111. Sur une Frontière des Surfaces de Riemann

Par Kazumichi HAYASHI
Institut de Technologie de Tokio

(Comm. by K. KUNUGI, M.J.A., Oct. 12, 1961)

1. Soient S une surface de Riemann ouverte et $HB(S)$ l'ensemble de toutes les fonctions harmoniques uniformes bornées sur S, nous savons que $HB(S)$ est un espace vectoriel complètement réticulé par rapport à sa structure d'ordre naturel et qu'il est aussi un espace de Banach muni de la norme $\|f\|=\sup_{p\in S}|f(p)|$. Si $S\in O_G$, nous poserons, par convention, $HB(S)=\{0\}$.

Soit S^* l'espace compact des idéaux maximaux de $HB(S)$, en adoptant la fonction identiquement égale à 1 (à 0, si $S\in O_G$) comme élément unité, nous obtenons comme conséquence immédiate du théorème de représentation d'un espace vectoriel réticulé avec élément unité (cf. [8]):

Théorème 1. *Il existe un isomorphisme (en tant qu'espace vectoriel réticulé) φ de $HB(S)$ sur l'espace $C(S^*)$ de toutes les fonctions continues sur S^*.*

Définition. Nous appelons S^* la *frontière* de S.

Si $S\in O_G$, S^* est vide.

2. Soit G un domaine non compact sur S dont la frontière relative ∂G, qui peut être non compacte, est formée d'un ensemble au plus dénombrable d'arcs analytiques ne s'accumulant qu'à la frontière idéale de la surface. L'ensemble $H_0B(G)$ de toutes les fonctions harmoniques uniformes bornées sur G qui s'annulent continûment sur ∂G est un espace vectoriel complètement réticulé et aussi un espace de Banach. En adoptant $\omega_G(p)$ (=la mesure harmonique de la frontière idéale de S par rapport à G) comme élément unité, nous pouvons encore appliquer le théorème de représentation à $H_0B(G)$ et obtenons la frontière G^* de G.

D'autre part, nous savons qu'il existe un homomorphisme T_G de $HB(S)$ sur $H_0B(G)$ et un isomorphisme R_G de $H_0B(G)$ dans $HB(S)$ (cf. [1]).

Lemme 1. *Nous avons la décomposition de $HB(S)$ en somme directe:*

$$HB(S)=(I-R_GT_G)(HB(S))\dot{+}R_G(H_0B(G)).$$

(I: application identique de $HB(S)$ sur lui-même). C'est aussi une décomposition orthogonale et le premier terme du second membre est égal au noyau de T_G.

Donc il y a une correspondance biunivoque entre les idéaux maximaux de $H_0B(G)$ et ceux de $HB(S)$ qui contiennent le noyau de T_G. Par l'identification des idéaux qui se correspondent, nous pouvons considérer G^* comme un sous-ensemble de S^* ou plus précisément comme la portion de la frontière de S contigüe à G.

Proposition 1. *Si G_1 et G_2 sont deux domaines non compacts de S, nous avons:*

$$(G_1 \cdot G_2)^* = G_1^* \cdot G_2^*.$$

En particulier si $G_1 \cdot G_2 = \phi$, nous avons $G_1^* \cdot G_2^* = \phi$.

Nous remarquons ici que, si G est un domaine parabolique, $G^* = \phi$.

3. Maintenant nous allons définir une topologie sur l'ensemble $S+S^*$ telle que S^* mérite d'être appelée la frontière de S.

Nous prenons comme système fondamental de viosinages d'un point p de $S+S^*$,

i) *si $p \in S$, un système fondamental de voisinages de p dans S,*

ii) *si $p \in S^*$, $\{G+G^*\}$ où G parcourt tous les domaines non compacts de S tels que $p \in G^*$.*

Théorème 2. *$S+S^*$ est un espace topologique séparé connexe. S est dense dans $S+S^*$ et S^* est compact.*

Lemme 2. *Soit p_N un point de S^* déterminé par l'idéal maximal N, si $f \in N$*

$$\lim_{p \to p_N} f(p) = 0, \qquad (p \in S).$$

Théorème 3. *Toute fonction f de $HB(S)$ possède un prolongement continu $\tilde{f}$ sur $S+S^*$ et*

$$\tilde{f}(p) = (\varphi f)(p), \qquad (p \in S^*).$$

En d'autres termes, le problème de Dirichlet classique sur $S+S^*$ est toujours résolutif.

4. Soit p un point fixe de S, la forme linéaire positive $\mu_p(f^*) = (\varphi^{-1} f^*)(p)$ $(f^* \in C(S^*))$ définit une mesure de Radon positive μ_p sur S^* de masse totale égale à 1 (cf. [2]). Puisque le fait qu'un ensemble soit de μ_p-mesure nulle ou qu'une fonction soit μ_p-intégrable ne dépend pas du choix du point p, nous dénoterons par $L_\mu(S^*)$ l'espace vectoriel réticulé de toutes les fonctions continues sur S à valeur dans $\overline{\mathbf{R}}$ (=la droite numérique complétée par $+\infty$ et $-\infty$) et μ_p-intégrables. D'autre part, il n'est pas difficile à voir que S^* est un espace hyperstonien de genre dénombrable au sens de [4].

Théorème 4. *Il existe un isomorphisme entre l'espace de toutes les fonctions harmoniques quasi-bornées* (cf. [7]) *sur S et $L_\mu(S^*)$. Cette correspondance nous donne aussi la valeur limite des fonctions harmoniques quasi-bornées à chaque point de S^*.*

5. Propriétés de la frontiere S^*.

Proposition 2. (*Le principe du maximum.*) *Soient $f \in HB(S)$ et $M = \sup_{p \in} f(p)$* (resp. $m = \inf_{p \in S} f(p)$), *alors il existe un point p_1*

(resp. p_2) *de* S^* *tel que* $f(p_1)=M$ (resp. $f(p_2)=m$).

Proposition 3. *Il existe une correspondance biunivoque entre les mesures harmonique généralisées* (cf. [5]) *sur* S *et les ensembles à la fois ouverts et fermés de* S^*. *En particulier, il existe une correspondance biunivoque entre les fonctions harmoniques minimales (non mutuellement proportionnelles) de* $HB(S)$ *et les points isolés de* S^*.

Corollaire. *Pour que* $S \in O_{HB_n} - O_{HB_{n-1}}$ (cf. [3]), *il faut et il suffit que* S^* *consiste en* n *points isolés.*

Nous dénoterons $HD(S)$ l'espace de toutes les fonctions harmoniques uniformes à intégrale de Dirichlet finie sur S.

Corollaire. *S'il existe une fonction HD-minimale* (cf. [3]) *sur* S, *alors il existe un ensemble ouvert et fermé de* S^* *tel que sur lequel toute fonction de* $HD(S)$ *possède la valeur limite constante.*

Parallèlement au Théorème 3, nous voyons l'existence du prolongement continu $\tilde{f}$ sur $G+G^*$ (muni de la topologie induite par celle de $S+S^*$) de toute fonction f de $H_0B(G)$ et nous avons:

Proposition 4. $\tilde{f}(p)=(\widetilde{T_G f})(p), \qquad (f \in HB(S),\ p \in G^*)$.

6. Propriété de Fatou.

Lemme 3. *Soit* f *une fonction harmonique singulière* (cf. [7]) *sur* S, *alors nous avons*

$$\lim_{p \to p^*} f(p)=0 \qquad (p \in S)$$

pour tout point p^* *de* S^*.

Donc, en tenant compte du Théorème 4, nous obtenons:

Proposition 5. *Toute fonction harmonique uniforme positive sur* S *possède la valeur limite à tout point de* S^*.

Nous pouvons montrer de plus:

Proposition 6. *Soit* V *une fonction surharmonique, continue à valeur dans* $\overline{\mathbf{R}}$ *et positive sur* S *telle que ses courbes de niveau soient suffisament régulières. Alors,*

$$\lim_{p \to p^*} V(p) \qquad (p \in S)$$

existe à tout point p^* *de* S^* *et le principe du minimum est valable.*

Si nous dénotons cette valeur limite par $V^*(p^*)$, $\varphi^{-1}V^*$ *est égale à la partie quasi-bornée de la plus grande minorante harmonique de* V.

7. Soit $F(p)$ une fonction méromorphe sur S appartenant à la classe (AM_0) de [7] (ou *lindelöfienne* d'après la terminologie de [6]), nous savons (cf. [6], [7]) que $\log|F|$ est la différence de deux fonctions surharmoniques positives. Donc, en notant le fait que toute fonction harmonique bornée sur un domaine non-compact G et continue sur $G+\partial G$ possède la valeur limite à tout point de G^*, nous obtenons:

Proposition 7. *Soit* $F(p) \in (AM_0)$, *alors*

$$\lim_{p\to p^*} F(p) \qquad (p\in S)$$

existe à tout point p^* de S^*.

Et le théorème de MM. F. et M. Riesz généralisé s'énonce sous la forme:

Théorème 5. *Soit $F\in(AM_0)$, s'il existe un sous-ensemble A de S^* de μ_p-mesure non-nulle tel que $\lim_{p\to p^*} F(p)$ soit égale à une constante (finie ou infinie) pour tout $p^*\in A$, alors F est constante.*

Corollaire. *Si S admet une fonction HB-minimale* (resp. *HD-minimale*), *alors $S\in O_L$* (cf. [6]) (resp. $S\in O_{AD}$).

Ajouté en épreuve: Après avoir achevé la rédaction du manuscrit, l'auteur a reçu le travail suivant, qui traite un sujet très voisin: S. Mori: On a compactification of an open Riemann surface and its application, J. Math. Kyoto Univ., 1, 21–42 (1961).

Références

[1] Ahlfors, L. V., et Sario, L.,: Riemann Surfaces, Princeton (1960).

[2] Bourbaki, N.,: Intégration, Chap. I–IV, Hermann, Paris (1952).

[3] Constantinescu, C., et Cornea, A.,: Über den idealen Rand und einige seiner Anwendungen bei der Klassifikation der Riemannschen Flächen, Nagoya Math. J., **13**, 169–233 (1958).

[4] Dixmier, J.,: Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Sum. Bras. Math., **2**, 151–182 (1951).

[5] Heins, M.,: On the Lindelöf principle, Ann. Math., **61**, 440–473 (1955).

[6] ——: Lindelöfian maps, Ann. Math., **62**, 418–446 (1955).

[7] Parreau, M.,: Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Ann. Inst. Fourier, **3**, 103–197 (1951).

[8] Yoshida, K.,: On vector lattice with a unit, Proc. Japan Acad., **17**, 121–124 (1941).