248. *Sur les structures des espaces rangês. II*

Par Yukio YOSHIDA
Université d'Osaka

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M.J.A., Dec. 12, 1966)

Continuant la note précédente [5], nous allons étudier les structures des espaces rangés:[1] sur les sous-espaces rangés et sur les fonctions continues au sens d'espace rangé.

§3. Sous-espaces rangés (continué). Dans ce paragraph, soit R un espace rangé satisfaisant aux axiomes (A) et (B) de M. Hausdorff et ayant l'indicateur ω et soit A un espace induit de R. ([2] p. 550)

Sur les relations entre la convergence simple dans A et celle dans R, nous avons eu les propositions 9 et 10 de [5]. Ce qu'elles nous aient montré est le suivant. Si l'espace induit A est un sous-espace rangé de R ([5] p. 619), alors, d'une suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de points de A et d'un point x de A, pour que

$$x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\} \quad \text{dans } A$$

il faut et il suffit que

$$x \in \{\lim x_\alpha\} \quad \text{dans } R.$$

Mais, sur les convergences propre et quasi-propre nous avons seulement la proposition suivante.

Proposition 12. *Pour une suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de points de l'espace rangé induit (le sous-espace rangé) A de R et pour un point x de A, si l'on a*

$$x \in \{\operatorname*{lim-prop}_\alpha x_\alpha\} (\in \{\operatorname*{lim-\mathit{q}-prop}_\alpha x_\alpha\}) \quad \textit{dans } R$$

alors on a

$$x \in \{\operatorname*{lim-prop}_\alpha x_\alpha\} (\in \{\operatorname*{lim-\mathit{q}-prop}_\alpha x_\alpha\}) \quad \textit{dans } A.$$

La suite convergente (quasi-) proprement dans un sous espace rangé n'est pas nécessairement convergente (quasi-) proprement dans l'espace rangé entier, parce que la convergence (quasi-) propre vers un point x est influée par tous les points distincts de x.

Ensuite, pour toute partie E de A, posons

$$\lambda(E; A) = \{x \mid x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\} \text{ dans } A, \text{ où } \forall \alpha x_\alpha \in E\}$$

$$\lambda_p(E; A) = \{x \mid x \in \{\operatorname*{lim-prop}_\alpha x_\alpha\} \text{ dans } A, \text{ où } \forall \alpha x_\alpha \in E\}$$

$$\lambda_{qp}(E; A) = \{x \mid x \in \{\operatorname*{lim-\mathit{q}-prop}_\alpha x_\alpha\} \text{ dans } A, \text{ où } \forall \alpha x_\alpha \in E\}$$

Alors on a

$$\lambda(E; A) \supseteqq \lambda(E) \cap A$$

---

[1] Sur les espaces rangés, voir [1] et [2].

$$\lambda_p(E; A) \supseteqq \lambda_p(E) \cap A.$$ [2]

Et si A est un sous-espace rangé de R, alors on a

$$\lambda(E; A) = \lambda(E) \cap A$$

$$\lambda_{qp}(E; A) \supseteqq \lambda_{qp}(E) \cap A.$$

Pour que la limite simple coïncide avec la limite (quasi-) propre dans un sous espace rangé d'un espace rangé, nous avons:

Proposition 13. *Si un espace rangé est (quasi-) séparément rangé,*[3] *alors tout sous-espace rangé de R est (quasi-) séparément rangé.*

De même, sur la limite simple et sur celle ordinaire, nous avons:

Proposition 14. *Tout sous-espace rangé d'un espace rangé arborescent est aussi rangé arborescent.*[4]

Comme nous avons vu dans [6],[5] il faut distinguer la notion des sous-espaces rangés et celle des espaces rangés induits. Pour que ces deux notions coïncident, nous allons donner une axiome suivant.

Axiome (d). Pour toute suite bien ordonnée (n'étant pas nécessairement monotone)

$$V_0(x),\ V_1(x),\ \cdots,\ V_\alpha(x),\ \cdots;\ V_\alpha(x) \in \mathfrak{B}_{\gamma_\alpha}(x) \qquad (0 \leq \alpha < \alpha_0)$$

de voisinages d'un point x quelconque de R dont le type α_0 est inférieur à l'indicateur ω de R, $\bigcap_\alpha V_\alpha(x)$ est un voisinage de x de rang $\sup_\alpha \gamma_\alpha$.

Proposition 15. *Tout espace induit d'un espace rangé satisfaisant á l'axiome (d) est son sous-espace rangé.*

Démonstration. Soient A un espace rangé induit d'un espace rangé R satisfaisant à l'axiome (d); x un point quelconque de A; $\{U_\alpha(x; A) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ une suite fondamentale quelconque par rapport à x dans A; $U_\alpha(x)$ les voisinages de x dans R tels que

$$U_\alpha(x; A) = U_\alpha(x) \cap A \qquad (0 \leq \alpha < \omega)$$

et que $U_\alpha(x; A)$ et $U_\alpha(x)$ soient de même rang. Alors, par l'axiome (d), il existe voisinages $V_\alpha(x)(0 \leq \alpha < \omega)$ dans R tels que

$$V_\alpha(x) = \bigcap_{\beta \leq \alpha} U_\beta(x)$$

et que $V_\alpha(x)$ et $U_\alpha(x)$ soient de même rang. De ces $V_\alpha(x)$, on a

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) \cap A &= \bigcap_{\beta \leq \alpha} \{U_\beta(x) \cap A\} \\ &= \bigcap_{\beta \leq \alpha} U_\beta(x; A) \\ &= U_\alpha(x; A) \end{aligned}$$

et on voit que la suite $\{V_\alpha(x) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ est fondamentale par rapport à x dans R.

---

[2] De $\lambda(E)$, $\lambda_p(E)$, $\lambda_{qp}(E)$, voir [3] p. 474.

[3] Voir [3] p. 475 et [4] p. 1139.

[4] Voir [4] p. 1140.

[5] Example 5 de p. 105.

Par conséquent, A est un sous-espace rangé de R. c.q.f.d.

§4. Les fonctions continues (r), (p), et (qp). Dans la note [2], Prof. K. Kunugi a défini la continuité (r) et (p): c'est-à-dire qu'étant donné deux espaces rangés R, S ayant le même indicateur ω, disons qu'une fonction univoque f définie sur une partie A de R dont les valeurs appartiennent à S est continue (r) (ou (p)) à un point x de A, si pour toute suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de points de A telle qu'on ait

$$x \in \{\lim_\alpha x_\alpha\} \quad (\in \{\text{lim-prop}_\alpha\, x_\alpha\}) \quad \text{dans } A$$

on ait

$$f(x) \in \{\lim_\alpha f(x_\alpha)\} \quad (\in \{\text{lim-prop}_\alpha\, f(x_\alpha)\}) \quad \text{dans } S.$$

Ici, "dans A" signifiera "dans l'espace induit A de R".

Nous allons définir, à nouveau, la continuité (qp) et exposer certaines des propriétés des founctions continues à ceux sens.

Dans ce paragraph, soient R, S, et T trois espaces rangés ayant le même indicateur ω et soit f une fonction univoque définie sur une partie A de R dont les valeurs appartiennent à S.

Définition 3. Nous disons que la fonction f est *continue* (qp) à un point x de A, si, pour toute suite $\{x_\alpha \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$ de points de A telle que l'on ait

$$x \in \{\text{lim-}q\text{-prop}_\alpha\, x_\alpha\} \quad \text{dans } A$$

on ait

$$f(x) \in \{\text{lim-}q\text{-prop}_\alpha\, f(x_\alpha)\} \quad \text{dans } S.$$

Une fonction est dite *continue* (qp) lorsqu'elle est continue (qp) à tous les points de son ensemble de définition.

Proposition 16. *Si la fonction f est continue (r) (ou (p), ou (qp)) à un point x de A, alors pour toute partie E de A*

$$x \in \lambda(E; A)$$
$$(ou \in \lambda_p(E; A),\ ou\ \in \lambda_{qp}(E; A))$$

entraîne

$$f(x) \in \lambda(f(E))$$
$$(ou\ \in \lambda_p(f(E)),\ ou\ \in \lambda_{qp}(f(E))).$$

Corollaire 1. *Si la fonction f est continue (r) (ou(p), ou (qp)), alors, pour toute partie E de A, on a*

$$f(\lambda(E; A)) \subseteqq \lambda(f(E))$$
$$(ou\ f(\lambda_p(E; A)) \subseteqq \lambda_p(f(E)),\ ou\ f(\lambda_{qp}(E; A)) \subseteqq \lambda_{qp}(f(E))).$$

De plus, l'image inverse de toute partie fermée (r) (ouverte (r)) de S est fermée (r) (ouverte (r)) dans A.

Corollaire 2. *Dans le corollaire 1, si l'espace A un sous-espace rangé de R, alors on a*

$$f(\lambda(E) \cap A) \subseteqq \lambda(f(E)).$$

Les réciproques de ces proposition et corollaires est inexacts.

Nous le montrons dans l'example suivant.

Example 1. Soient R, S les totalités de nombres réels. Prenons pour le voisinage de range $n(0 \leq n < \omega_0)$ d'un point x quelconque de R interval $(x-2^{-n}, x+2^{-n})$, et pour les voisinages de rang $n(0 \leq n < \omega_0)$ d'un point x quelconque de S deux intervals $(x-2^{-n}, x]$, $[x, x+2^{-n})$ et ensemble $\{x\}$. Alors R et S devient deux espaces rangés ayant le même indicateur ω_0. Puisque R et S sont séparément rangés, pour toute partie E de R ou de S, on a

$$\lambda(E) = \lambda_p(E) = \lambda_{qp}(E)$$

et, de plus, pour toute partie E de R, on a

$$\lambda(E) = \bar{E}.$$

Soit f la fonction qui correspond tout nombre réel x de R à le même x de S: c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

De cette fonction f, nous avons, pour toute partie E de R,

$$f(\lambda(E)) = \lambda(f(E)).$$

D'autre part, f n'est ni continue (r), ni (p), ni (qp) à tout point x de R. Car, la suite

$$\{x + (-2)^{-n} \mid 0 \leq n < \omega_0\}$$

converge simplement vers x dans R, mais elle ne converge pas simplement vers x dans S.

Ensuite, nous allons donner une condition pour qu'une fonction soit continue (r).

Proposition 17. *Soit x un point de A. Supposons que pour toute suite fondamentale*

$$\{U_\alpha(x; A) \mid 0 \leq \alpha < \omega\}$$

de voisinages par rapport à x dans A, il existe une suite fondamentale

$$\{V_\beta(y) \mid 0 \leq \beta < \omega\}$$

de voisinages par rapport au point $y = f(x)$ de S telle que pour tout $\alpha(0 \leq \alpha < \omega)$ il existe un $\beta(0 \leq \beta < \omega)$ tel que l'on ait

$$f(U_\alpha(x; A)) \subseteqq V_\beta(y).$$

Alors la fonction f est continue (r) à x.

Sur la continuité de la restriction d'une fonction continue (r) nous avons:

Proposition 18. *Si la fonction f est continue (r), alors la restriction de f à un sous-espace rangé B de A est aussi continue (r).*

Dans cette proposition, on ne peut pas remplacer "sous-espace rangé" par "espace rangé induit".

La restriction d'une fonction continue (p) (ou (qp)) à un sous-espace rangé de son domaine de définition n'est pas nécessairement continue (p) (ou (qp)). Nous le montrons dans l'example suivant.

Example 2. Dans l'example 1 de la note [7], soient

$$x_n=(x_n^{(\xi)} \mid 0\leq\xi<\omega_0)(0\leq n<\omega_0)$$

où

$$x_0^{(\xi)}\equiv 0$$

$$x_n^{(\xi)}=\begin{cases} 2^{-n} & \text{lorsque } \xi=0 \\ n & \text{lorsque } \xi\neq 0 \end{cases}$$

et posons $A=\{x_n \mid 0\leq n<\omega_0\}$. Alors espace induit A de R devient un sous-espace rangé de $\langle R, \rho_1\rangle$.

La projection $p_1(x)$ est une fonction continue (p) et (qp) d'espace $\langle R, \rho_1\rangle$ sur l'espace rangé de tous les nombres réels, coinicidant avec l'espace rangé R de l'example 1 dans cette note. Mais la restriction de $p_1(x)$ à A n'est ni continue (p) ni (qp) au point x_0, parce que la suite $\{x_n \mid 0\leq n<\omega_0\}$ converge proprement et quasi-proprement vers x_0 dans l'espace A, et que l'on a

$$p_1(x_n)=n \qquad (0\leq n<\omega_0).$$

Enfin, soit g une fonction univoque définie sur une partie B de S dont les valeurs appartiennent à T. De plus, supposons que $f(A)$ soit conténu à B.

Proposition 19. *Si la fonction f est continue à x de R et si la fonction g est continue à $y=f(x)$, alors la fonction composée $h=g\circ f$ de R dans T est continue au point x.*

Références

[1] K. Kunugi: Sur la méthode des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 318-322 (1966).

[2] ——: Sur la méthode des espaces rangés. II. Proc. Japan Acad., **42**, 549-554 (1966).

[3] Y. Yoshida: Sur les convergences dans l'espace rangé. I. Proc. Japan Acad., **42**, 473-476 (1966).

[4] ——: Sur les convergences dans l'espace rangé. II. Proc. Japan Acad., **42**, 1139-1143 (1966).

[5] ——: Sur les structures des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 616-619 (1966).

[6] ——: Quelques examples des espaces rangés concernant les convergences. Math. Japonicae., **11**, 97-108 (1966).

[7] ——: Sur le produit des espaces rangés. I. Proc. Japan Acad., **42**, 477-481 (1966).