101. *Laplacien Local et la Décomposition de F. Riesz*

Par Shin-ichi MATSUSHITA

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., July 12, 1956)

§1. Dans mes Notes précédentes,[1] j'exposai quelques résultats sur un théorème fondamental de F. Riesz relatif à la décomposition de fonctions surharmoniques: les principales propositions établies dans ces Notes s'énoncent comme suit (sous quelque peu de corrections d'expression et typographiques).

Étant donné un domaine D quelconque dans l'espace euclidien à n dimensions ($n \geqq 3$) E^n, muni de la distance (euclidienne) $r(x, y)$, nous désignerons: $\mathfrak{M}^+(D)$ = cône convexe des mesures de Radon positives dans D, $\Gamma(D)$ = ensemble convexe constitué des fonctions surharmoniques, et $L^+(D)$ = ensemble convexe des fonctions $\geqq 0$ à supports compacts dans D. Désignons encore par $\mathfrak{M}(D)$, $\Pi(D)$, et $L^0(D)$ enveloppes linéaires sur le corps réel de $\mathfrak{M}^+(D)$, $\Gamma(D)$, et de $L^+(D)$ respectivement.[†] C^p désignera fonctions possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre p inclus, $1 \leqq p \leqq +\infty$.

Proposition 1 (Prop. 2 [1]). *Pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}(D)$, *on a* $\phi_D(U^\mu) = \mu$.

Ici ϕ_D est une application linéaire de $\Pi(D)$ dans $\mathfrak{M}(D)$ définie par

$$\langle \phi_D(f) \rangle (\varphi) = \int f(-\Delta\varphi)dx, \quad \Delta\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \tag{1.1}$$

pour $f \in \Pi(D)$, $\varphi \in L^0(D) \frown C^2$ (ϕ_D est positive sur le produit $\Gamma(D) \times (L^+(D) \frown C^2)$,[2] et celui-ci étant positivement riche dans $L^+(D)$, $\phi_D(f)$ peut se prolonger à une mesure positive tant que $f \in L^+(D)$),[3] et U^μ désigne le potentiel newtonien:

$$U^\mu(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2(n-2)\pi^{n/2}} \int r^{2-n}(x, y)\, d\mu(y).$$

Proposition 2 (Prop. 3 [1]). *Pour que* $f \in \Gamma(D)$ (*ou* $\in H(D) \equiv \Gamma(D) \frown -\Gamma(D)$), *il faut et il suffit que* $\phi_D(f) \in \mathfrak{M}^+(D)$ (*resp. que* $\phi_D(f)$ *soit nulle*).

Remarquons en passant que $H(D)$ est un espace vectoriel des fonctions harmoniques dans D.

---

1) S. Matsushita: Sur la décomposition de F. Riesz, I et II, C. R. Acad. Sci., Paris, **241**, 1252–1254, 1373–1375 (1955), citées resp. [1] et [2].

†) Tout élément f de $\Pi(D)$ se représente en la forme $f = f_1 - f_2$ pour $f_1, f_2 \in \Gamma(D)$; si $f_1(x) = f_2(x) = +\infty$, il convient de définir que $f(x) = 0$.

2) Prenons un voisinage compact du support de $\varphi \in L^+(D) \frown C^2$ comme B dans Lemme du §**2** et puis appliquons ce Lemme.

3) D'après une proposition de N. Bourbaki: Intégration, Livre **6**, Prop. 2, 56 (1952).

Proposition 3 (Thr. 1 [1]). *Soit D un domaine relativement compact, alors ϕ_D est un homomorphisme de $\Pi(D)$ sur $\mathfrak{M}(D)$, et le noyau de cet homomorphisme est $H(D)$.*

Dans le quotient $\Pi(D)/H(D)$, i) chaque classe d'équivalence contient un et un seul potentiel U^{μ} d'une $\mu \in \mathfrak{M}(D)$, ii) la différence de deux fonctions quelconques de la même classe est harmonique dans D.

En d'autres termes, c'est la "décomposition de F. Riesz",

(1.2) $$f = U^{\phi_D(f)} + f_D, \quad \text{où} \quad f_D \in H(D),$$

dont la décomposition est uniquement déterminée.

Proposition 4 (Thr. 3 [2]). *Pour que $f \in \Gamma(D)$, D étant quelconque, admette la décomposition (1.2), il faut et il suffit que $f \geqq$ une fonction convenable de $H(D)$.*

§2. Dans la Note [1], il y a quelques arguments incomplets pour démonstration; nous exposons maintenant une démonstration complète pour Prop. 2 et rappelons la démonstration de Prop. 1 sous la forme plus adaptée dans ce qui suit. Avant de prouver ellesmêmes, nous montrons d'abord le

Lemme (Prop. 1 [1]). *Soit B un domaine relativement compact tel que $\bar{B} \subset D$, alors il existe pour chaque $f \in \Gamma(D)$ une suite des $f_j \in \Gamma(B) \frown C^p$ $(p \geqq 2)$ telles que $f_j \nearrow f$ dans B:*[4] *les mesures positives $\mu_j = (-\Delta f_j) dx_B$ converge vaguement vers $\phi_B(f)$.*[5]

Comme $L^+(B) \frown C^2$ est positivement riche dans $L^+(B)$, il suffit de prouver pour $\varphi \in L^+(B) \frown C^2$. En effet, on a $(0 \leqq) \int \varphi \, d\mu_j = \int \varphi(-\Delta f_j) dx_B = \int f_j(-\Delta \varphi) dx_B$ (formule de Green), qui converge vers $\int f(-\Delta\varphi) dx = \langle \phi_B(f) \rangle(\varphi)$.

Démonstration de Prop. 1: Soient λ et λ' deux mesures sphériques sur les sphères Σ et Σ' de centre commun, $\Sigma \subset \Sigma' \subset D$.[6] Soit encore $\bar{B} \subset D$ et $\Sigma' \subset B$, et appliquons le Lemme ci-dessus pour U^{μ} d'une $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$, en prenant $f_j \in \Gamma(B) \frown C^3$ telles que $f_j \nearrow U^{\mu}$ dans B. Comme $U^{\lambda-\lambda'} \in L^+(B)$, on a alors $\int U^{\lambda-\lambda'} d\phi_D(f) = \int U^{\lambda-\lambda'} d\phi_B(U^{\mu}) = \lim_{j\to\infty} \int U^{\lambda-\lambda'} d\mu_j = \lim_{j\to\infty} \int U^{\mu_j} d(\lambda-\lambda') = \lim_{j\to\infty} \int f_j d(\lambda-\lambda') = \int U^{\mu} d(\lambda-\lambda') = \int U^{\lambda-\lambda'} d\mu$, parce que $U^{\mu_j} - f_j$ est harmonique dans B.[7] Les $U^{\lambda-\lambda'}$ étant totaux dans $L^0(D)$, on en conclut que $\phi_D(U^{\mu}) = \mu$.

Démonstration de Prop. 2: Considérons une suite décroissante des sphères $\Sigma_k \subset \Sigma$ de centres communs telles que $\Sigma_k \longrightarrow$ *le centre* x_0 de Σ (et donc de toute Σ_k).

4) C'est un résultat classique: p. ex. voir T. Radó: Subharmonic Functions, Chelsea Publ. Co. (1949).

5) dx_B désigne la restriction de dx dans B.

6) $\lambda(\lambda')$ est la mesure de masse totale $+1$ réparties uniformément.

7) $\Delta(U^{\mu_j} - f_j) = \Delta f_j - \Delta f_j = 0$, dont $\Delta f_j \in C^1$ dans B.

Soit $f=f_1-f_2$ pour $f_1, f_2 \in \Gamma(D)$ et supposons que $\phi_D(f)\geqq 0$ (par suite, $\phi_B(f)\geqq 0$ quel que soit $B\subset D$). Soit encore $\bar{B}\subset D$, $\Sigma\subset B$ et considérons $f_j^p \in \Gamma(B)\frown C^3$ telles que $f_j^p \nearrow f_p$ pour $p=1, 2$. λ_k étant sphérique sur Σ_k, on a alors $0\leqq \int U^{\lambda_k-\lambda}\, d\phi_B(f)=\int U^{\lambda_k-\lambda}$ $d(\phi_B(f_1)-\phi_B(f_2))=\lim_{j\to\infty}\int U^{\lambda_k-\lambda}\, d\mu_j^1-d\mu_j^2$ pour $\mu_j^p=(-\Delta f_j^p)dx_B$. D'ailleurs, $\lim_{j\to\infty}\int U^{\lambda_k-\lambda} d\mu_j^p=\lim_{j\to\infty}\int U^{\mu_j^p}(d\lambda_k-d\lambda)=\lim_{j\to\infty}\int f_j^p(d\lambda_k-d\lambda)=\int f_p(d\lambda_k-d\lambda)$ pour $p=1, 2$, d'où $0\leqq\int(f_1-f_2)(d\lambda_k-d\lambda)$ pour tout k. Si $f_2(x_0)\neq+\infty$, on a $f(x_0)-\int f\, d\lambda=(f_1(x_0)-\int f_1\, d\lambda)-(f_2(x_0)-\int f_2\, d\lambda)=\lim_{k\to\infty}\int f_1(d\lambda_k-d\lambda)-\lim_{k\to\infty}\int f_2(d\lambda_k-d\lambda)\geqq 0$, c'est-à-dire $f(x_0)\geqq\int f\, d\lambda$ pour un point x_0 tel que $f_2(x_0)\neq+\infty$.

Cela étant, f est presque-surharmonique au sens de Szpilrajn-Brelot dans D et $f=f_0$ presque partout (sur D) pour une et une seule $f_0 \in \Gamma(D)$,[8] d'où $f_0+f_2=f_1$ presque partout, par suite, partout sur D; on en conclut que $f=f_1-f_2=f_0 \in \Gamma(D)$.

Prop. 3 est une conséquence directe de Props. 1 et 2.

§3. L'opérateur ϕ_D sera dit *laplacien local* (relatif à D); dans ce paragraphe nous faisons quelques remarques sur *laplacien local*. Comme on l'a vu au §2, si D est relativement compact, ϕ_D produit un homomorphisme de $\Pi(D)$ sur $\mathfrak{M}(D)$; on va prolonger cet opérateur pour un ensemble quelconque $X\subset E^n$. Tout d'abord, on indique que:

Proposition 5. *Pour toute* $\mu \in \mathfrak{M}(E^n)$, *la mesure* $\phi_D(U^\mu)$ *est une restriction de* μ *à un ensemble* D, *notée* $\pi_D\mu$;

(3.1) $$\pi_D\mu=\phi_D(U^\mu).$$

Pour deux domaines D_1, D_2 tels que $D_2\subset D_1$, on a donc

(3.2) $$\phi_{D_2}(f)=\phi_{D_1}(U^{\phi_{D_2}(f)})=\phi_{D_2}(U^{\phi_{D_1}(f)}),$$

quelle que soit $f \in \Pi(D_1)$. En particulier, posant $\phi=\phi_D$ pour $D=E^n$, on voit immédiatement que

(3.3) $$\phi_D(f)=\phi_D(U^{\phi(f)})=\pi_D\cdot\phi(f).$$

D'une manière analogue, on peut définir en s'appuyant sur (3.3) l'opérateur ϕ_X pour un ensemble borélien X quelconque par $\phi_X(f)=\pi_X\cdot\phi(f)$, $f \in \Pi(E^n)$, où π_X désigne la restriction d'une mesure à X.

En posant $\phi_{X_1}\wedge\phi_{X_2}=\phi_{X_1}(U^{\phi_{X_2}(f)})$, on obtient aisément, $\phi_{X_1}\wedge\phi_{X_2}=\phi_{X_2}\wedge\phi_{X_1}=\phi_{X_1\cap X_2}=\pi_{X_1}\phi_{X_2}=\pi_{X_2}\phi_{X_1}$: l'ensemble de tous les ϕ_X constitue une algèbre commutative idempotente par rapport au produit $\wedge$ et à la somme $\phi_{X_1}\dot{+}\phi_{X_2}=\phi_{X_1}+\phi_{X_2}-\phi_{X_1}\wedge\phi_{X_2}$, avec l'élément neutre ϕ, qui est isomorphe à l'algèbre engendrée des opérateurs projectives dans E^n.

8) Voir p. ex. T. Radó: Loc. cit., p. 20; M. Brelot: Fonctions sous-harmoniques, presque sous-harmoniques ou sous-médianes, Ann. Univ. Grenoble, **21**, 75–90 (1945).

La norme de ϕ_X est définie par;

(3.4) $$|||\phi_X|||=\sup_{||f||\leqq 1}||\phi_X(f)|| \text{ pour } f\in \Gamma^+(E^n),$$[9]

où $\Gamma^+(E^n)$ est l'ensemble convexe des fonctions $\geqq 0$ de $\Gamma(E^n)$. En multipliant la valeur $2(n-2)\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ à $|||\phi_X|||$, c'est justement égale à la *capacité d'un ensemble borélien* X (capacité selon de La Vallée Poussin). Les propriétés fondamentales de capacité résultent aisément de celles de la norme $|||\phi_X|||$; p. ex., $||\mu||=||\phi_X(U^\mu)||\leqq |||\phi_X|||\cdot||U^\mu||$ pour $\mu\in\mathfrak{M}(X)$, d'où résulte que si $|||\phi_X|||=0$, il n'existe aucune mesure finie portée par X telle qu'on ait $U^\mu<+\infty$.

Faisons finalement quelques remarques simples:

Remarque 1. Prenons au lieu du potentiel newtonien U^μ le potentiel V^μ dont le noyau est une *fonction de Green* $G(x, y)$ qui est régulière dans un domaine $D_0\supset D$ (domaine considéré):

(3.5) $$V^\mu(x)=\int G(x, y)\,d\mu(y)=U^\mu(x)-\int h(x, y)\,d\mu(y),$$

où $h\in H(D_0)$ par rapport à $x\in D_0$. Alors on a la

Proposition 6. *Les Propositions $1\sim 5$ restent vraies quand bien on remplacerait U^μ par V^μ, quel que soit $D\subset D_0$.*

Elle est une conséquence immédiate de ce que $\int h(x, y)\,d\mu(y)$ appartient aussi à $H(D_0)$: C'est le cas où M. S. Hitotumatu a étudié dans leur travail récent.[10]

Remarque 2. Dans la théorie des formes différentielles sur un variété (indéfiniment) différentiable, riemanien ou euclidien, l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta_0=(d+\delta)^2=d\delta+\delta d$ joule le même rôle que notre ϕ pour une forme α de degré 0 (fonction ordinaire); en effet, pour toute forme β de degré 0, on a $(\beta, \Delta_0\alpha)=\int\beta(\Delta_0\alpha)^*=$

$$\int\beta d\,\phi(\alpha)=\int\beta(-\Delta\alpha)e_{1\cdots n}\,dx_1\cdots dx_n,$$

où $e_{1\cdots n}$ est la composante du tenseur de Levi-Civita.[11] Le potentiel de $\Delta_0\alpha$ relatif à la paramétrie $\omega(x, y)$ de MM. Knaster-Hodge s'exprime alors

$$(\omega, \Delta\alpha)=\int\omega(x, y)\,d\phi(\alpha).$$

Remarque 3. Une distribution surharmonique H se réduit à une fonction presque-surharmonique et celle-ci est encore égale à une et une seule fonction surharmonique presque partout sur E^n; d'autre

9) $||\mu||$ désigne la norme d'une mesure μ; voir N. Bourbaki: Loc. cit.

10) S. Hitotumatu: Note on the Riesz decomposition of a subharmonic function, Comm. Math. Univ. Sancti Pauli, **3** (1955).

11) C'est égale à $\sqrt{g}$, g étant le déterminant $||g_{ij}||$ des *tenseurs covariants fondamentaux* g_{ij}, en tant que le système de coordonnées soit positif; Cf. *p. ex.* W. V. D. Hodge: The Theory and Applications of Harmonic Integrals, Cambridge (1952).

part, comme $-\Delta H$ est positive, elle n'est pas autre chose qu'une mesure positive. Ceci étant, le laplacien de M. L. Schwartz a le même sens que notre $-\phi$ et cela suggère que l'utilité de cet opérateur ϕ, au lieu de $-\Delta$, fournit bien tant qu'il s'agit des distributions surharmoniques.[12]

12) L. Schwartz: Théorie des Distributions, Hermann & Cie, Paris (1950). C'est lui-même qui a donné une démonstration de la décomposition de F. Riesz sous la forme la plus élégante, mais leur méthode s'appuie essentiellement sur l'emploi de solution élémentaire d'équation différentielle pour distributions.