105. *Sur une représentation des distributions*

Par Shizu NAKANISHI

Université d'Osaka Préfecture

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., May 12, 1966)

Nous allons considérer dans cette Note *une représentation de l'espace des distributions sur un intervalle* $[-a, a]$. I. L. Bondi [1] a déjà montré que telle distribution T s'écrit sous une forme d'intégrale, utilisant l'intégrale (A). Nous allons ici montrer d'autre représentation que celle de Bondi, par l'intégrale. Précisément, désignons par $K(a)$ un espace des fonctions indéfiniment dérivables, périodiques de période $2a$, qui s'annules, avec leurs dérivées, pour $|x|=a$. Nous allons introduire une topologie dans l'espace $K(a)$ comme il suit: des ensembles $U_{n,\varepsilon}$ définis par l'inégalité $\|\varphi\|_n<\varepsilon$, où

$$\|\varphi\|_n=\max_{q\leq n}\ \max_{x}\ |\varphi^{(q)}(x)|,\ n=0, 1, 2, \cdots,$$

forment un système fondamental de voisinages de 0. Désignons par $K'(a)$ le dual de $K(a)$. Alors, on a le

Théorèm. *Si l'on choisit convenablement une fonction $K(x)$ définie dans $[-\infty, \infty]$ et indéfiniment dérivable sauf pour une infinité dénombrable, la totalité des fonctions $(f*K^{(p)})(x)$ définies de façon que*

$$(f*K^{(p)})(x)=\int_{-a}^{a}f(y)K^{(p)}(x-y)dy,$$

où p est un entier quelconque, positif ou nul, et $f(x)$ est une fonction continue quelconque, définie dans $[-a, a]$, donne une représentation de $K'(a)$ de la manière que: quel que soit $T\in K'(a)$,

1) *il existe une fonction $f*K^{(p)}$ telle qu'on ait*

$$(T, \varphi)=(-1)^p(E.\,R.)\int_{-\infty}^{\infty}(f*K^{(p)})(x)\,\varphi(x)dx$$

pour toute $\varphi\in K(a)$,

2) *la dérivée T' est définie par la dérivée au sens uselle de $(f*K^{(p)})(x)$, c.-à-d. on a*

$$(T', \varphi)=(-1)^p(E.\,R.)\int_{-\infty}^{\infty}((f*K^{(p)})(x))'\,\varphi(x)dx.$$

Nous avons utilisé *l'intégrale* $(E.\,R.)$ [2].

Commençons par donner *la définition de l'intégrale* $(E.\,R.)$.

Soient $[a, b]$ un intervalle finie ou infinie, et ν une mesure finie ou σ-finie dans $[a, b]$, jouissant des propriétés suivantes:

1*) Tout ensemble mesurable au sens de Lebesgue est aussi mesurable au sens de ν.

2*) $\text{mes}(A)=0$ si est seulement si $\nu(A)=0$.

Désignons par $K(\nu)$ la totalité des fonctions $f(x)$ pour lesquelles il existe une suite d'ensembles $\{A_n\}$ qui sera appelée *la suite d'exhaustion d'ensembles*, définie comme il suit: C'est une suite d'ensembles monotones croissantes telle que $\nu([a, b]-A_n)\to 0$, qui jouit de trois conditions suivantes:

(P_1) $f(x)$ est sommable sur tout A_n,

(P_2) pour tout ensemble E tel que $E\subseteq A_n$ et $\nu(E)\leq \nu([a, b]-A_n)$, on a

$$\int_E |f(x)|\,dx \leq \varepsilon_n,$$

où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite des nombres positifs monotones décroissants, convergeant vers 0,

(P^*) il existe un entier positif k, $k\geq 2$ (indépendant de n) qui satisfait, pour tout n, $n=0, 1, 2, \cdots$, à l'inégalité:

$$k \text{ mes}\{[a, b]-A_{n+1}\}\geq \text{mes}\{[a, b]-A_n\}.$$

Alors, pour toute fonction $f(x)$ appartenant à $K(\nu)$, les limites $\overline{\underline{\lim}}_{n\to\infty}\int_{A_n} f(x)dx$ sont déterminées seulement par $f(x)$. Nous désignons ces valeurs limites par $(E.\ R.\ \nu)\overline{\underline{\int}}_a^b f(x)dx$ ou simplement $(E.\ R.)\overline{\underline{\int}}_a^b f(x)dx$ respectivement. Si ces valeurs limites coïncident, la valeur commune sera dite *l'intégrale* (*E. R.*) *du type* ν *sur* $[a, b]$, et désignée par $(E.\ R.\ \nu)\int_a^b f(x)dx$ ou simplement $(E.\ R.)\int_a^b f(x)dx$. Lorsque la valeur de l'intégrale est finie, $f(x)$ sera dite *intégrable* $(E.\,R.\,\nu)$ ou simplement intégrable $(E.\ R.)$.

D'abord, on a sans peine le

Lemme 1. *Si* $\{A_n\}$ *est une suite d'exhaustion d'ensembles pour une fonction* $f(x)$ *appartenant à* $K(\nu)$, *et* $g(x)$ *est une fonction bornée, la fonction* $f(x)g(x)$ *appartient aussi à* $K(\nu)$ *et* $\{A_n)$ *est une suite d'exhaustion d'ensembles pour* $f(x)g(x)$.

Considérons maintenant une mesure $\nu(A)$ telle qu'il existe une fonction $\lambda(x)$ localement bornée, pour laquelle, on a, quel que soit l'ensemble A, pour tout x l'inégalité;

$$\nu(\{x+y;\ y\in A\})\leq\lambda(x)\nu(A).$$

Alors, on a le

Lemme 2. *Soient* E *un ensemble bornée et* $k(x)$ *une fonction appartenant à* $K(\nu)$. *Si* ν *est une mesure qui possède la propriété ci-dessus, et on peut choisir une suite d'exhaustion d'ensembles* $\{A_n\}$ *pour* $k(x)$ *de telle sorte que pour tout* n *l'ensemble* $\{x-y;\ x\in A_n,\ y\in E\}$ *soit contenu dans* A_{n+l} (l *est un nombre naturel indépendant de* n), *la fonction*

$$g(x)=\int_E f(y)k(x-y)dy$$

appartient à $K(\nu)$, *quelle que soit la fonction* $f(x)$ *bornée, et on* *peut prendre la même suite $\{A_n\}$ comme une suite d'exhaustion d'ensembles.*

Dorénavant, désignons par ν une mesure définie par

$$\nu(A)=\int_A e^{-|x|}dx.$$

Soit $\{k_j(x)\}$ une suite des fonctions définies dans l'intervalle $[-a, a]$. Pour cela, nous considérons trois conditions suivantes:

i) On a $\max_x |k_j(x)|=o(j)$,

ii) $k_j(x)$ satisfait aux conditions des noyaux de Fejér, *c.-à-d.*

(A) $\int_{-a}^{a} k_j(x)dx=1,$ $\quad(B)$ $k_j(x)\geq 0,$

(C) $\mu_j(\delta)=\max_{\delta\leq|x|\leq a} k_j(x)\to 0$ pour tout $0<\delta\leq a$.

iii) On a $k_j^{(p)}(-a)=k_j^{(p)}(a)$ pour tout $p=0, 1, 2, \cdots$.

Nous considérons en outre la suite des fonctions $\{K_n(x)\}$ et la fonction $K(x)$ définies, en posant que $k_j(x)=0$ pour $x\,\bar{\in}\,[-a, a]$, comme il suit:

$$(*)\quad \begin{aligned} &K_n(x)=k_1(x)+\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\left\{k_j(x-2(j-1)a)-\frac{1}{j-1}\sum_{i=1}^{j-1}k_i(x-2(j-1)a)\right\},\\ &K(x)=\lim_{n\to\infty}K_n(x). \end{aligned}$$

Alors, on a le

Lemme 3. *Si une suite des fonctions $\{k_j(x)\}$ définie dans l'intervalle $[-a, a]$ satisfait a la condition* i), *on obtient que*:

1) *On a $K(x)\in K(\nu)$ et $\lim_{x\to\infty}K(x)=0$.*

2) *Quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ bornée et périodique de période $2a$, on a*

$$K(x)\varphi(x)\in K(\nu),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x)\varphi(x)dx=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{a}k_j(x)\varphi(x)dx,$$

et $(E.\ R.)$ $$\overline{\int_{-\infty}^{\infty}}K(x)\varphi(x)dx=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{a}k_j(x)\varphi(x)dx.$$

De plus, si la suite $\{k_j(x)\}$ satisfait, outre qu'elle jouit de la propriété i), *à la condition* ii), *on obtient que*:

3) *quelle que soit la fonction $\varphi(x)$ continue et périodique de période $2a$, la fonction $K(x)\varphi(y+x)$ est intégrable $(E.\ R.\ \nu)$ quel que soit y, et la suite des fonctions $\int_{-\infty}^{\infty}K_n(x)\varphi(y+x)dx$ converge uniformément vers la fonction $(E.\ R.)$ $\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\varphi(y+x)dx$, et on a*

$$(E.\ R.)\int_{-\infty}^{\infty}K(x)\varphi(y+x)dx=\varphi(y).$$

Démonstration. Nous avons déjà montré 1) et 2) dans la Note précédente [3]. Dans le cas, on a pris $\{A_n=[-\infty<x\leq(2n-1)a]\}$ comme une suite d'exhaustion d'ensembles. Pour 3), puisque $\varphi(x)$

est continue, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe un $\delta>0$ tel qu'on ait $|\varphi(x)-\varphi(x')|<\varepsilon/2$ pour x, x' tels que $|x-x'|<\delta$. Pour ce $\delta>0$, considérons $\mu_j(\delta)$. Puisqu'on a $\lim_{j\to\infty}\mu_j(\delta)=0$, il existe un n_0 tel que $\sum_{j=1}^{n}\mu_j(\delta)/n<\varepsilon/8Ma$ pour tout $n>n_0$, où M est un nombre tel que $|\varphi(x)|<M$. Par conséquent, on a pour tout $n>n_0$ (indépendant de y)

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{a}k_j(x)\varphi(y+x)dx-\varphi(y)\right|\\ =&\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{a}k_j(x)\varphi(y+x)dx-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{a}k_j(x)\varphi(x)dx\right|\\ \le&\frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\int_{-a}^{-\delta}k_j(x)\{|\varphi(y+x)|+|\varphi(y)|\}dx\right.\\ &+\sum_{j=1}^{n}\int_{-\delta}^{\delta}k_j(x)|\varphi(y+x)-\varphi(x)|dx\\ &\left.+\sum_{j=1}^{n}\int_{\delta}^{a}k_j(x)\{|\varphi(y+x)|+|\varphi(y)|\}dx\right]<\varepsilon,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit 3).

Lemme 4. *Soit p un entier positif on nul. Soit $\{k_j(x)\}$ une suite des fonctions définies dans l'intervalle $[-a,a]$, dérivables jusqu'à l'ordre p dans $[-a,a]$, satisfaisant aux conditions* i) *et* ii). *Supposons de plus que la suite des fonctions dérivées $\{k_j^{(p)}(x)\}$ satisfasse à la condition* i) *et qu'on ait*

$$k_j^{(m)}(-a)=k_j^{(m)}(a)\quad \textit{pour tout } m=0,1,2,\cdots,p-1.$$

On obtient alors, pour toute fonction $\varphi(x)$ périodique de période $2a$ ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclusivement, que:

1) *quel que soit y, la fonction $K^{(p)}(x)\varphi(y+x)$ est intégrable $(E.R.\nu)$,*

2) *la suite des fonctions $\int_{-\infty}^{\infty}K_n^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx$ converge uniformément vers la fonction $(E.R.)\int_{-\infty}^{\infty}K^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx$, et on a*

$$(E.R.)\int_{-\infty}^{\infty}K^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx=(-1)^p\varphi^{(p)}(y)\ [4],$$

3) *quelle que soit la fonction $f(x)$ bornée, on a*

$$\int_{-a}^{a}f(x)\varphi^{(p)}(x)dx=(-1)^p\ (E.R.)\int_{-\infty}^{\infty}(f*K^{(p)})(x)\varphi(x)dx.$$

Démonstration. Désignons par $K(x)$ et $K(p;x)$ les fonctions définies par $(*)$ pour les suites $\{k_j(x)\}$ et $\{k_j^{(p)}(x)\}$ respectivement. Alors, $K(x)$ est dérivable jusqu'à l'ordre p, sauf pour une infinité dénombrable $\{x;\ x=(2j-1)a,\ j=0,1,2,\cdots\}$, et on a $K^{(p)}(x)=K(p;x)$. On voit, par Lemme 3, que $K(p;x)\varphi(y+x)\in K(\nu)$. Par suite, on a $K^{(p)}(x)\varphi(y+x)\in K(\nu)$ et on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx=(E.\ R.)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}} K^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx.$$

On a de plus

$$\int_{-a}^{a} k_j^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx=(-1)^p \int_{-a}^{a} k_j(x)\varphi^p(y+x)dx,$$

puisqu'on a $k_j^{(m)}(-a)=k_j^{(m)}(a)$ pour tout $m=0,1,2,\cdots,p-1$. Donc, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_n^{(p)}(x)\varphi(y+x)dx=(-1)^p\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\varphi^{(p)}(y+x)dx.$$

Par conséquent, on déduit, par Lemme 3, 1) et 2), puisque la fonction dérivée $\varphi^{(p)}(x)$ est continue. Pour 3), on a

$$\begin{aligned}&\int_{-a}^{a} f(x)\varphi^{(p)}(x)dx\\ &=(-1)^p \int_{-a}^{a} f(x) \left((E.\ R.) \int_{-\infty}^{\infty} K^{(p)}(y)\varphi(x+y)dy\right)dx\\ &=(-1) \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a} f(x)K_n^{(p)}(y-x)\,dx\right)\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

On voit, par Lemmes 1), 2), et 3), que $(f * K^{(p)})(y)\,\varphi(y)\in K(\nu)$ et $A_n=[-\infty<x\leq(2n-1)a]$ est une suite d'exhaustion d'ensembles. De plus, on voit que

$$\left|\int_{A_n}(f * K^{(p)})(y)\,\varphi(y)\,dy-\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-a}^{a} f(x)K_n^{(p)}(y-x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy\right|=O\left(\frac{o(n)}{n}\right).$$

Donc, il existe $\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}(f * K^{(p)})(x)\varphi(x)dx$ et il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A_n}(f * K^{(p)})(x)\,\varphi(x)dx=(-1)^p \int_{-a}^{a} f(x)\,\varphi^{(p)}(x)dx,$$

ce qui prouve (3).

Nous allons maintenant montrer le

Démonstration du Théorème. Prenons une suite des fonctions indéfiniment dérivables $\{k_j(x)\}$ définies dans l'intervalle $[-a, a]$, satisfaisant aux conditions i), ii), et iii), et dont la suite des fonctions dérivées $\{k_j^{(p)}(x)\}$ satisfait a la condition i) pour tout $p=0, 1, 2, \cdots$. Par exemple, il suffit de prendre, comme telle $\{k_j(x)\}$, la suite des noyaux de Poisson $\{P(r(j), x)\}$ tels que $r(j)=1-\dfrac{1}{\log(j+2)}$.

Soit $K(x)$ la fonction définie par $(*)$ pour la suite $\{k_j(x)\}$. Nous avons déjà vu que pour une $T\in K'(a)$ quelconque, il existe un entier $p\geq 0$ et une fonction $f(x)$ continue tels qu'on ait

$$(T,\varphi)=\int_{-a}^{a} f(x)\,\varphi^{(p)}(x)dx,$$

quelle que soit $\varphi(x)\in K(a)$. Donc, par Lemme 4, on obtient 1). Ensuite, puisqu'on a

$$\begin{aligned}(T',\varphi)=-(T,\varphi')&=-\int_{-a}^{a} f(x)\,\varphi^{(p+1)}(x)dx\\ &=(-1)^p(E.\ R.)\int_{-a}^{a}(f * K^{(p+1)})\,(x)\,\varphi(x)dx,\end{aligned}$$

et qu'on a

$$(f * K^{(p+1)})(x) = ((f * K^{(p)})(x))',$$

on obtient 2).

Références

[1] I. L. Bondi: *A*-integral and generalized functions. Usp. Math. Nauk, **19** (1964).

[2] K. Kunugi: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad., **32**, 215–220 (1956); H. Okano: Une nouvelle méthode pour considérer la série comme une intégrale. II. Proc. Japan Acad., **41**, 132–137 (1965).

[3] S. Nakanishi: Sur une représentation de la fonction delta de Dirac. III. Proc. Japan Acad., **41**, 812–815 (1965).

[4] ——: Loc. cit., p. 814.