169. *Sur la régularité des points frontières relative à l'équation linéaire du type elliptique et du second ordre dans le problème de Dirichlet. I*

Par Seturo SIMODA

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Nov. 12, 1965)

A propos de l'équation linéaire du type elliptique

(1) $$\mathfrak{L}u=\Sigma_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{ij}^{2}u+\Sigma_{k=1}^{n}b_{k}(x)\partial_{k}u+c(x)u=f(x),$$

on peut considérer plusieurs sortes de la régularité d'*un* point quelconque frontière d'un domaine borné d—la régularité pour d—à fermeture contenue dans le domaine $\mathfrak{G}(\subseteq R^n)$, où les coefficients a_{ij}, b_k, c, et f de (1) sont prescrits et continus au sens de Hölder.

§1. Régularité simple. DÉFINITION 1.1. (*Régularité simple*). On dit qu'*un* point $\Xi\in\partial d$ est *régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d, lorsque et seulement lorsqu'il existe une hypersphère ouverte $\Sigma=\Sigma(\Xi)$ centrée sur Ξ et une fonction $\Psi\in C^2(d\cap\Sigma)$ remplissant les conditions suivantes:

《1》 $\Psi(x)>0$ dans $d\cap\Sigma$ entier,

《2》 $\lim\limits_{\substack{x\to\Xi\\(x\in d\cap\Sigma)}}\Psi(x)=0$ et

《3》 $\mathfrak{L}\Psi\leqq-1$ partout dans $d\cap\Sigma$.

Concernant la régularité de cette façon, on établit un théorème comme ceci:

THÉORÈME 1. *Soit* Ξ un *point* fixe *de* ∂d. *Pour que* Ξ *soit régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d, *il faut et suffit que* Ξ *soit régulier* ($\mathfrak{P}u=0$) *pour* d, *où* $\mathfrak{P}$ *est donné comme l'opérateur différentiel de l'équation*

(2) $$\mathfrak{P}u=\Sigma_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{ij}^{2}u=f(x).$$ [1]

La régularité simple d'un point frontière $\Xi\in\partial d$ pour le domaine d *ne se rapporte pas rien* à *l'existence des solutions dans* d; c'est ce qui seulement sert à confirmer la convergence d'une solution $u(x)$ dans d lorsque $x\to\Xi$, si elle proprement existe, moyennant soit un théorème de comparaison ou le principe du maximum. Par exemple, tout point frontière d'une hypersphère ouverte Σ est régulier ($\Delta u=0$) pour Σ et donc aussi régulier ($\Delta u+ku=0$) pour Σ quel que soit $k>0$. Mais il n'y a rien de solution pour certaines $k>0$ *excepté des solutions trés spéciales*. En résumé la régularité simple du point $\Xi\in\partial d$ pour d n'est qu'une relation géometrique entre le point Ξ et le domaine d exprimée à l'aide de l'équation.

---

1) Cf. Théorème 1.1 (p. 34) dans
S. Simoda: Sur la régularité des points frontières relative à l'équation linéaire du type elliptique et du second ordre. Mem. Osaka, Gakugei Univ., B, No. 13, 33-53 (1964).

Si, en particulier, le coefficient $c(x)$ est *non-positif* sur $\bar{d}$, la condition ⟪1⟫ est remplaçable par

⟪1′⟫ $$\liminf_{\substack{x\to s \\ (x\in d\cap\Sigma)}} \Psi(x) \geqq 0 \quad \text{quel que soit } s\in\partial(d\cap\Sigma).$$

§2. Cas $c(x)$ non-positif. Régularité au sens de Wiener-Perron. Partout dans cette section on suppose constamment

(3) $$c(x)\leqq 0 \text{ dans } d \text{ entier.}$$

Dans ce cas la méthode de O. Perron est applicable à (1) pour la résolution du problème de Dirichlet. Un peu en détail, quand il est donnée une fonction χ, non nécessairement continue, bornée sur ∂d, il existe deux familles des fonctions $\in \boldsymbol{C}(d)$ comme il suit: La famille $\bar{\mathfrak{F}}(\chi, f)$, c'est la totalité des (1)-surfonctions w[2] qui remplissent

$[\bar{P}]$ $$\liminf_{\substack{x\to s \\ (x\in d)}} w(x)\geqq\chi(s) \quad \text{quel que soit } s\in\partial d,$$

et la famille $\underline{\mathfrak{F}}(\chi, f)$, c'est la totalité des (1)-sousfonctions v qui remplissent

$[\underline{P}]$ $$\limsup_{\substack{x\to s \\ (x\in d)}} v(x)\leqq\chi(s) \quad \text{quels que soit } s\in\partial d.$$

Les deux fonctions

(4) $$\begin{cases} \bar{u}(x)=\bar{u}[\chi, f](x)=\inf\,[w(x)\colon w\in\bar{\mathfrak{F}}(\chi, f)] \text{ et} \\ \underline{u}(x)=\underline{u}[\chi, f](x)=\sup\,[v(x)\colon v\in\underline{\mathfrak{F}}(\chi, f)] \end{cases}$$

sont, toutes deux, de la classe $\boldsymbol{C}^2(d)$ et des solutions de (1) dans d, donnant

$$\underline{u}(x)\leqq\bar{u}(x) \quad \text{dans } d \text{ entier.}$$ [3]

Mais, en général, elles ne coïncident pas.

DÉFINITION 2.1. (*Régularité au sens de Wiener-Perron*). On dit qu'*un* point $\Xi\in\partial d$ est *régulier* ($\mathfrak{L}u=f$) *pour* d *au sens de Wiener-Perron*—ou au sens $[P]$ abréviativement—, lorsque et seulement lorsque, pour n'importe quelle fonction frontière bornée χ, il subsiste en même temps deux inégalités

$[P]$ $$\chi_*(\Xi)\leqq\underline{u}_*[\chi, f](\Xi) \text{ et } \bar{u}^*[\chi, f](\Xi)\leqq\chi^*(\Xi).$$ [4]

DÉFINITION 2.2. Une fonction χ bornée sur ∂d est dite *résolutive pour* d *relativement à* (1), lorsque et seulement lorsque

---

2) La notion "surfonction" est la dilatation de la notion "surharmonique" dans le cas de l'équation de Laplace. Voir, si nécessaire, p. 21 dans

S. Simoda: Traité sur la Théorie des Equations Elliptiques et Semi-linéaires. II. Mem. Osaka Gakugei Univ., B, No. 10, 5-29 (1961).

3) Cf. Théorème 2.14 (p. 53) dans le mémoire cité à 1).

4) On définit

$$\chi_*(\Xi)=\liminf_{\substack{s\to\Xi \\ (s\in\partial d)}}\chi(s) \quad \text{et} \quad u_*(\Xi)=\liminf_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}}u(x).$$

Si l'on remplace *inf* par *sup* dans chaque cas, on obtient la définition de $\chi^*(\Xi)$ et $u^*(\Xi)$.

$$\bar{u}[\chi, f] = \underline{u}[\chi, f],$$

et cette fonction, qu'on dénote par $u[\chi, f]$ simplement, est dite *fonction* (ou solution) *de Wiener pour* d *de l'équation* (1) *correspondante à* χ.

LEMME 2.1. Si χ est résolutive pour d relativement à (1), on a alors

$$\begin{cases} \bar{u}[\chi+\chi_1, f+f_1] = u[\chi, f] + \bar{u}[\chi_1, f_1] \text{ et} \\ \underline{u}[\chi+\chi_1, f+f_1] = u[\chi, f] + \underline{u}[\chi_1, f_1] \end{cases}$$

quelles que soient $\chi_1, f,$ et f_1.[5]

THÉORÈME 2. (*Théorème du type Wiener*). *Toute* $\chi \in C(\partial d)$ *est résolutive pour* d *relativement à* (1).[6]

Il vaut le peine de remarquer que, si $\Xi \in \partial d$ est régulier ($\mathfrak{L}u = f$) pour d au sens $[P]$ et si χ est continue, il subsiste

$$\lim_{\substack{x \to \Xi \\ (x \in d)}} u[\chi, f](x) = \chi(\Xi).$$

LEMME 2.2. Soient Ξ un point de ∂d, $\mathfrak{V}$ un domaine contenant Ξ et $w \in C(d \cap \mathfrak{V})$ une (1)-surfonction *seulement dans* $d \cap \mathfrak{V}$.[7] Si u est une (1)-surfonction dans d *entier* et s'il subsiste l'inégalité

$$w_*(x) \geqq u(x) \text{ toutes les fois } x \in (\partial\mathfrak{V}) \cap d,$$

la fonction

$$u_{\mathfrak{V}}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in d - \mathfrak{V} \\ \min\,[u(x), w(x)] & \text{si } x \in d \cap \mathfrak{V} \end{cases}$$

est encore de la classe $C(d)$ et une (1)-surfonction dans d *entier*.[8]

LEMME 2.3. Toutes les fois χ est bornée sur ∂d et f hölderienne sur $\bar{d}$, il existe une $\hat{w} \in \bar{\mathfrak{F}}(\chi, f) \cap C^2(\bar{d})$ et une $\hat{v} \in \underline{\mathfrak{F}}(\chi, f) \cap C^2(\bar{d})$.[9]

THÉORÈME 3. *Si un point* $\Xi \in \partial d$ *est régulier* ($\mathfrak{L}u = 0$) *pour* d, Ξ *est en même temps régulier* ($\mathfrak{L}u = f$) *pour* d *au sens* $[P]$ *quelle que soit* f *hölderienne sur* $\bar{d}$.[10]

Preuve. Soit χ bornée sur ∂d et pour brévité nous utilisons les notations $\bar{u}(x)$ et $\underline{u}(x)$ données à (4). Notre but est l'établissement des inégalités

$$\chi_*(\Xi) - \varepsilon < \underline{u}_*(\Xi) \quad \text{et} \quad \bar{u}^*(\Xi) < \chi^*(\Xi) + \varepsilon \tag{5}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Prenons une $\hat{w} \in \bar{\mathfrak{F}}(\chi, f) \cap C^2(\bar{d})$ et une $\hat{v} \in \underline{\mathfrak{F}}(\chi, f) \cap C^2(\bar{d})$[11] et posons

$$\begin{cases} \mu_s = \max \text{ de } \hat{w}(x) \text{ sur } \bar{d}, & \mu_i = \min \text{ de } \hat{v}(x) \text{ sur } \bar{d}, \\ \chi_s = \sup \text{ de } \chi(s) \text{ sur } \partial d \text{ et} & \chi_i = \inf \text{ de } \chi(s) \text{ sur } \partial d; \end{cases}$$

5) Cf. Lemme 10.1 (p. 5) dans le mémoire au même titre (III) en 1962.

6) Si nécessaire, voir le même mémoire en 1965 en préparation.

7) Cf. Lemme 10.2 (p. 7) dans mon mémoire cité à 5).

8) Voir le même mémoire en 1965 en préparation.

9) Cf. Théorème 2.10 (p. 50) dans mon mémoire cité à 1).

10) La continuité Hölder de f ne sert qu'à l'existence de $\bar{u}[\chi, f]$ et de $\underline{u}[\chi, f]$ dans la classe $C^2(d)$.

11) Cf. Lemme 2.3.

(6) $$\mu_i \leqq \chi_i \leqq \chi_s \leqq \mu_s$$
évidemment.

Soient Σ l'hypersphère ouverte centrée sur Ξ et $\Psi \in C^2(d \cap \Sigma)$ la fonction satisfaisant aux conditions 《1》, 《2》, et 《3》 (cf. Définition 1.1). Prenons un nombre $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ remplissant les deux conditions comme ceci:

《i》 $\delta \leqq$ le rayon de Σ.

《ii》 $|s-\Xi| \leqq \delta$ et $s \in \partial d$ entraînent $\chi_*(\Xi)-\varepsilon/2<\chi(s)<\chi^*(\Xi)+\varepsilon/2$

Envisageons les deux fonctions

(7) $$\begin{cases} w(x;\Xi,\varepsilon)=M\Psi(x)+\dfrac{\mu_s-\chi_i}{\delta^2}\cdot|x-\Xi|^2+\chi^*(\Xi)+\varepsilon/2 \\ v(x:\Xi,\varepsilon)=-M\Psi(x)-\dfrac{\chi_s-\mu_i}{\delta^2}\cdot|x-\Xi|^2+\chi_*(\Xi)-\varepsilon/2 \end{cases}$$

avec

(8) $$M=2(\mu_s-\mu_i)\left(\frac{n}{\underline{\alpha}_0^2\delta^2}+\frac{B}{\delta}\right)+|c|\cdot|\chi|+|f|^{12)}$$

dans $d \cap \mathfrak{B}$, où $\mathfrak{B}$ est l'hypersphère ouverte centrée sur Ξ et de rayon $\delta>0$; w et v, toutes les deux, sont de la classe $C^2(\mathfrak{B} \cap d)$; w est une (1)-surfonction dans $\mathfrak{B} \cap d$, là v une (1)-sousfonction et elles satisfont à

(9) $$\begin{cases} \liminf\limits_{\substack{x\to y \\ (x\in\mathfrak{B}\cap d)}} w(x;\Xi,\varepsilon) \geqq \hat{w}(x) \quad \text{et} \\ \limsup\limits_{\substack{x\to y \\ (x\in\mathfrak{B}\cap d)}} v(x;\Xi,\varepsilon) \leqq \hat{v}(y) \end{cases}$$

quel que soit $y \in (\partial\mathfrak{B}) \cap d$. Donc, à l'aide de Lemme 2.2,
$$\hat{w}_{\mathfrak{B}}(x)=\begin{cases} \hat{w}(x) & \text{si } x \in d-\mathfrak{B} \\ \min[\hat{w}(x),\, w(x;\Xi,\varepsilon)] & \text{si } x \in d \cap \mathfrak{B} \end{cases}$$
est une (1)-surfonction et
$$\hat{v}_{\mathfrak{B}}(x)=\begin{cases} \hat{v}(x) & \text{si } x \in d-\mathfrak{B} \\ \max[\hat{v}(x),\, v(x;\Xi,\varepsilon)] & \text{si } x \in d \cap \mathfrak{B} \end{cases}$$
une (1)-sousfonction.

En outre, il est plutôt aisé de voir
$$\hat{w}_{\mathfrak{B}} \in \overline{\mathfrak{F}}(\chi, f) \text{ et } \hat{v}_{\mathfrak{B}} \in \underline{\mathfrak{F}}(\chi, f).$$
Ainsi étant, on a
$$\bar{u}^*(\Xi) \leqq \hat{w}^*_{\mathfrak{B}}(\Xi) \leqq w^*(\Xi;\Xi,\varepsilon)=\chi^*(\Xi)+\varepsilon/2<\chi^*(\Xi)+\varepsilon;$$

---

12) $|*|$ dénote la maximum de $|*(x)|$ pour $x \in \bar{d}$ de la fonction $*$ continue sur $\bar{d}$. On définit $\dfrac{1}{\underline{\alpha}(x)}$ = *racine carré* du maximum des valeurs $\Sigma_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\eta_i\eta_j$ pour tout vecteur unitaire réel $\eta=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ et
$$\underline{\alpha}_0=\min[\underline{\alpha}(x): x \in \bar{d}].$$
Au reste on définit
$$B=\max[\{\Sigma_{k=1}^n b_k(x)^2\}^{1/2}: x \in \bar{d}].$$

et de même la première inégalité de (5), c.q.f.d.

THÉORÈME 4. *Si un point* $\Xi \in \partial d$ *est régulier* ($\mathfrak{L}u=f$) *pour* d *au sens* $[P]$ (*où on considère* une seule f arbitraire et fixe), Ξ *est en même temps régulier* ($\mathfrak{L}u=0$) *pour* d; f *est supposée hölderienne sur* $\bar{d}$.[13]

Preuve. Si $\chi \in C(\partial d)$, on a toujours une relation

$$u[\chi, 0]=u[\chi, f]-u[0, f]$$

entre les trois solutions de Wiener pour d de l'équation

$$\mathfrak{L}u=0 \tag{10}$$

et de (1) correspondantes à χ et 0 (cf. Théorème 2) vu Lemme 2.1; et notre hypothèse entraîne

$$\lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} u[\chi, 0](x)=\lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} u[\chi, f](x)-\lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} u[0, f](x)=\chi(\Xi)$$

à l'aide de la remarque énoncée après Théorème 2.

La question a ainsi se réduit au cas $f=0$, c'est-à-dire il n'y a qu'à démontrer que, si Ξ est régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d au sens $[P]$, il est régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d.

Soit $\hat{w} \in \bar{\mathfrak{F}}(0, -1) \cap C^2(\bar{d})$.[14] Si l'on pose

$$\Psi(x)=\hat{w}(x)-u[\hat{w}, 0](x),$$

qui est de la classe $C^2(d)$, elle donne

$$\mathfrak{L}\Psi(x) \leqq -1 \quad \text{dans } d \text{ entier}$$

et

$$\lim_{\substack{x\to\Xi \\ (x\in d)}} \Psi(x)=\hat{w}(\Xi)-\hat{w}(\Xi)=0;$$

et, puisque $\hat{w}$ est de la classe $C^2(\bar{d})$ et une (10)-surfonction d'autant plus que $\hat{w} \in \bar{\mathfrak{F}}(0, -1)$ et puisque $\hat{w}$ satisfait à la condition $[\bar{P}]$ pour $\hat{w}(s)$, on a

$$u[\hat{w}, 0](x)=\bar{u}[\hat{w}, 0](x) \leqq \hat{w}(x) \quad \text{dans } d \text{ entier}$$

et donc, pour n'importe quel point $s \in \partial d$,

$$\liminf_{\substack{x\to s \\ (x\in d)}} \Psi(x)=\hat{w}(s)-\limsup_{\substack{x\to s \\ (x\in d)}} u[\hat{w}, 0](x) \geqq \hat{w}(s)-\hat{w}(s)=0,$$

ce qui entraîne $\Psi(x)>0$ dans d entier.

Après tout, Ψ satisfait aux trois conditions données à Définition 1.1 avec Σ (une hypersphère ouverte centrée sur Ξ *choisie tout à volonté*) ensemble, c.q.f.d.

COROLLAIRE 1. Soit f hölderienne sur $\bar{d}$ (*arbitraire et fixe*). Pour que $\Xi \in \partial d$ soit régulier ($\mathfrak{L}u=f$) pour d au sens $[P]$, il faut et suffit que Ξ est régulier ($\mathfrak{L}u=0$) pour d.

COROLLAIRE 2. Soient f et g toutes les deux hölderiennes sur $\bar{d}$. Si $\Xi \in \partial d$ est régulier ($\mathfrak{L}u=f$) pour d au sens $[P]$, Ξ est en même temps régulier ($\mathfrak{L}u=g$) pour d au sens $[P]$; et vice versa.

---

13) Cf. la note 10).

14) Cf. Lemme 2.3.

Remarque. Comme il est clair vu la narration au début de la preuve du théorème, s'il ne s'agit que du cas $f \equiv 0$, on n'a pas besoin de Théorème 2 et de Lemme 2.1; il y suffit de faire usage de $\bar{u}[\hat{w}, 0]$ au lieu de $u[\hat{w}, 0]$.