \varphi(E),$$

si non, posons

$$(8) \qquad f_1(E) = \varphi(E) - \frac{1}{3^n} f(\overline{E} - E),$$

où n est un nombre naturel tel qu'on ait $\overline{E} = \overline{E}_n$.

On verra sans peine que $f_1(E)$ réalise une application conforme entre $\mathfrak{F}$ ordonnée et un ensemble linéaire.

3. Soit E un ensemble quelconque conténu dans U_r. Posons inductivement:

$$(10) \quad R_0(E) = E, \; R_1(E) = \overline{E} - E \quad \text{et} \quad R_n(E) = \overline{R_{n-1}(E)} - R_{n-1}(E).$$

Nous avons le

Lemme. *Pour qu'un ensemble E soit une somme de m ensembles F_ρ:*

$$E = (F_1 - F_2) + (F_3 - F_4) + \cdots + (F_{2m-1} - F_{2m}),$$

où $F_k (k = 1, 2, \ldots, 2m)$ soient fermés, il faut et il suffit que $R_{2m}(E)$ soit vide (c'est-à-dire *$R_{2m-1}(E)$ soit fermé*).

Dès maintenant, nous appelons E un ensemble (D_m) si E est une somme de m ensembles F_ρ.

De ce lemme, il résulte que si E est un ensemble (D_m), E est écrit univoquement en l'égalité suivante:

$$E = \overline{R_0(E)} - \overline{R_1(E)} + \overline{R_2(E)} - \overline{R_3(E)} + \cdots \overline{R_{2m-2}(E)} - \overline{R_{2m-1}(E)}.$$

Maintenant, nous pouvons poser les théorèmes généralisés pour deux théorèmes précédés.

Théorème 3. *Etant donné un nombre naturel m, une famille $\mathfrak{F}$ monotone d'ensembles (D_m) est semblable à un ensemble de U_{2m} ordonné alphabétiquement.*

Ensuite, pour un nombre naturel k, désignons par $R_k(\mathfrak{F})$ la famille de tout ensemble $R_k(E)$ dont E appartient à $\mathfrak{F}$.

Théorème 4. *Etant donné un nombre naturel m, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathfrak{F}$ monotone d'ensembles (D_m) présente un type d'ordination linéaire, c'est que $\mathfrak{F}$ et $R_k(\mathfrak{F})$ $(k=1,2,\ldots,2m-2)$ jouissent de la propriété P.*

Il n'est pas du tout difficile de prouver la nécessité de notre condition. Pour vérifier qu'elle soit suffisante, supposons que $\mathfrak{F}$ et $R_k(\mathfrak{F})(k=1,2,\ldots,2m-2)$ jouissent de la propriété P.

D'abord, dans $\mathfrak{F}$ s'il existe des éléments E de deuxième espèce, la totalité des fermetures de tels éléments est au plus dénombrable; l'énumérons et désignons encore par (4). Pour tout n, soit $\mathfrak{F}_n$ la famille de tout ensemble E appartenant à $\mathfrak{F}$ et tel qu'on ait $\overline{E}=\overline{E}_n$ (si la suite (4) est terminée à n', posons $\mathfrak{F}_n=0$ pour $n>n'$). Ensuite, faisons $R_1(\mathfrak{F}_n)$ pour tout $\mathfrak{F}_n$. Dans une $R_1(\mathfrak{F}_{n_0})$ de celles-ci s'il existe des éléments $R_1(E)$ de deuxième espèce, la totalité des fermetures $\overline{R_1(E)}$ de tels éléments est au plus dénombrable, parce que $R_1(\mathfrak{F})$ jouit de P et $R_1(\mathfrak{F}_{n_0})\subseteqq R_1(\mathfrak{F})$; l'énumérons et désignons par

$$(11)\qquad R_{n_0,1},\ R_{n_0,2},\ \ldots,\ R_{n_0,n},\ \ldots\ .$$

Pour tout n, soit $\mathfrak{F}_{n_0,n}$ la famille de tout ensemble E appartenant à $\mathfrak{F}_{n_0}$ et tel qu'on ait $\overline{R_1(E)}=R_{n_0,n}$ (si la suite (11) est terminée à n', posons $\mathfrak{F}_{n_0,n}=0$ pour $n>n'$). Si, dans une $R_1(\mathfrak{F}_{n_0})$ il n'y a pas d'éléments deuxième espèce, posons, $\mathfrak{F}_{n_0,n}=0$ pour tout n. Et ainsi de suite.

En supposant qu'une sous-famille $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k}$ de $\mathfrak{F}$ soit définie pour un système fini $(n_0,n_1,\ldots,n_k)$ de $k+1\,(k\leqq 2m-3)$ nombres naturels, nous définissons $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k,n}$ pour $n=1,2,\ldots$. Si $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n}$ n'est pas vide, nous faisons $R_{k+1}(\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k})$ pour $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k}$. Dans $R_{k+1}(\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k})$ s'il existe des éléments $R_{k+1}(E)$ de deuxième espèce, la totalité des fermetures $\overline{R_{k+1}(E)}$ de tels éléments est au plus dénombrable, parce que $R_{k+1}(\mathfrak{F})$ jouit de P et $R_{k+1}(\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k})\subseteqq R_{k+1}(\mathfrak{F})$; l'énumérons et désignons par

$$(12)\qquad R_{n_0n_1\cdots n_k,1},\ R_{n_0n_1\cdots n_k,2},\ \ldots,\ R_{n_0n_1\cdots n_k,n}\cdots\ .$$

Pour tout n, soit $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k,n}$ la famille de tout ensemble E appartenant à $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k}$ et tel qu'on ait $\overline{R_{k+1}(E)}=R_{n_0n_1\cdots n_k,n}$ (si la suite (12) est terminée à n' naturel, posons $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k,n}=0$ pour $n>n'$). Si, dans $R_{k+1}(\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k})$ il n'y a pas d'éléments de deuxième espèce, posons $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k,n}=0$ pour tout n.

Pour toutes familles $\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k}(k=0,1,2,\ldots,2m-2)$ ainsi définies, nous avons

$$(13)\qquad \mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_k}\supseteqq\mathfrak{F}_{n_0n_1\cdots n_kn_{k+1}},$$

(14) si $(n_0, n_1, \ldots, n_k) \neq (n_0', n_1', \ldots, n_k')$, $\mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n_k} \cap \mathfrak{F}_{n_0' n_1' \cdots n_k'} = 0$.

Maintenant, définissons l'application $\varphi_{n_0 n_1 \cdots n_k}(E)$ pour tout ensemble E de $\mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n_k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, 2m-2)$ comme il suit:

$$(15) \qquad \varphi_{n_0 n_1 \cdots n_k}(E) = \frac{1}{2} f(\overline{R_{k+1}(E)}) + \sum_{n \in \sigma_{n_0 n_1 \cdots n_k}(E)} \frac{1}{3^n},$$

où $\sigma_{n_0 n_1 \cdots n_k}(E)$ est un ensemble de nombres naturels n tels qu'on ait $R_{n_0 n_1 \cdots n_k, n} \supseteqq \overline{R_{k+1}(E)}$.

Soit E un ensemble quelconque appartenant à $\mathfrak{F}$. Si E est un élément de première espèce de $\mathfrak{F}$, posons

$$(16) \qquad f_m(E) = \varphi(E).$$

Si non, il y a deux cas.

Ou bien il existe un et un seul nombre entier $k (0 \leqq k \leqq 2m-3)$ et un système de nombres naturels $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ tels qu'on ait:

$$(17) \qquad E \in \mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n_k}, \quad \text{et} \quad E \,\bar{\in}\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n_k, n}.$$

En ce cas, s'il y a des éléments deuxième espèce de $R_{k+1}(\mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n})$, posons

$$(18) \qquad f_m(E) = \varphi(E) - \frac{1}{3^{n_0}} \varphi_{n_0}(E) + \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{3^{n_0+n_1+\cdots+n_k}} \varphi_{n_0 n_1 \cdots n_k}(E),$$

et s'il n'y en a rien, posons

$$(19) \qquad f_m(E) = \varphi(E) - \frac{1}{3^{n_0}} \varphi_{n_0}(E) + \cdots + \frac{(-1)^{k}}{3^{n_0+n_1+\cdots+n_{k-1}}} \varphi_{n_0 n_1 \cdots n_{k-1}}(E) + \frac{(-1)^{k+1}}{3^{n_0+n_1+\cdots+n_k}} f(\overline{R_{k+1}(E)}).$$

Ou bien il existe un système de nombres naturels $(n_0, n_1, \ldots, n_{2m-2})$ tel qu'on ait:

$$(20) \qquad E \in \mathfrak{F}_{n_0 n_1 \cdots n_{2m-2}}.$$

En ce cas, posons

$$(21) \qquad f_m(E) = \varphi(E) - \frac{1}{3^{n_0}} \varphi_{n_0}(E) + \cdots + \frac{1}{3^{n_0+n_1+\cdots+n_{2m-3}}} \varphi_{n_0 n_1 \cdots n_{2m-3}}(E) - \frac{1}{3^{n_0+n_1+\cdots+n_{2m-2}}} f(\overline{R_{2m-1}(E)}).$$

On verra sans peine que $f_m(E)$ réalise une application conforme entre $\mathfrak{F}$ ordonnée et un ensemble linéaire.