34. *Une Généralisation du Théorème de Mackey*

Par Shouro KASAHARA
Université de Kobe

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., March 12, 1957)

Les propositions énoncées dans cette note sont contenues dans un mémoire d'auteur qui paraîtra prochainement,[1] et les démonstrations sont omises. Soient E et F deux espaces vectoriels localement convexes;[2] par $L(E, F)$, nous désignerons l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, et par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F.

Sauf mention expresse du contraire, nous désignons par E un espace vectoriel, et par F un espace normé. De plus, nous entendons par $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel *quelconque* de l'espace $L(E, F)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

(1) Quel que soit $w \in \mathcal{L}(F, F)$, les applications composées $w \circ u$ de w et $u \in \mathcal{L}$ appartiennent à $\mathcal{L}$;

(2) Quel que soit $x \neq 0$ dans E, il existe $u \in \mathcal{L}$ tel que $u(x) \neq 0$.

Or, dans l'espace $L(E, F)$ muni de la topologie de la convergence simple, $\mathcal{L}$ est partout dense, et par suite en munissant $\mathcal{L}$ de la topologie de la convergence simple, le dual $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ est identique à celui de $L(E, F)$. Nous appellons la topologie $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$[3] la *topologie faible* sur $\mathcal{L}$, ainsi par exemple, dire qu'une partie M de $\mathcal{L}$ est faiblement compacte dans $\mathcal{L}$ signifie que M est compacte pour la topologie $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. Une partie M de l'espace $L(E, F)$ est dite *F-disquée* ou un *F-disque*, si avec deux applications linéaires u et v, M contient aussi toutes les applications linéaires $w_1 \circ u + w_2 \circ v$, où w_1 et w_2 sont deux endomorphismes continues de F tels que $\|w_1\| + \|w_2\| \leqq 1$. Soit M une partie de $\mathcal{L}$; l'ensemble $\dot{M}$ des $u \in \mathcal{L}$ tels que $u(x) \in M(x)$ pour tout $x \in E$ s'appelle l'*adhérence algébrique* de M dans $\mathcal{L}$; si $M = M$, on dit que M est *algébriquement fermé* dans $\mathcal{L}$. Pour abréger des langages, nous dirons qu'une topologie sur E est *compatible avec* $\mathcal{L}$ si elle est localement convexe séparée et que l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ est identique à $\mathcal{L}$ lorsqu'on munit E de cette topologie.

THÉORÈME 1. *Soient E un espace vectoriel, F un espace normé, $\mathcal{L}$ un sous-espace vectoriel de $L(E, F)$ satisfaisant aux conditions (1) et*

1) S. Kasahara: Le problème de la dualité en une forme générale dans la théorie des espaces localement convexes, à paraître dans Math. Japonicae.

2) Tout espace vectoriel envisagé dans cette note est celui sur la droite numérique.

3) Pour cette notation voir N. Bourbaki: Espaces vectoriels topologiques, Chap. IV, Hermann, Paris (1955).

(*2*). *Soit* $\mathfrak{M}$ *un ensemble de F-disques faiblement bornés de* $\mathcal{L}$, *filtrant croissant et stable par homothéties. Munissons* E *de la topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$ *la moins fine rendant équicontinus tous les éléments* $M \in \mathfrak{M}$. *Alors l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *est identique au sous-espace de l'espace* $L(E, F)$ *réunion des adhérences faibles des adhérences algébriques, dans* $L(E, F)$, *des ensembles* $M \in \mathfrak{M}$. *Pour qu'une partie de l'espace* $L(E, F)$ *soit un ensemble équicontinu pour la topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$, *il faut et il suffit qu'elle soit contenue dans l'adhérence algébrique de l'adhérence faible, dans* $L(E, F)$, *d'un ensemble* $M \in \mathfrak{M}$.

THÉORÈME 2. *Sous les conditions du Théorème 1, en supposant que* F *est un espace de Banach réflexif, pour qu'une topologie* $\mathcal{T}$ *soit compatible avec toutes les applications linéaires de rang fini appartenant à* $\mathcal{L}$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{T}$ *soit identique à une topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$, *où* $\mathfrak{M}$ *est un ensemble de F-disques faiblement compacts dans* $\mathcal{L}$ *recouvrant* $\mathcal{L}$.

En particulier:

COROLLAIRE. *Soient* E *un espace vectoriel,* F *un espace normé de dimension finie,* $\mathcal{L}$ *un sous-espace vectoriel de* $L(E, F)$ *satisfaisant aux conditions* (*1*) *et* (*2*). *Pour qu'une topologie sur* E *soit compatible avec* $\mathcal{L}$, *il faut et il suffit qu'elle soit plus fine que la topologie* $\mathcal{T}(\{(u); u \in \mathcal{L}\}, F)$ *et moins fine que la topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$, *où* $\mathfrak{M}$ *est l'ensemble des F-disques faiblement compacts dans* $\mathcal{L}$. (Bien entendu, $\mathcal{T}(\{(u); u \in \mathcal{L}\}, F)$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications appartenant à $\mathcal{L}$.)

THÉORÈME 3. *Soient* E *un espace vectoriel,* F *un espace de Banach réflexif satisfaisant à la condition d'approximation,*[4] $\mathcal{L}$ *un sous-espace vectoriel de* $L(E, F)$ *satisfaisant aux conditions* (*1*) *et* (*2*). *Pour qu'une topologie sur* E *soit compatible avec* $\mathcal{L}$, *il faut et il suffit que ce soit identique à une topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$, *où* $\mathfrak{M}$ *est un ensemble de F-disques faiblement compacts et algébriquement fermés dans* $\mathcal{L}$ *recouvrant* $\mathcal{L}$.

Il résulte aussitôt le

THÉORÈME 4. *Soient* E *un espace localement convexe séparé,* F *un espace de Banach réflexif satisfaisant à la condition d'approximation. Les topologies sur* E *compatibles avec l'espace* $\mathcal{L}(E, F)$ *sont exactement les topologies localement convexes comprises entre la topologie* $\mathcal{T}(\{(u); u \in \mathcal{L}(E, F)\}, F)$ *et la topologie* $\mathcal{T}(\mathfrak{M}, F)$, *où* $\mathfrak{M}$ *est l'ensemble des F-disques faiblement compacts et algébriquement fermés dans* $\mathcal{L}(E, F)$.

Dans les théorèmes 1, 3 et 4, la condition que les ensembles appartenant à $\mathfrak{M}$ soient algébriquement fermés ne peut être superflue à moins que l'espace F soit de dimension finie.

4) Cf. A. Grothendieck: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Memoirs Amer. Math. Soc., no. 16 (1955).