# 202. Sur Quelques Types des Théorèmes de Dualité dans les Groupes Topologiques. II

Par Shin-ichi MATSUSHITA
Osaka Cité Université

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Dec. 13, 1954)

**6.** Les paragraphes 6~8 traitent de la recherche d'un type de la dualité au sens de M. L. Pontrjagin sous la manière analogue comme dans les paragraphes précédants;[1] pour ce type de la dualité il n'en est plus du tout de même que les types étudiés jusqu'à présent. En effet, pour un groupe localement compact ($l.c.$) abélien $G$, le *théorème classique de Pontrjagin* peut s'écrit

$$G \cong \Phi^0(L(\Phi^0(L(G)))),^{2)} \tag{6.1}$$

où $L(G)$ désigne l'algèbre de Banach involutive des fonctions sommables sur $G$ (pour une mesure de Haar), algèbre munie du produit de composition, de la norme d'espace $L^1$ et de l'involution $f \longrightarrow f^*$, $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$.[3] Ici on sait que $\Phi^0(L(G))$ n'est autre chose que le groupe dual $\hat{G}$ de $G$. Tous les caractères $\chi$, $\chi \in \hat{G}$,[4] appartinnent à $A(G)$ et d'après la *théorie de M. J. von Neumann*, ils forment une base de la structure d'espace vectoriel sur $A(G)$.

Désormais quand nous parlerons d'un groupe $G$, il sera toujours considéré comme un groupe $l.$ $c.$ abélien, ainsi naturellement $max.$ $p.$ $p.$; nous avons automatiquement ${}_G\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_G$ et ${}_G^0\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_G^0$.

Or, nous avons défini ${}_G^0\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_G^0$ comme sous-groupes topologiques du groupe précompact $\mathfrak{S}(G)$, muni de la topologie séparée (induite par la convergence simple sur $A(G)$) définie par (3.1) plus haut: mais il est possible de munir ${}_G^0\mathfrak{S}$ lui-meme d'une nouvelle topologie, qui rendra les mêmes services que la topologie du groupe bi-dual $\hat{\hat{G}}$. Soient $\hat{K}$ une partie compacte de $\hat{G}=\Phi^0(L(G))$, muni de la topologie usuelle comme le groupe dual,[5] et $\varepsilon$ un nombre $>0$ quel-

---

1) 2) S. Matsushita: *Sur quelques types des théorèmes de dualité dans les groupes topologiques*, Proc. Japan Acad., **30**, 849 (1954). Nous faisons usage des résultats et des notations de cette Note.

3) Si $G$ est non abélien, une mesure de Haar sur $G$ sera en général supposée à gauche et $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}\rho(x)$, où $dx^{-1}=\rho(x)dx$.

4) Lorsqu'on parle d'un caractère $\chi$, il sera toujours supposé d'être continu.

5) La topologie usuelle de $\hat{G}$ (topologie de Pontrjagin) est définie par le système fondamental de voisinages de chaque $\chi \in \hat{G}$ tels que

$$v_\chi(F,\varepsilon)=\{\chi';\ |\chi'(x)-\chi(x)|<\varepsilon \text{ pour tout } x\in F\}, \tag{*}$$

où $F$ décrit une famille quelconque de compacts de $G$; $cf.$ e. g. L. H. Loomis: *Abstract Harmonic Analysis*, 34C. Princeton (1953).

conque; lorsque les paires $(\hat{K}, \varepsilon)$ varient de toutes les manières possibles, les ensembles $\tilde{\omega}_S(\hat{K}, \varepsilon)$ des $T \in {}^0_G\mathfrak{S}$ tels que

(6.2) $\quad \tilde{\omega}_S(\hat{K}, \varepsilon) = \{T;\ |T\chi(e) - S\chi(e)| < \varepsilon$ pour tout $\chi \in \hat{K}\}$

forment un système fondamental de voisinages de $S \in {}^0_G\mathfrak{S}$ dans la topologie annoncée ci-dessus. C'est une topologie uniforme séparée; en effet, si $S\chi(e) = T\chi(e)$ pour tout $\chi \in \hat{G}$, on a $S\chi(a) = S_a S\chi(e) = S(S_a\chi)(e) = S(\chi(a)\cdot\chi)(e) = \chi(a)S\chi(e) = \chi(a)T\chi(e) = T\chi(a)$ pour $a \in G$, car $S_a\chi(\cdot) = \chi(\cdot a) = \chi(a)\chi(\cdot)$, et tous opérateurs considérés sont bornés: si $S \neq T$, il existe au moins un $\chi$ tel que $\tilde{\omega}_S(\chi, \varepsilon) \frown \tilde{\omega}_T(\chi, \varepsilon) = 0$.

7. Nous nous proposons de démontrer le

**Théorème 4.** *En muissant* $\mathfrak{S}(={}_G\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_G)$ *de la topologie* (6.2), *on a les isomorphismes suivants:*

(7.1) $\quad G \cong \mathfrak{S} \cong \hat{\hat{G}}$ *(Dualité de Pontrjagin aux opérateurs).*

Pour cela, nous démontrons succesivement par recurrence;

1°. *l'application* $S_a \in \mathfrak{S}_G \longrightarrow \xi_a \in \hat{\hat{G}} = \Phi^0(L(\hat{G}))$ *est une 1–1 application continue de* $\mathfrak{S}(={}_G\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_G)$ *dans une partie* $[G]$ *de* $\hat{\hat{G}}$, où $\xi_a(\hat{f})$ est la transformée de $\hat{f} \in L(\hat{G})$, $\quad \xi_a(\hat{f}) = \int_{\hat{G}} \xi_a(\chi)\hat{f}(\chi)d\chi = \int_{\hat{G}} \chi(a)\hat{f}(\chi)d\chi;$

en effet, en comparant les topologies de $\mathfrak{S}$ et de $\hat{\hat{G}}$, on obtient aisément la continuité de cette application. Puis on a

2°. *l'application* $\xi_a \longrightarrow a$ *de* $[G]$ *sur* $G$ *est continue.* Puisque $\hat{\hat{G}}$ est *l. c.*, sa topologie de Pontrjagin est bien compatible avec une topologie définie par le système de voisinages $\hat{U}_\xi$ de $\xi$;

(7.2) $\quad \hat{U}_\xi(\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n;\ \varepsilon) = \{\xi';\ |\xi'(\hat{f}_j) - \xi(\hat{f}_j)| < \varepsilon,$
pour $j = 1, 2, \ldots, n\}$,[6]

où $\xi(\hat{f})$ est la transformée de Fourier de $\hat{f} \in L(\hat{G})$. Étant donné un voisinage $U(a)$ de $a$ dans $G$, on montre qu'un voisinage $\hat{U}_{\xi_a}(\hat{f}_0;\ \varepsilon)$ est appliqué dans $U(a)$, où $\hat{f}_0$ est la transformée de telle $f_0$ qu'on ait $f_0(x) = \int_G g_v(y)g_v(a^{-1}xy)dy$ pour un voisinage compact $V(e)$ de $e$ tel que $V(e) \subset U(a)\cdot a^{-1}$ et pour une $g_v$ continue à support compact, son support étant contenu dans $V(e)$, de plus $\varepsilon > 0$ est adopté comme $< f_0(a)$. Ceci étant, $f_0$ est une fonction continue avec le support compact $\subset U(a)$, qui appartient à $\Pi(G)$, espace des combinaisons linéaires des fonctions de type positif.[7] En vertu du théorème

6) Voir L. H. Loomis: *Loc. cit.*, encore D. A. Raïkov: *Harmonic analysis on commutative groupes* ~, Travaux de l'Inst. Math. Stekloff, **14** (1945), § 7.

7) *Cf.* S. Matsushita: *Analyse harmonique, I et II*, C. R. Acad. Sci., Paris, 955–957, 1056–1057 (1953), et *Sur le théorème de Plancherel*, Proc. Japan Acad., **30** (1954).

d'inversion de Fourier,[8] $\xi_a(\hat{f}_0)$ est égal à $f_0(a)$, d'où l'énoncé.

3°. *l'application* $a(\in G) \longrightarrow S_a \in \mathfrak{S}_G$ *est continue*: quel que soit le voisinage $\tilde{\omega}(\hat{K}, \varepsilon)$ de $S_a$, on peut trouver un voisinage $U(a)$ de $a$ qui est appliqué dans celui-là. En effet, soit $V(e)$ un voisinage compact de $e$ quelconque, il existe alors un recouvrement fini de $\hat{K}$ tel que $\hat{K} \subset \sum_{j=1}^{n} v_{\chi_j}(\bar{V}, \varepsilon/2)$, $v_\chi$ étant un voisinage de $\chi$ dans $\hat{G}$ et $\bar{V}$ l'adhérence de $V(e)$, car $\hat{K}$ est compact. D'autre part, puisque $\chi_j$ $(j=1, 2, \dots, n)$ sont continues sur $G$, il existe un voisinage $W(a)$ de $a$ tel qu'on ait

$$|\chi_j(a) - \chi_j(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } x \in W(a),\ 1 \leq j \leq n. \tag{7.3}$$

En posant $U(a) = W(a) \frown (V(e) \cdot a)$, si $x \in U(a)$, il y a un $j$ tel que $|\chi(xa^{-1}) - \chi_j(xa^{-1})| < \varepsilon/2$ pour chaque $\chi \in \hat{K}$, comme $xa^{-1} \in V(e)$: d'ailleurs il vient de (7.3) que $|\chi_j(xa^{-1}) - 1| = |\chi_j(x) - \chi_j(a)| < \varepsilon/2$. Enfin, on a $|\chi(x) - \chi(a)| = |\chi(xa^{-1}) - 1| \leqq |\chi(xa^{-1}) - \chi_j(xa^{-1})| + |\chi_j(xa^{-1}) - 1| < \varepsilon$, ce qui établit l'assertion.

En combinant 1°, 2° et 3°, on en conclute que $G$, $[G]$, et $\mathfrak{S}$ sont homéomorphes l'un à l'autre, donc $[G]$ et $\mathfrak{S}$ forment groupes topologiques *l. c.*, isomorphes à $G$ lui-même. Ceci étant, le sous-groupe $[G]$ de $\hat{\hat{G}}$ est fermé,[9] et selon qu'il est dense dans $G$,[10] il en résulte que $[G] = \hat{\hat{G}}$.

Conformément au Théorème 1 plus haut, on en déduit le

**Théorème 5.** *En munissant* $\tilde{G}(\subset \Phi^0(A(G))$; *cf. Théorème* 2, $\beta$) *de la topologie définie par le système fondamental de voisinages de* $\varphi_0 \in \tilde{G}$ *tels que*

$$\omega_{\varphi_0}(\hat{K}, \varepsilon) = \{\varphi;\ |\varphi(\chi) - \varphi_0(\chi)| < \varepsilon \text{ pour tout } \chi \in \hat{K}\}, \tag{7.4}$$

*où* $\hat{K}$ *parcourt une famille quelconque de compacts dans* $G$, *on a* $G \cong \tilde{G} \cong \hat{\hat{G}}$ (*Dualité usuelle de Pontrjagin*).

8. En munissant $A(G)$ de nouvelles topologies suivantes au lieu de considère lui-même comme un espace de Banach, nous pouvons maintenant donner un nouveau sens pour le sujet étudié ci-dessus. La première topologie est *topologie de la convergence simple* $\Gamma_1$ et le dernier *topologie de la convergence compacte* $\Gamma_2$ (en considérant $A(G)$ comme un sous-espace du produit topologique $K^G$, où $K$ désigne le corps des nombres complexe). Pour ces topologies,

8) *Cf.* H. Cartan-R. Godement: *Théorie de la dualité* $\sim$, Ann. Éc. Norm. Sup., LXIV (1948). D. A. Raïkov: *Loc. cit.* (Thr. 15); S. Matsushita: *Loc. cit.* (§ 2 et § 6 du *Dernier*).

9) N. Bourbaki: *Topologie générale*, Chap. III, § 2, *exercice 6* (1951).

10) D'après le théorème de Plancherel.

$A(G)$ est séparé localement convexe, comme on le vérifie directement. Soient $\mathring{A}(G)$ l'espace vectoriel topologique obtenu en munissant $A(G)$ de cette topologie $\Gamma_2$, et $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ l'ensemble des fonctionnelles $\varphi$ linéaires continues (pour $\Gamma_2$) sur $\mathring{A}(G)$ telles que $\varphi \neq 0$ et $\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g)$, alors on a assurément $\Phi_0(A(G)) \supset \Phi^0(\mathring{A}(G)) \supset \widetilde{G}$.

Or, la topologie propre (de Pontrjagin) de $\widehat{G}$ est compatible avec la topologie d'un sous-ensemble de $\mathring{A}(G)$, ce qui exprime que tout élément $\mathring{\varphi} \in \Phi^0(\mathring{A}(G))$ est un caractère de $\widehat{G}$; soit $\mathring{\varphi}_1(\chi)=\mathring{\varphi}_2(\chi)$ pour tout $\chi \in \widehat{G}$, on a alors $\mathring{\varphi}_1=\mathring{\varphi}_2$ (identiquement) puisque $\widehat{G}$ forme une base de la structure d'espace vectoriel sur $A(G)$ et toute fonctionnelle $\varphi$ de $\Phi^0(A(G))$ est bornée (plus précisément, de norme 1), d'où il vient que $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ peut être considéré comme une partie de $\hat{\hat{G}}$ (qui est isomorphe à $\widetilde{G}$ en vertu du Théorème 5), donc

$$\widetilde{G}=\Phi^0(\mathring{A}(G)) \cong \hat{\hat{G}} \cong G \quad \text{(pour la topologie (7.4)).} \tag{8.1}$$

Par ailleurs, la topologie (7.4) dans $G$ est compatible avec celle de Pontrjagin dans $\hat{\hat{G}}$ et donc avec la topologie restreinte sur $\hat{\hat{G}}$ considéré comme une partie de $\mathring{A}(\widehat{G})$; nous avons en résumé;

**Théorème 6.** i) *Lorsqu'on considère $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ comme une partie de $\mathring{A}(\widehat{G})$, $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ est isomorphe à $\hat{\hat{G}}$ et donc à $G$.* ii) *De plus, on peut ici remplacer $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ par $\Phi^0(\dot{A}(G))$, où les définitions de $\Phi^0(\dot{A}(G))$ et de $\dot{A}(G)$ sont obtenues en tenant la topologie $\Gamma_1$.*

La dernière partie ii) est une conséquence immediate du fait que $\Gamma_1$ est plus fine que $\Gamma_1$; ainsi $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ contient évidemment $\Phi^0(\dot{A}(G))$, mais puisque tous les deux $\subset \widetilde{G}$ et $\supset \widetilde{G}$ simultanément, ils sont identiques.

**9.** Or nous savons déjà que $\Phi^0(\dot{A}(G))=\hat{\hat{G}}$ comme parties topologiques de $\mathring{A}(\widehat{G})$, toutesfois il s'agit d'ici de considérer $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ comme une partie de $\dot{A}(\widehat{G})$; nous posons d'abord la

**Proposition 3.** *Le sous-ensemble $\Phi^0(\dot{A}(G))$ de $\dot{A}(\widehat{G})$ est uniformément homéomorphe à $\Phi^0(\mathring{A}(G))$, une partie de $\Phi^0(A(G))$, munie de la topologie faible propre.*[11]

Tout revient à prouver la continuité d'application de $\Phi^0(A(G))$ dans $\dot{A}(\widehat{G})$; elle est une conséquence directe du fait que l'espace de Banach $A(G)$ s'engendre linéairement par $\widehat{G}$ pour la topologie uniforme sur $G$; plus précisément, pour un voisinage $\omega_{\varphi_0}(f, \varepsilon)$ de $\varphi_0$ quelconque il suffit de prendre $\tilde{\omega}_{\varphi_0}(\chi_1, \ldots, \chi_n; \varepsilon')$ dans $\dot{A}(\widehat{G})$, où

11) *Cf.* n°1 (ma Note précédente).

$\|f-\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_i\| < \varepsilon/3$ dans $A(G)$ et $\varepsilon'=\varepsilon/(3\cdot\sum_{i=1}^{n}|a_i|)$.

On en conclut aussitôt que l'adherence de $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ dans $\dot{A}(\hat{G})$ est égal à $\Phi^0(A(G))$, car $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ $(=\tilde{G})$ est dense dans celui-là: le groupe compact $\Phi^0(A(G))$ n'est alors autre que ce qui est connu sous le nom de *compactification de Bohr*.

Ces raisonnements permettent d'écrire;[12]

(9.1)
$$\begin{tikzcd}
\Phi^0(\dot{A}(G)) & \equiv \Phi^0(\mathring{A}(G)) \subset \Phi^0(A(G)) \subset & \dot{A}(\hat{G}) \\
G \arrow[u] \arrow[u, equal, shift left] \arrow[ur, phantom, "(\text{Compactification de Bohr})"] \arrow[r, leftrightarrow, "(\text{Dualité de Pontrjagin})"'] & \hat{\hat{G}} \subset & \mathring{A}(\hat{G}),\ \hat{G}=\Phi^0(L(G)). \arrow[u] \arrow[u, equal, shift left]
\end{tikzcd}$$

En particulier lorsqu'on considère le cas $G=R$, groupe additif des nombres réels, on a $G=\hat{G}=R$ et $\Phi^0(\mathring{A}(G))$ est bien situé dans le produit cartésien $\Pi\otimes_{t\in R}T_{(t)}$, ou $T_{(t)}$ est le cercle unité de $K$ pour chaque $t\in\hat{G}=R$, c'est-à-dire $T_{(t)}=\{e^{i\theta}\,|\,0\leqq\theta<2\pi\}$. Par les notations d'un Mémoire de *M. E. Hewitt*,[13] $\Phi^0(\mathring{A}(R))=R_w$ et $\Phi^0(A(G))=bR$; (9.1) se réduit alors en la forme;

(9.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathring{A}(R) \supset R \arrow[r, Rightarrow] & R_w \subset & bR \subset \dot{A}(R). \\
& \Phi^0(\mathring{A}(R)) \arrow[u, phantom, sloped, "\equiv"] & \Phi^0(A(R)) \arrow[u, phantom, sloped, "\equiv"]
\end{tikzcd}$$

10. Rappelons qu'il existe un filtre $\mathfrak{F}_G$ dans $P(G)\frown L^0(G)$ qui converge étroitement vers la *distribution de Dirac*, la masse $+1$ placée en $e$, et qu'une famille des $f_\lambda dx$ pour $f_\lambda\in P(G)\frown L^0(G)$ telle que $\int_G f_\lambda(x)dx=1$ et le support de $f_\lambda$ soit contenu dans un voisinage $U_\lambda(e)$ de $e$, dont $U_\lambda\longrightarrow(e)$ avec $\lambda$, forme une base de $\mathfrak{F}_G$. On connaît de plus que pour les transformées de Fourier $\hat{f}_\lambda$ de ces $f_\lambda$, $\hat{f}_\lambda d\chi$ convergent vaguement vers la mesure de Haar $d\chi$ sur $\hat{G}$. Considérons maintenant le dernier filtre $\mathfrak{F}_{\hat{G}}^*$ sur $\hat{G}$ qui est obtenu en replaçant chaque $f_\lambda\in\mathfrak{F}_{\hat{G}}$ par $g_\lambda=f_\lambda/\|f_\lambda\|_\infty$; on a alors $\|\hat{g}_\lambda\|=\hat{g}_\lambda(e)$ $=1$.

D'autre part, toute mesure $\eta$ de masse totale finie sur $G$ définit une fonctionnelle linéaire continue $\tilde{\eta}$ sur $A(G)$ de manière que $\tilde{\eta}(f)=\int_G f(x)d\eta(x)$, et d'après (1.1) $\tilde{\eta}$ définit aussi une mesure $d\tilde{\eta}$ telle que $\tilde{\eta}(f)=\int_G f(x)d\eta(x)=\int_{\mathfrak{G}}\mathring{\phi}f(\varphi)d\tilde{\eta}(\varphi)$, où $\mathfrak{G}\equiv\Phi^0(A(G))$; voir

12) Les signes $=\!=\!=$ et $\longrightarrow$ désignent respectivement un isomorphisme et une application continue. *Cf*. Tableau de n°5.

13) E. Hewitt: *Linear functionals on almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953).

n°1. D'après (1.2) la valeur moyenne $\mu(f)$ pour $f \in A(G)$ définit une mesure de Haar $d\nu$ sur $\mathfrak{G}$; comme $\mathfrak{G}$ est compact, son dual $\hat{\mathfrak{G}}$ est discret et la transformée de Fourier de $d\nu$ est égale à la *fonction de Dirac*:[14] d'ailleurs, en désignant $\hat{G}$ muni de la topologie discrète par $\hat{G}_d$, on a $\hat{\mathfrak{G}} \equiv \hat{G}_d$.[15] Alors on établit le

**Théorème 7.** *En désignant les transformées de Fourier des* $g_\lambda \in \mathfrak{F}^*_{\hat{G}}$ *par* $\eta_\lambda$ *(c'cst-à-dire* $d\eta_\lambda(x) = \hat{g}_\lambda(x)dx$*), on a pour* $f \in A(G)$

$$(10.2) \qquad \mu(f) \ (moyenne) = \lim_\lambda \int_G f(x) d\eta_\lambda(x).$$

En effet, pour tout $\dot{\chi} \in \hat{G}_d(\dot{\chi}(\varphi) = (\mathring{\phi}\chi)(\varphi)$ pour $\chi = \dot{\chi} \in \hat{G})$,

$$\left| \int_{\mathfrak{G}} \dot{\chi}(\varphi)[d\tilde{\eta}_\lambda(\varphi) - d\nu(\varphi)] \right| = \left| \int_{\mathfrak{G}} \chi(x)\hat{g}_\lambda(x)dx - \int_{\mathfrak{G}} \dot{\chi}(\varphi)d\nu(\varphi) \right| \longrightarrow 0,$$

avec $\lambda$, puisque $\int_{\mathfrak{G}} \dot{\chi}(\varphi)d\nu(\varphi) = 1$ si $\dot{\chi} = \chi_0$ (élément unité de $\hat{G}$) ou $=0$ si $\dot{\chi} \neq \chi_0$ et $\int_G \chi(x)\hat{g}_\lambda(x)dx = g_\lambda(\chi)$ qui est$=1$ si $\chi = \chi_0$ ou$\longrightarrow 0$ (avec $\lambda$) si $\chi \neq \chi_0$,[16] ainsi la transformées de Fourier des mesures $\tilde{\eta}_\lambda - \nu$ convergent vers 0 sur tout compact de $\hat{\mathfrak{G}}$, donc $\tilde{\eta}_\lambda - \nu$ mêmes vers 0 vagument sur $\mathfrak{G}$,[17] d'où résult l'assertion.

**Complemént.** *Les transformées* $\hat{f}_\lambda(x)dx$ *de Fourier des* $f_\lambda \in \mathfrak{F}_{\hat{G}}$ *convergent vaguement vers la mesure de Haar* $dx$ *sur* $G$, comme on le vit dans ma Note précédente. Par contre, si $G$ n'est pas compact,

$$(10.3) \qquad \lim_\lambda \int_G h(x)d\eta_\lambda(x) = 0 \quad pour\ tout\ h \in L^0(G).$$

A toute $g \in P(\hat{G})$ est associées une mesure $>0$ de Radon de masse totale finie $\mu_g$ sur $G$ et donc une $\tilde{\mu}_g$ sur $\mathfrak{G}$, telles qu'on ait $g(\chi) = \int_G \chi(x)d\mu_g(x) = \int_{\mathfrak{G}} \dot{\chi}(\varphi)d\tilde{\mu}_g(\varphi)$, par exemple, si $G = R(=\hat{G})$ on a

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\mu_g(x) = \int_{bR} \mathring{\phi}(e^{it\cdot})(\varphi)d\tilde{\mu}_g(\varphi).^{18)}$$

14) Une fonction égale à 1 au point original et à 0 aux autres points.

15) Tout $\dot{\chi}$ est continu sur $\tilde{G}$, donc $\dot{\chi}(\phi(x)) = \chi(x)$ est continu sur $G$, car $\tilde{G} \leftarrow G$ est continue, d'où $\dot{\chi}$ est confondant avec $\chi \in \hat{G}$. Inversement, pour tout $\chi \in \hat{G}$, $\dot{\chi}(\phi(x)) = \mathring{\phi}\chi(\phi(x)) = \chi(x)$ et $\mathring{\phi}(\chi)$ est continue, d'où si $\varphi_\lambda \to \varphi$, $\phi_\lambda \to \phi$, $\varphi_\lambda$, $\phi_\lambda \in \tilde{G}$, on a $\dot{\chi}(\varphi\phi) = \lim_\lambda \dot{\chi}(\varphi_\lambda \phi_\lambda) = \lim_\lambda \dot{\chi}(\varphi_\lambda)\dot{\chi}(\phi_\lambda) = \dot{\chi}(\varphi)\dot{\chi}(\phi)$; c.-à-d., $\dot{\chi} \in \hat{\mathfrak{G}}$.

16) 17) Cartan et R. Godement: *Loc. cit.* n°19 et n°9 (Remarque).

18) E. Hewitt: *Loc. cit.* 3.3.3.