61. *Sur la Dérivation de l'Intégrale (E. R.) Indéfinie. II*

Par Shizu NAKANISHI
Institut des Mathématiques, Université d'Osaka
(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., May 13, 1958)

Continuons l'étude sur la dérivation de l'intégrale $(E.\ R.)$ indéfinie.[1]

Théorème 8. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$. *Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, l'intégrale* $(E.\ R.)$ *indéfinie* $F(x)$ *de* $f(x)$ *est une fonction absolument continue au sens large*[2] *sur tout* F_n^*, *où* $F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty} F_m$, $(n=0, 1, 2,\cdots)$.

En effet, puisqu'on a

$$F(x)=\int_a^x f_0(x)\,dx+\int_a^x h(x)\,dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx,$$

où $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$, il suffit de montrer que la fonction $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^x r_n(x)\,dx$ est absolument continue au sens large sur tout F_m^*. Soient ε un nombre positif quelconque et n_0 une entier positif tel que $\sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-\nu_i}<\varepsilon/2$ et $n_0>m$. Alors, l'intégrale de la fonction $\sum_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|$ étant absolument continue sur $[a, b]$, il existe un nombre positif $\delta=\delta(\varepsilon)$ tel que

$$\text{mes}\, E<\delta \quad \text{entraîne} \quad \int_E\Big(\sum_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|\Big)dx<\frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit l'ensemble E contenu dans $[a, b]$.

Soit $[a_j, b_j]$ $(j=1, 2,\cdots, j_0)$ un système élémentaire quelconque tel que les extrémités appartiennent à F_m^* et dont la mesure $\sum_{j=1}^{j_0}(b_j-a_j)$ est inférieur à δ. Puisqu'alors les extrémités des intervalles $[a_j, b_j]$ appartiennent à F_i pour tout $i\geq n_0+1$, on a, d'après la condition $[3_2]$, pour tout $i\geq n_0+1$

$$\sum_{j=1}^{j_0}\Big|\int_{a_j}^{b_j} r_i(x)\,dx\Big|<2^{-\nu_i}.$$

Donc, on a

$$\sum_{j=1}^{j_0}|G(b_j)-G(a_j)|\leq\sum_{j=1}^{j_0}\int_{a_j}^{b_j}\Big(\sum_{i=0}^{n_0}|r_i(x)|\Big)dx+\sum_{j=1}^{j_0}\sum_{i=n_0+1}^{\infty}\Big|\int_{a_j}^{b_j} r_i(x)\,dx\Big|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}2^{-\nu_i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

---

1) S. Nakanishi: Sur la dérivation de l'intégrale $(E.\ R.)$ indéfinie. I, Proc. Japan Acad., **34**, 199-204 (1958).

2) Pour la définition, voir, par exemple, S. Saks: Theory of the Integral, 223 (1937).

De plus, on en déduit le

Corollaire 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* [3_1] *et* [3_2]. *Posons* $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. *Alors, l'intégrale* (*E. R.*) *indéfinie de* $f(x)$ *est absolument continue généralisée au sens large*[3] *sur l'ensemble* $\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n^*$, *où* $F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty}F_m$.

Montrons ensuite quelques conditions qui sont suffisantes pour que l'intégrale (*E. R.*) indéfinie $F(x)$ remplisse la condition (N) de Lusin sur $[a,b]$, c.-à-d. pour tout ensemble E contenu dans $[a,b]$

$$\text{mes}\,E=0 \quad \text{entraîne} \quad \text{mes}\,[F(x);\,x\in E]=0.$$

Or, $F(x)$ remplit, en vertu du Corollaire 1, la condition (N) de Lusin sur $\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n^*$. Donc, il suffit de montrer que les conditions entraînent la propriété suivante:

$$\text{mes}\,[F(x);\,x\in[a,b]-\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n^*]=0.$$

Lemme 1. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* [3_1] *et* [3_2] *et tel qu'il existe une fonction* $\phi(n)$ *de* n ($n=0,1,2,\cdots$) *qui jouit des conditions suivantes*:

(1) $\quad \phi(n)>0 \quad \textit{pour} \quad n=0,1,2,\cdots;$

(2) $\quad \sum_{n=0}^{\infty}\phi(n)<\infty;$

(3) *pour tout ensemble* E *contenu dans* $[a,b]-F_n$, *on a*

$$\int_E |f_{n+1}(x)|\,dx\le\phi(n).$$

Posons $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$. *Alors*, $F(x)=(E.\,R.)\int_a^x f(x)\,dx$ *possède la propriété suivante*:

$$\text{mes}\,[F(x);\,x\in[a,b]-\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n^*]=0, \quad \textit{où} \quad F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty}F_m.$$

Démonstration. Posons $A^*=[a,b]-\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n^*$ et $G_n^*=[a,b]-F_n^*$. On a alors $A^*=\bigcap_{n=0}^{\infty}G_n^*$. Soit ε un nombre positif quelconque. Alors, il existe un entier positif $n_0=n_0(\varepsilon)$ jouissant des propriétés suivantes:

1) $\quad 2^{-\nu_{n_0}+4}<\varepsilon/10;$

2) $\quad \sum_{n=n_0}^{\infty}\phi(n)<\varepsilon/10;$

3) $\quad \int_{G_{n_0}^*}p^*(x)\,dx<\varepsilon/10, \quad \text{où} \quad p^*=\sum_{n=0}^{\infty}|p_n(x)|;$

4) si $|x_1-x_2|<\text{mes}\,(G_{n_0}^*)$, on a $|F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon/10$.

$G_{n_0}^*$ étant un ensemble ouvert dans $[a,b]$, il s'exprime par la somme de la suite finie ou dénombrable d'intervalles disjoints. Désignons par

3) Pour la définition, voir S. Saks: Loc. cit., 223.

$I_{n_0 i}=(a_{n_0 i}, b_{n_0 i})$ $(i=1, 2, \cdots)$ tous les intervalles de la suite qui contiennent au moins un point de A^* et tels que $a_{n_0 i} \neq a$ ou $b_{n_0 i} \neq b$, et par $[a, b_0)$ et $(a_0, b]$ les intervalles qui contiennent respectivement a et b (si'il existe).

A) Montrons d'abord qu'on a, quel que soit $x_i \in I_{n_0 i} \cap A^*$ $(i=1, 2, \cdots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} |F(x_i)-F(a_{n_0 i})|<3\varepsilon/10$.

Puisque G_n^* s'exprime la somme de la suite finie ou dénombrable disjoints et que x_i $(i=1, 2, \cdots)$ appartiennent à G_n^*, on a, pour tout $n \geq n_0+1$, les intervalles de la suite $I_{ni}=(a_{ni}, b_{ni})$ $(i=1, 2, \cdots)$ tels que $I_{ni} \cap I_{ni'}=0$ $(i \neq i')$ et $I_{ni} \ni x_i$. Soit, pour tout $n \geq n_0+1$, I_{nij} $(j=1, 2, \cdots)$ tous les intervalles de la suite contenus dans $(a_{n-1,i}, a_{ni})$ $(i=1, 2, \cdots)$. Alors, les intervalles possèdent les propriétés suivantes:

5) $$I_{n_0 i} \supseteq I_{n_0+1, i} \supseteq \cdots \text{ et } \bigcap_{n=n_0}^{\infty} I_{ni}=\{x_i\}.$$

6) les extrémités a_{ni} et b_{ni} des intervalles I_{ni} $(n \geq n_0)$ appartiennent à F_n^*, et on a $I_{ni} \cap F_n^*=0$;

7) les extrémités des intervalles I_{nij} $(n \geq n_0+1)$ appartiennent à F_n^*, et on a $I_{nij} \cap F_n^*=0$ et $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_{nij}=(a_{n-1,i}, a_{ni}) \cap G_n^*$.

Ceci établi, nous allons montrer qu'on a $\sum_{i=1}^{\infty} |F(x_i)-F(a_{n_0 i})|<3\varepsilon/10$. Puisqu'on a $\bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{ni}, a_{n+1,i}) \subseteq G_n^* \subseteq [a, b]-F_n$, on a d'abord, d'après (3), pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} |f_{n+1}(x)|\, dx \leq \phi(n).$$

De plus, puisque les extrémités des intervalles $I_{n+1,ij}$ appartiennent à F_{n+1}^* et qu'elles appartiennent donc à F_m pour tout $m \geq n+1$, on a, d'après [3_2], pour tout $m \geq n+1$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{I_{n+1,ij}} r_m(x)\, dx \right| \leq 2^{-\nu_m},$$

d'où, en notant que $r_m(x)$ s'annule pour tout x appartenant à F_{n+1}^* pour tout $m \geq n+1$, on conclut que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \left| \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_m(x)\, dx \right| &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_m(x)\, dx \right| \right) \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{I_{n+1,ij}} r_m(x)\, dx \right| \right) \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-\nu_m} < 2^{-\nu_{n+1}+2}.\end{aligned}$$

Mais comme l'intégrale ($E.$ $R.$) indéfinie $F(x)$ s'écrit

$$F(x)=\int^x f_{n+1}(x)\, dx+\int_a^x h_{n+1}(x)\, dx+\sum_{m=n+1}^{\infty} \int_a^x r_m(x)\, dx,$$

où $h_{n+1}(x)=\sum_{m=n+1}^{\infty} p_m(x)$, on a pour tout $n \geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(a_{n+1,i})-F(a_{ni})|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} |f_{n+1}(x)|\, dx + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} |h_{n+1}(x)|\, dx + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \left| \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_m(x)\, dx \right|$$
$$< \phi(n) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} p^*(x)\, dx + 2^{-\nu_{n+1}+2}.$$

Or, $F(x)$ étant continue, on a pour tout i

$$F(x_i)-F(a_{n_0 i}) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (F(a_{n+1,i})-F(a_{ni})).$$

Donc, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |F(x_i)-F(a_{n_0 i})| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} |F(a_{n+1,i})-F(a_{ni})|$$
$$\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \phi(n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} p^*(x)\, dx + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-\nu_{n+1}+2}$$
$$< \frac{\varepsilon}{10} + \int_{G^*_{n_0}} p^*(x)\, dx + 2^{-\nu_{n_0+1}+4} < \frac{3}{10}\varepsilon.$$

B) On a maintenant mes $[F(x); x \in A^*] \leq \varepsilon$. En effet, si l'on pose

$$l_i = \max_x (|F(a_{n_0 i})-F(x)|;\ x \in A^* \text{ et } x \in (a_{n_0 i}, b_{n_0 i})),$$
$$J_i = [F(a_{n_0 i})-l_i,\ F(a_{n_0 i})+l_i] \quad (i=1, 2, \cdots),$$

on a d'abord d'après 4)

$$\left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \cup \left[F(a)-\frac{\varepsilon}{10}, F(a)+\frac{\varepsilon}{10}\right] \cup \left[F(b)-\frac{\varepsilon}{10}, F(b)+\frac{\varepsilon}{10}\right] \right\}$$
$$\supseteq [F(x); x \in A^*],$$

puisque $A^* \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_{n_0 i}, b_{n_0 i}) \cup [a, b_0) \cup (a_0, b]$. D'autre part, puisqu'il existe, pour $\eta > 0$ arbitraire, un point x_i de A^* appartenant à $(a_{n_0 i}, b_{n_0 i})$ et tel que $l_i - \frac{\eta}{2^i} < |F(a_{n_0 i})-F(x_i)|$, on a d'après *A*)

$$\sum_{i=1}^{\infty} l_i < \sum_{i=1}^{\infty} |F(a_{n_0 i})-F(x_i)| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^i} < \frac{3}{10}\varepsilon + \eta,$$

et on a par suite $\sum_{i=1}^{\infty} l_i \leq \frac{3}{10}\varepsilon$. Donc, il en résulte qu'on a mes $[F(x); x \in A^*] \leq 2\left(\sum_{i=1}^{\infty} l_i\right) + \frac{4}{10}\varepsilon \leq \varepsilon$.

Corollaire 2. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n = V(F_n, \nu_n; f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2]$ *et qui possède la propriété* P^*.[4] *En outre, supposons que pour la propriété* P^* *la fonction* $\phi(n)$ *de* n *jouisse de la propriété plus forte* $\sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) < \infty$. *Alors, pour*

4) Voir K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I, Proc. Japan Acad., **32**, 215-220 (1956).

l'intégrale (*E. R.*) *indéfinie* $F(x)$ *de* $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, *on a*

$$\text{mes}\left[F(x);\, x\in[a,b]-\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n^*\right]=0, \text{ où } F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty} F_m.$$

Ensuite, considérons la condition suivante plus forte $[3_2^*]$ au lieu de la condition $[3_2]$.

$[3_2^*]$ Pour tout système élémentaire d'intervalles I_i $(i=1,2,\cdots,i_0)$ tels que l'un au moins des extrémités de I_i appartient à F pour tout i, on a

$$\sum_{i=1}^{i_0}\left|\int_{I_i} r(x)\,dx\right|<2^{-\nu}.$$

Nous pouvons démontrer alors le

Lemme 2. *Soit* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n,\nu_n;f_n)$, *une suite fondamentale satisfaisant aux conditions* $[3_1]$ *et* $[3_2^*]$ *et tel qu'il existe une fonction* $\phi(n)$ *de* n $(n=0,1,2\cdots)$ *qui jouit des conditions suivantes*:

(1) $\phi(n)>0$ *pour* $n=0,1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\phi(n)<\infty$;

(3) *pour tout ensemble* E *contenu dans* $[a,b]-F_n$, *on a*

$$\int_E |f_n(x)|\,dx\leq\phi(n).$$

Posons $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. *Alors, pour l'intégrale* (*E. R.*) *indéfinie de* $f(x)$, $F(x)=(E.\ R.)\int_a^x f(x)\,dx$, *on a*

$$\text{mes}\left[F(x);\, x\in[a,b]-\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n^*\right]=0, \text{ où } F_n^*=\bigcap_{m=n}^{\infty} F_m.$$

Démonstration. Étant donné un $\varepsilon>0$ arbitraire, définisons, de même que Lemme 1, un entier positif n_0 et, pour tout $n\geq n_0$, des suites d'intervalles

$$I_{ni}=(a_{ni},b_{ni})\ (i=1,2,\cdots),$$
$$I_{n+1,ij}\ (i=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots).$$

Alors, on a, quel que soit $x_i\in I_{n_0 i}\cap A^*$ $(i=1,2,\cdots)$, $\sum_{i=1}^{\infty}|F(x_i)-F(a_{n_0 i})|<3\varepsilon/10$. En effet, puisqu'on a $\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_{ni},a_{n+1,i})\subseteq[a,b]-F_n$, on a d'abord, d'après (3), pour tout $n\geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}}|f_n(x)|\,dx\leq\phi(n).$$

D'ailleurs, puisque l'extrémité a_{ni} d'intervalle $[a_{ni},a_{n+1,i}]$ $(i=1,2,\cdots)$ appartient à F_n^* et qu'elle appartient donc à F_n, on a d'après $[3_2^*]$ pour tout $n\geq n_0$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_n(x)\,dx\right|\leq 2^{-\nu_n}.$$

On a de plus, de même que Lemme 1,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left|\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_n(x)\,dx\right| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{-\nu_m}.$$

Mais comme $F(x)$ s'écrit

$$F(x)=\int_a^x f_n(x)\,dx+\int_a^x h_n(x)\,dx+\sum_{m=n}^{\infty}\int_a^x r_m(x)\,dx,$$

où $h_m(x)=\sum_{m=n}^{\infty} p_m(x)$, on a pour tout $n\ge n_0$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}|F(a_{n+1,i})-F(a_{ni})|\\ &\le \sum_{j=1}^{\infty}\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}}|f_n(x)|\,dx+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}}|h_n(x)|\,dx+\\ &\qquad\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_n(x)\,dx\right|+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left|\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} r_m(x)\,dx\right|\\ &\le \phi(n)+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{a_{ni}}^{a_{n+1,i}} p^*(x)\,dx+2^{-\nu_n}+\sum_{m=n+1}^{\infty}2^{-\nu_m}.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty}|F(x_i)-F(a_{n_0 i})|\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}|F(a_{n+1,i})-F(a_{ni})|<3\varepsilon/10,$$

d'où, de même que Lemme 1, on peut conclure qu'on a mes $[F(x); x\in A^*]<\varepsilon$.

Nous pouvons déduire, de plus, le Théorème suivant de même que S. Saks: Theory of the Integral (1937), (6.2) Theorem, Chap. VII, § 6, par exemple.

Théorème 9. *Soient* $u=\{u_n\}$, $u_n=V(F_n^1, \nu_n^1; f_n)$ *et* $v=\{v_n\}$, $v_n=V(F_m^2, \nu_m^2; g_m)$ *deux suites fondamentales qui jouissent d'un des hypothèses des Lemme* 1, *Théorème* 1 *et Lemme* 2, *et telles que l'on ait presque partout*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{m\to\infty} g_m(x),$$

alors, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\lim_{m\to\infty}\int_a^b g_m(x)\,dx.$$