121. Sur les Dérivations dans les Espaces Vectoriels Topologiques sur le Corps des Nombres Complexes. II

Par Riichi IINO
Université de Waseda

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1959)

Dans la Note "Sur les dérivations dans les espaces vectoriels topologiques sur le corps des nombres complexes. I",[1] nous avons introduit les notions de la dérivée au sens de Fréchet et de la dérivée faible sur une classe des applications de l'espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes, localement convexe, séparé et complet dans l'espace du même type. Dans cette note, nous allons donner la définition de la dérivée d'ordre supérieur et le développement de Taylor.

1. Polynôme et dérivée de Fréchet d'ordre supérieur. Désignerons par E et F deux espaces vectoriels topologiques sur le corps C des nombres complexes, localement convexes, séparés et complets. Soit $(x_1,\cdots,x_n)\to a_n(x_1,\cdots,x_n)$ une application multilinéaire continue et symétrique[2] de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, où $E_i=E$ pour tout i, (se note E^n) dans F. En prenant $x_i=x$ $(1\leq i\leq n)$ et posant $a_nx^n=a_n(x,\cdots,x)$, $x\to a_nx^n$ est une application continue de E dans F; a_nx^n s'appelle monôme de degré n. Compte tenu de l'exemple 1.1 et du théorème 3.1 (I), on peut voir facilement que le monôme a_nx^n est dérivable au sens de Fréchet partout dans E et faiblement dérivable partout dans E au long de h pour tout $h\in E$.

Soient a_0 un point fixé de F et $a_1x, a_2x^2,\cdots, a_nx^n$, monômes des degrés $1,2,\cdots,n$, respectivement. On dit que une fonction $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ définie sur E à valeurs dans F est un polynôme de degré n. Il est clair que l'application $x\to P(x)$ est une application continue de E dans F, dérivable au sens de Fréchet partout dans E et faiblement dérivable partout dans E au long de h pour tout $h\in E$.

Soient V un voisinage ouvert de 0 dans E, x_0 un point de E, $U=x_0+V$, et f une application de U dans F.

Définition 1.1. On dit que f est $n(\geq 1)$ fois dérivable au sens de Fréchet au point x_0, si une formule suivante a lieu:

(1) $f(x_0+h)-f(x_0)=P_n(h)+\alpha_n(x_0;h)$, pour tout h dans $V-\{0\}$,

où $P_n(h)=a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n$ un polynôme de degré n sans terme

1) Proc. Japan Acad., **35**, no. 7, 343-348 (1959). Nous noterons par (I) cette Note.

2) On appelle symétrique une application T de E^n dans F, telle que l'on ait $T(x_1,\cdots,x_n)=T(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})$ pour toute permutation σ de l'ensemble $(1,2,\cdots,n)$.

constante et $\alpha_n(x_0; h)=o(h^n)$ (n° 1 (I)); l'opérateur $h \to n!a_n h^n$ s'appelle dérivée n-ème de Fréchet de f au point x_0, et se note $d^n f(x_0)$; $n!a_n h^n$ s'appelle dérivée n-ème de Fréchet de f au point x_0 par rapport l'incrément h et se note $d^n f(x_0; h)$ ou $d^n f(x_0)[h^n]$.

Remarque 1.1. Si une application f admet une dérivée n-ème au point x_0, elle admet nécessairement les dérivées k-ème en x_0 $(1 \leq k < n)$, parce que $a_{k+1}h^{k+1}=o(h^k)$ a lieu.[3] On a évidement $d^k f(x_0)[h^k]=k!a_k h^k$ $(1 \leq k < n)$.

Remarque 1.2. Dans la même condition qu'à la remarque au-dessus, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0)+df(x_0)[h]+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0)[h^2]+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{n!}d^n f(x_0)[h^n]+\alpha_n(x_0; h), \end{aligned} \tag{2}$$

où $\alpha_n(x_0; h)=o(h^n)$; cette formule est dite formule de Taylor d'ordre n, relative au point x_0, et le second membre de (2) est appelé le développement de Taylor d'ordre n de l'application f au point x_0. Le dernier terme $\alpha_n(x_0; h)$ est appelé le reste de la formule de Taylor d'ordre n.

Si f est n fois dérivable partout dans U, la fonction $x \to d^n f(x)$ définie sur U soit une application de U dans l'espace $\mathcal{L}^s(E^n, F)$ des applications multilinéaires continues et symétriques de E^n dans F, qui l'appelée fonction dérivée n-ème de f et se note $f^{(n)}$.

D'après la définition 1.1, on a immédiatement le

Théorème 1.1. *L'ensemble des applications définies dans U, prenant leurs valeurs dans F, et n fois dérivables au sens de Fréchet partout dans U, est un espace vectoriel sur C, et $f \to f^{(n)}$ est une application linéaire de cet espace dans l'espace des applications de U dans $\mathcal{L}^s(E^n, F)$.*

Considérons, maintenant, F une algèbre topologique, localement convexe, séparé et complet. On a tout de suite le

Théorème 1.2 (Formule de Leibniz). *Si f et g sont n fois dérivables au sens de Fréchet au point x_0, fg admet en x_0 une dérivée n-ème donnée par la formule*

$$\begin{aligned} d^n(fg)(x_0)[h^n] &= d^n f(x_0)[h^n]g(x_0)+\binom{n}{1}d^{n-1}f(x_0)[h^{n-1}]dg(x_0)[h] \\ &\quad +\cdots+\binom{n}{k}d^{n-k}f(x_0)[h^{n-k}]d^k g(x_0)[h^k]+\cdots+f(x_0)d^n g(x_0)[h^n]. \end{aligned} \tag{3}$$

Remarque 1.3. Quoique $d^{n-k}f(x_0)[h^{n-k}]d^k g(x_0)[h^k]$ $(1 \leq k < n)$ ne soient pas symétriques, on peut les supposer symétriques par la procédure de la symétrisation.[4]

2. Dérivée faible d'ordre supérieur. Soient x_0 et h deux éléments

3) Voir Ex. 1.1 (I).

4) L. A. Lusternik und W. I. Soboleff: Elemente der Funktionalanalysis, Kap. VI, Berlin (1955).

de E, et $\varphi(t)=f(x_0+th)$ une fonction définie dans un domaine D contenant l'origine dans le plan complexe et régulière dans D. Donc, $\varphi(t)$ est indéfiniment dérivable dans D (remarque 3.2 (I)) et admet le développement de Taylor à l'origine

$$(1)\qquad \varphi(t)=\varphi(0)+t\varphi'(0)+\cdots+\frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\cdots\ .$$

Posons $\varphi^{(n)}(0)=D^nf(x_0;h)=D^nf(x_0)[h^n]$ et s'appelerons dérivée faible n-ème de f au point x_0 au long de h; on peut donc écrire

$$(2)\qquad f(x_0+th)=f(x_0)+tDf(x_0)[h]+\cdots+\frac{t^n}{n!}D^nf(x_0)[h^n]+\cdots$$

et on a

$$(3)\qquad D^nf(x_0)[h^n]=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(x_0+\xi h)}{\xi^{n+1}}d\xi,\quad n=1,2,\cdots,$$

où $0<r<\text{dis}\,(0,\partial D)$.[5]

D'après la formule (3), on a immédiatement la formule suivante:

(4) $D^nf(x_0)[(Ah)^n]=A^nD^nf(x_0)[h^n]$, pour tout nombre complexe A.

Soient V un voisinage ouvert disqué de 0 dans E, x_0 un point fixé de E, $U=x_0+V$, et f une application de U dans F, faiblement dérivable dans U au long de h pour tout h de E. Dans ces conditions, une fonction $\varphi(t)=f(x_0+th)$ est régulière sur un domaine D circulaire de centre 0 dans C et admet le développement de Taylor (1). Donc, dérivent terme à terme le développement (1), on obtient le développement de φ': $\varphi'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\varphi^{(n+1)}(0)/n!$ et $\varphi^{(n+1)}(0)=(n!/2\pi i)\int_{|\xi|=r}\varphi'(\xi)/\xi^{n+1}d\xi$, qui ne sont autre que

$$(5)\qquad Df(x_0+th)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}D^{n+1}f(x_0)[h^{n+1}]$$

et

$$(6)\qquad D^{n+1}f(x_0)[h^{n+1}]=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{Df(x_0+\xi h)[h]}{\xi^{n+1}}d\xi,\quad n=0,1,2,\cdots\ .$$

Soient maintenant h et k deux éléments de E, et s, t nombres complexes. En posant $\varphi(s,t)=f(x_0+sh+tk)$, $\varphi(s,t)$ est une fonction des deux variables complexes régulière dans un domaine cylindrique borné $D=\{(s,t);\,|s|<R_1,\,|t|<R_2\}\subset C^2$ (l'espace numérique de dimension complexe 2), à valeurs dans F, puisque V est disqué. Grâce à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, on a le développement de Taylor de φ, tel que

$$(7)\qquad \begin{gathered}\varphi(s,t)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{s^mt^n}{m!\,n!}\frac{\partial^{m+n}\varphi(0,0)}{\partial s^m\partial t^n}\quad\text{et}\\ \frac{\partial^{m+n}\varphi(0,0)}{\partial s^m\partial t^n}=\frac{m!\,n!}{(2\pi i)^2}\int_{|\xi|=r_2}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\int_{|\xi|=r_1}\frac{\varphi(\xi,\zeta)}{\xi^{m+1}}d\xi,^{6)}\end{gathered}$$

où $0<r_1<R_2$ et $0<r_2<R_2$.

On introduit l'opérateur symétrique $D^2f(x_0)$ de E^2 dans F, défini par:

5) Par le symbole ∂D, on désigne le frontière de D.

6) Il est clair que l'interversion des intégrations est admissible.

$$(8) \qquad D^2f(x_0)[h, k] = \frac{\partial^2\varphi(0, 0)}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2\varphi(0, 0)}{\partial t \partial s} = D^2f(x_0)[k, h].$$

Il résulte de (7) et (8), que les relations

$$(9) \qquad D^2f(x_0)[Ah, k] = D^2f(x_0)[h, Ak] = AD^2f(x_0)[h, k]$$

sont vraies pour tout nombre complexe A.

On peut démontrer que pour tout $h \in E$ une formule suivante a lieu:

$$(10) \qquad D^2f(x_0)[h^2] = D^2f(x_0)[h, h].$$

En effet, en vertu des formules (6) et (7), on a

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta|=r_2} \frac{d\zeta}{\zeta^2}\int_{|\xi|=r_1} \frac{f(x_0+\xi h+\zeta h)}{\xi^2}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_2} \frac{Df(x_0+\zeta h)[h]}{\zeta^2}d\zeta.$$

Soient h_1, h_2 et k trois éléments de E. On a immédiatement

$$(11) \qquad \begin{cases} D^2f(x_0)[h_1+h_2, k] = D^2f(x_0)[h_1, k] + D^2f(x_0)[h_2, k], \\ D^2f(x_0)[k, h_1+h_2] = D^2f(x_0)[k, h_1] + D^2f(x_0)[k, h_2]. \end{cases}$$

En effet, on voit que

$$\begin{aligned} D^2f(x_0)[h_1+h_2, k] &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\zeta|=r_2} \frac{d\zeta}{\zeta^2}\int_{|\xi|=r_1} \frac{f(x_0+\xi(h_1+h_2)+\zeta k)}{\xi^2}d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_2} \frac{Df(x_0+\zeta k)[h_1+h_2]}{\zeta^2}d\zeta. \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 3.1 (I), on a

$$Df(x_0+\zeta k)[h_1+h_2] = Df(x_0+\zeta k)[h_1] + Df(x_0+\zeta k)[h_2],$$

d'où les résultats, à cause des (6) et (8).

Les formules (8) à (11) montrent que l'application $(h, k) \to D^2f(x_0)[h, k]$, définie par (8), est une application bilinéaire symétrique de E^2 dans F et $D^2f(x_0)[h^2]$ (dérivée faible seconde de f au point x_0 au long de h) est égale à $D^2f(x_0)[h, h]$.

Enfin, soient $n>0$ un nombre entier, $h_1, \cdots, h_n$ n éléments de E et $t_1, \cdots, t_n$ n variables complexes. Donc, dans la condition précédente, $\varphi(t_1, \cdots, t_n) = f(x_0+t_1h_1+\cdots+t_nh_n)$ est une fonction des n variables complexes régulière dans un certain domaine polycylindrique borné $D=\{(t_1, \cdots, t_n); |t_1|<R_1, \cdots, |t_n|<R_n\} \subset C^n$ (l'espace de n variables complexes), à valeurs dans F. En posant

$$(12) \qquad \begin{aligned} D^nf(x_0)[h_1, \cdots, h_n] &= \frac{\partial^n\varphi(0, \cdots, 0)}{\partial t_1 \cdots \partial t_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|\xi_n|=r_n} d\xi_n \int \cdots \int_{|\xi_1|=r_1} \frac{\varphi(\xi_1, \cdots, \xi_n)}{\xi_1^2 \cdots \xi_n^2}d\xi_1, \end{aligned}$$

où $0<r_1<R_1, \cdots, 0<r_n<R_n$, l'application $(h_1, \cdots, h_n) \to D^nf(x_0)[h_1, \cdots, h_n]$ est une application de E^n dans F. De même façon qu'au cas $n=2$ et par récurrence sur n, on peut démontrer le

Théorème 2.1. *Soient Ω un ensemble ouvert dans E, f une application continue définie dans Ω à valeurs dans F, failblement dérivable dans Ω au long de h pour tout $h \in E$. En outre, soient $n>0$ un nombre entier et $h_1, \cdots, h_n$ n éléments arbitraires dans E. Dans ces conditions, l'application $(h_1, \cdots, h_n) \to D^nf(x)[h_1, \cdots, h_n]$ définie par* (12) *est une application multilinéaire symétrique de E^n dans F, et* *pour tout* $x \in \Omega$

(13) $D^n f(x)[h, \cdots, h] = D^n f(x)[h^n]$, *pour tout* $h \in E$.

En effet, pour tout $x \in \Omega$, on peut prendre un voisinage ouvert disqué V de 0 dans E, tel que $x + V \subset \Omega$.

3. Continuité de la dérivée faible. Soient U un voisinage ouvert de 0 dans E, f une application continue définie dans U à valeurs dans F et faiblement dérivable partout dans U au long de h pour tout $h \in E$. Comme E est un espace vectoriel topologique sur le corps des nombres complexes C, l'application $(x, h, t) \to x + th$ est une application continue de $E^2 \times C$ sur E. Donc, il existe un nombre $K > 0$ et les voisinages U', V de 0 dans E, tels que les relations $x \in U'$, $h \in V$ et $|t| < K$ entraînent $x + th \in U$. Par conséquent, l'application $(x, h, t) \to f(x + th) \in F$ est une application continue de $U' \times V \times \{t; |t| < K\}$ dans F. Alors, pour tout nombre $\beta > 0$ et toute semi-norme $q \in \Gamma_F$ (n° 1 (I)), il existe trois nombres $\alpha_i > 0$ $(1 \leq i \leq 3)$ et deux semi-normes p_1, $p_2 \in \Gamma_E$ (filtrant), tels que les relations $p_1(x-y) < \alpha_1$, $y \in U'$, $p_2(h-k) < \alpha_2$, $k \in V$ et $|t| < \alpha_3 < K$ entraînent

(1) $$q(f(x+th) - f(y+tk)) < \beta,$$

où x et h points fixés de U' et V, respectivement. En outre, pour un nombre r, tel que $0 < r < \alpha_3$, on a

(2) $$D^n f(x)[h^n] - D^n f(y)[k^n] = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\xi| = r} \frac{f(x + \xi h) - f(y + \xi k)}{\xi^{n+1}} d\xi,$$

où n un nombre entier positif arbitraire. D'après les relations (1) et (2) on a aussitôt

(3) $$\begin{aligned} &q(D^n f(x)[h^n] - D^n f(y)[k^n]) \\ &\qquad \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi| = r} \frac{q(f(x + \xi h) - f(y + \xi k))}{|\xi|^{n+1}} |d\xi|^{7)} \leq \beta \frac{n!}{r^n}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que l'application $(x, h) \to D^n f(x)[h^n]$ est continue en (x, h) et, par conséquent, continue dans $U' \times E$, (x, h) étant arbitraire dans $U' \times E$, puisque V est absorbant.

Théorème 3.1. *Soient Ω un ensemble ouvert dans E et f une application continue de Ω dans F, faiblement dérivable dans Ω au long de h pour tout $h \in E$. Dans ces conditions, pour tout nombre entier $n > 0$,* a) *l'application $(x, h) \to D^n f(x)[h^n]$ est une application continue de $\Omega \times E$ dans F,* b) *l'application $(x, h_1, \cdots, h_n) \to D^n f(x)[h_1, \cdots, h_n]$ est une application continue de $\Omega \times E^n$ dans F.*

Démonstration. a) Pour tout $x \in \Omega$, on peut prendre un voisinage ouvert U de 0 dans E, tel qu'on ait $x + U \subset \Omega$. Donc, la discussion précédente est applicable. b) Bornons-nous à démontrer le cas où Ω est un voisinage ouvert de 0. Donc, il existe n nombres $K_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ et deux voisinages ouverts U et V (disqué) de 0 dans E, tels que les relations $x \in U$, $h_1, \cdots, h_n \in V$, $|t_1| < K_1, \cdots, |t_n| < K_n$ entraînent $x + t_1 h_1 + \cdots + t_n h_n \in \Omega$. Alors, pour tout nombre $\beta > 0$ et toute semi-norme $q \in \Gamma_F$, il existe $n+1$ nombres $\alpha_i > 0$ $(0 \leq i \leq n)$ et $n+1$ semi-normes $p_i \in \Gamma_E$ $(0 \leq i \leq n)$, tels que les relations $p_0(x-y) < \alpha_0$, $y \in U$, $p_i(h_i - k_i) < \alpha_i$,

7) N. Bourbaki: Intégration, Chap. III, Paris, Hermann (1952).

$k_i \in V$ $(1 \leq i \leq n)$ entraînent

$$q(f(x+t_1h_1+\cdots+t_nh_n)-f(y+t_1k_1+\cdots+t_nk_n))<\beta,$$

où x et h_i $(1 \leq i \leq n)$ points fixés de U et V, respectivement. La discussion reste est analogue à celle précédente, en utilisant la formule (12) du n° 2.

En vertu des théorèmes 2.1 et 3.1, on peut généraliser et améloirer le théorème 3.3 (I) dans le sens suivant:

Théorème 3.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques, localement convexes, séparés et complets sur le corps des nombres complexes C, Ω un ensemble ouvert dans E, et soit f une application continue de Ω dans F. En outre, soit f faiblement dérivable partout dans Ω au long de h pour tout $h \in E$. Dans ces conditions, pour tout nombre entier $n>0$, l'application f admet dérivée n-ème au sens de Fréchet partout dans Ω et l'égalité*

$$d^nf(x)[h^n]=D^nf(x)[h^n], \quad \textit{pour tout } (x, h) \in \Omega \times E,$$

a lieu.

Démonstration. Soient x un élément quelconque de Ω et V un voisinage disqué de 0 dans E, tel que $x+V \subset \Omega$. Donc, la fonction $f(x+th)$ est une fonction régulière dans un domaine, D contenant l'ensemble $\{t; |t| \leq 1\}$ à valeurs dans F, pour tout point fixé quelconque $h \in V-\{0\}$, et admet le développement (2) du n° 2, qui converge uniformément sur $\{t; |t| \leq 1\}$. Par conséquent, pour toute semi-norme $q \in \Gamma_F$ et tout nombre $\varepsilon>0$, il existe un nombre $N>0$, tel qu'on ait

$$(4) \qquad q\Big(\sum_{l=m}^{\infty} \frac{t^l}{l!} D^lf(x)[h^l]\Big)<\varepsilon, \quad \text{pour tout } m \geq N.$$

D'autre part, étant $h \to \sum_{l=m}^{\infty} t^lD^lf(x)[h^l]/l!$ continue et $\sum_{l=m}^{\infty} t^lD^lf(x)[0^l]/l! =0$, en vertu du théorème 3.1, il existe un voisinage V' de 0 dans E, tel que, pour tout $h \in V'$, l'inégalité (4) a lieu. Soit $n>0$ un nombre entier. En posant $t=1$ dans l'égalité (2) du n° 2, on a

$$f(x+h)=f(x)+Df(x)[h]+\cdots+\frac{D^nf(x)[h^n]}{n!}+\cdots .$$

D'après les théorèmes 2.1 et 3.1,

$$f(x)+Df(x)[h]+\cdots+\frac{D^nf(x)[h^n]}{n!}$$

est un polynôme de degré n et $D^lf(x)[h^l]$ $(n+1 \leq l \leq m-1)$ sont $o(h^n)$. Donc, pour toute semi-norme $q \in \Gamma_F$, il existe une semi-norme $p \in \Gamma_E$ (filtrant) et un nombre $A>0$, tels qu'on a

$$q\Big(f(x+h)-f(x)-\sum_{l=1}^{n} \frac{D^lf(x)[h^l]}{l!}\Big) \leq A\{p(h)\}^n+\varepsilon, \quad \text{pour tout } h \in V',$$

étant $\varepsilon>0$ arbitraire, ce qui achève la démonstration.

Remarque. D'après les théorèmes 3.1 (I) et 3.2, on peut supposer que, pour une fonction continue dans un ensemble ouvert dans E à valeurs dans F, les notions de la dérivée au sens de Fréchet et de la dérivée faible sont identique. D'autre part, la dérivabilité au sens de Fréchet et la dérivabilité faible, en un seule point de E, ne sont pas identique.