217. *Eine Verallgemeinerung des Begriffes der absolut-p-summierenden Abbildung*

Von Irmtraud STEPHANI
Sektion Mathematik, Friedrich Schiller-Universität

(Comm. by Kinjirô KUNUGI, M. J. A., Nov. 12, 1970)

1. Nach Pietsch heißt eine lineare Abbildung T eines Banach-Raumes E in einen Banach-Raum F *absolut-p-summierend*, wenn es eine Zahl $\rho>0$ gibt, so daß für jedes endliche System $x_1, x_2, \cdots, x_n$ von Elementen aus E die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \|Tx_i\|^p \leq \rho^p \cdot \sup_{\|a\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, a\rangle|^p \tag{1.1}$$

besteht. Gleichbedeutend damit ist die Existenz eines normierten positiven Radonschen Maßes μ auf der schwach kompackten Einheitskugel U^0 des dualen Banach-Raumes E' von E, das für $\|Tx\|$ die Abschätzung

$$\|Tx\|^p \leq \rho^p \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|^p \, d\mu \tag{1.2}$$

leistet (vgl. [5]).

In ihrer Arbeit "On classes of Summing Operators. I" (vgl. [1]) ersetzen Craiu und Istrăţescu die Potenzfunktion $\phi(t)=t^p$, auf die sich für $p\geq 1$ der Begriff der absoluten p-Summierbarkeit gründet, durch eine N-Funktion im Sinne von Krasnoselskii-Rutizkii (vgl. [2]). Allerdings wird $\phi(t)$ nicht als eine beliebige N-Funktion vorausgesetzt, sondern gewissen zusätzlichen Bedingungen unterworfen. In der vorliegenden Arbeit soll demgegenüber ein *Verfahren zur Verallgemeinerung des Begriffes der absoluten p-Summierbarkeit* aufgezeigt werden, das nicht auf derartige einschränkende Bedingungen für $\phi(t)$ angewiesen ist, sondern sogar eine umfassendere Funktionenklasse als die Klasse der N-Funktion zuläßt.

2. Es sei $\phi(t)$ eine *konvexe φ-Function* im Sinne von Orlicz (vgl. [3], [4]), d.h. eine für $t\geq 0$ definierte stetige, monoton wachsende und konvexe funktion mit $\phi(0)=0$. Eine lineare Abbildung T eines Banach-Raumes E in einen Banach-Raum F soll dann eine *Abbildung vom Typ A_ϕ* genannt werden, wenn mit einer festen Zahl $\rho>0$ für jedes endliche System $x_1, x_2, \cdots, x_n$ von Elementen aus E und von positiven Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \phi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) \leq \sup_{\|a\|\leq 1} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \phi(|\langle x_i, a\rangle|) \tag{2.1}$$

besteht. Die so definierte Operatorenklasse A_ϕ erweist sich als ein

Operatorenideal (vgl. [6], [7], [8]). Das bedeutet im einzelnen:

(A_1) Für je zwei Banach-Räume E und F ist $A_\phi(E,F)$ ein linearer Teilraum des Raumes $L(E,F)$ aller linearen stetigen Abbildungen von E in F, und es gibt mindestens ein Paar $\tilde{E},\tilde{F}$, so daß $A_\phi(\tilde{E},\tilde{F})$ eine Transformation $\tilde{T}_0$ mit $\tilde{T}_0 \neq 0$ enthält.

In der Tat läßt sich für die Summe T_1+T_2 zweier Abbildungen T_1 und T_2 aus $A_\phi(E,F)$ mit Hilfe der entsprechenden Konstanten ρ_1 and ρ_2 folgende Abschätzung durchführen:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|(T_1+T_2)x_i\|}{\rho_1+\rho_2}\right)\\ &\leq \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\sum_{i=1}^n \rho_i \phi\left(\frac{\|T_1x_i\|}{\rho_1}\right)+\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi\left(\frac{\|T_2x_i\|}{\rho_2}\right)\\ &\leq \sup_{\|a\|\leq 1}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi(|\langle x_i, a\rangle|).\end{aligned}$$

Daraus geht $T_1+T_2 \in A_\phi(E,F)$ hervor. Mit T gehört für beliebige Skalare λ auch λT zu $A_\phi(E,F)$; man kann dabei statt der Konstanten ρ die Konstante $|\lambda|\cdot\rho$ verwenden. Schließlich genügt jede eindimensionale Abbildung

$$Tx=\langle x, a_0\rangle y_0$$

der Ungleichung (2.1) mit $\rho=\|a_0\|\cdot\|y_0\|$.

(A_2) a) Aus $T\in A_\phi(E,F)$ und $R\in L(F,G)$ folgt $RT\in A_\phi(E,G)$.
b) Aus $T\in A_\phi(F,G)$ und $R\in L(E,F)$ folgt $TR\in A_\phi(E,G)$.

Für die Eigenschaft (A_2) a) ist die Abschätzung

$$\|RTx_i\|\leq\|R\|\cdot\|Tx_i\|$$

und der Übergang von ρ zu $\|R\|\cdot\rho$ maßgebend. Die Prüfung der Eigenschaft (A_2) b) vollzieht sich so:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi\left(\frac{\|TRx_i\|}{\|R\|\cdot\rho}\right) &\leq \sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi\left(\left|\left\langle\frac{Rx_i}{\|R\|}, b\right\rangle\right|\right)\\ &=\sup_{\|b\|\leq 1}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi\left(\left|\left\langle x_i, \frac{R'b}{\|R\|}\right\rangle\right|\right)\leq \sup_{\|a\|\leq 1}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi(|\langle x_i, a\rangle|).\end{aligned}$$

Aus der Beweisführung zu (A_1) ergibt sich, daß durch die Festsetzung

$$\boldsymbol{a}_\phi(T)=\inf\left\{\rho>0:\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right)\leq\sup_{\|a\|\leq 1}\sum_{i=1}^n \sigma_i\phi(|\langle x_i, a\rangle|)\right\}$$

auf dem linearen Raum $A_\phi(E,F)$ jeweils eine *Norm* bestimmt wird. Hinzuzufügen ist lediglich der Sachverhalt—

$$\boldsymbol{a}_\phi(T)=0 \text{ nur im Falle } T=0\text{—},$$

der auf dem Wege über

$$\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\boldsymbol{a}_\phi(T)}\right)\leq\sup_{\|a\|\leq 1}\phi(|\langle x, a\rangle|)=\phi(\|x\|)$$

aus der Ungleichung

$$\|T\|\leq\boldsymbol{a}_\phi(T)$$

resultiert. Die Bemerkungen zum Beweis von (A_2) a) und (A_2) b) lassen weiter erkennen

(N) a) $\boldsymbol{\alpha}_\phi(RT) \leq \|R\| \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi(T)$ für $T \in A_\phi(E,F)$ und $R \in \boldsymbol{L}(F,G)$.

b) $\boldsymbol{\alpha}_\phi(TR) \leq \|R\| \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi(T)$ für $T \in A_\phi(F,G)$ und $R \in \boldsymbol{L}(E,F)$.

Es ist also $\boldsymbol{\alpha}_\phi$ eine sog. *Idealnorm* auf A_ϕ (vgl. [6]–[8]). Die einzelnen Komponenten $A_\phi(E,F)$ sind im übrigen *vollständig* bzgl. $\boldsymbol{\alpha}_\phi$. Sei dazu T_k eine beliebige $\boldsymbol{\alpha}_\phi$ - Cauchy - Folge in $A_\phi(E,F)$, also

$$\boldsymbol{\alpha}_\phi(T_k - T_1) \leq \varepsilon \qquad \text{für } k, 1 \geq K(\varepsilon)$$

mit einem hinreichend großen $K(\varepsilon)$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|T_k - T_1)x_i\|}{\varepsilon}\right) \leq \sup_{\|a\|\leq 1} \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi(|\langle x_i, a\rangle|) \tag{2.2}$$

für $k, 1 \geq K(\varepsilon)$. Wegen

$$\|T_k - T_1\| \leq \boldsymbol{\alpha}_\phi(T_k - T_1)$$

ist T_k aber auch eine Cauchy - Folge in $\boldsymbol{L}(E,F)$ bzgl. der gewöhnlichen Operatorennorm. Daher existiert eine Abbildung T aus $\boldsymbol{L}(E,F)$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|T_k - T\| = 0.$$

Führt man unter dem links stehenden Summenzeichen von (2.2) jetzt den Grenzübergang $1 \to \infty$ aus und berücksichtigt die Stetigkeit der Funktion $\phi(t)$, so erhält

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|(T_k - T)x_i\|}{\varepsilon}\right) \leq \sup_{\|a\|\leq 1} \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi(|\langle x_i, a\rangle|).$$

Von hier aus kann man auf $T_k - T \in A_\phi(E,F)$ und

$$\boldsymbol{\alpha}_\phi(T_k - T) \leq \varepsilon \qquad \text{für } k \geq K(\varepsilon)$$

schließen, d.h. man erkennt T als $\boldsymbol{\alpha}_\phi$-Limes der $\boldsymbol{\alpha}_\phi$ - Cauchy - Folge T_k in $A_\phi(E,F)$.

3. Sei $C(U^0)$ der Banach-Raum der stetigen Funktionen auf der Einheitskugel U^0 des dualen Raumes E' von E bzgl. der schwachen Topologie von E'. Durch den Ansatz

$$s_T(\varphi) = \inf_{x_i \in E} \inf_{\sigma_i > 0} \left\{\sup_{\|a\|\leq 1} \left[\varphi(a) + \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi(|\langle x_i, a\rangle|)\right] - \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right)\right\}$$

wird für eine beliebige Abbildung T aus $A_\phi(E,F)$ ein Funktional auf $C(U^0)$ definiert, das zwischen den Schranken

$$\inf_{a \in U^0} \varphi(a) \leq s_T(\varphi) = \sup_{a \in U^0} \varphi(a)$$

liegt. $s_T(\varphi)$ ist positiv—homogen; dafür sorgt die Infimumsbildung über die positiven Koeffizienten σ_i. Darüber hinaus ist $s_T(\varphi)$ subadditiv. Es läßt sich nämlich $s_T(\varphi + \psi)$ durch

$$\begin{aligned} s_T(\varphi+\psi) \leq & \left\{\sup_{\|a\|\leq 1} \left[\varphi(a) + \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi(|\langle x_i, a\rangle|)\right] - \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right)\right\} \\ & + \left\{\sup_{\|a\|\leq 1} \left[\psi(a) + \sum_{i=1}^n \tau_i \phi(|\langle z_i, a\rangle|)\right] - \sum_{i=1}^n \tau_i \phi\left(\frac{\|Tz_i\|}{\rho}\right)\right\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit beliebigen Elementsystemen $x_1, x_2, \cdots, x_n, z_1, z_2, \cdots, z_m$ aus E und beliebigen positiven Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m$ abschätzen. Auf der rechten Seite von (3.1) kann sodann das Infimum über die Elementsysteme $x_1, x_2, \cdots, x_n$ und die $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ und unabhängig davon über die Elementsysteme $z_1, z_2, \cdots, z_m$ und die $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_m$ gebildet werden. So kommt

$$s_T(\varphi+\psi) \leq s_T(\varphi)+s_T(\psi)$$

zustande, wie gewünscht. Nach dem verallgemeinerten Hahn-Banach-Theorem existiert daher eine Linearform μ über $C(U^0)$ mit

$$\langle \varphi, \mu \rangle \leq s_T(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in C(U^0).$$

Für eine Funktion $\varphi \geq 0$ aus $C(U^0)$ gilt wegen

$$s_T(-\varphi) \leq \sup_{a \in U^0} [-\varphi(a)] \leq 0$$

offensichtlich

$$\langle -\varphi, \mu \rangle \leq 0 \text{ bzw. } \langle \varphi, \mu \rangle \geq 0,$$

d.h. μ ist positiv und somit stetig. Im übrigen hat man

$$\langle 1, \mu \rangle \leq s_T(1) \leq 1. \tag{3.2}$$

Die zu $C(U^0)$ gehörige Funktion $\varphi(a) = -\phi(|\langle x, a \rangle|)$ unterliegt wegen

$$s_T(\varphi) \leq \sup_{\|a\| \leq 1} [\varphi(a)+\phi(|\langle x, a \rangle|)] - \phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right)$$

speziell der Abschätzung

$$s_T(-\phi(|\langle x, a \rangle|)) \leq -\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right),$$

also auch der Abschätzung

$$\langle -\phi(|\langle x, a \rangle|), \mu \rangle \leq -\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right).$$

Bei Verwendung der Integralschreiweise für die positive Linearform μ über $C(U^0)$ ist das gleichbedeutend mit

$$\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right) \leq \int_{U^0} \phi(|\langle x, a \rangle|) d\mu. \tag{3.3}$$

Schreibt man (3.3) jetzt für ein beliebiges n-tupel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ von Elementen aus E auf, so gewinnt man nach Multiplikation mit beliebigen positiven Koeffizienten σ_i und nach summation über i die Aussage

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \phi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) \leq \int_{U^0} \sum_{i=1}^n \sigma_i \phi(|\langle x_i, a \rangle|) d\mu,$$

die in Verbindung mit (3.2) schließlich zu (2.1) zurückführt.

4. Die Abbildungen vom Typ A_ϕ lassen sich also durch eine *Integralabshätzung* (3.3) characterisieren, die für $\phi(t)=t^p$ gerade mit der Integralabschätzung (1.2) der absolut-p-summierenden Abbildungen zusammenfällt. Nicht so ohne weiteres scheinen sich jedoch diejenigen Resultate aus der Theorie der absolut-p-summierenden Abbildungen auf Abbildungen vom Typ A_ϕ verallgemeinern zu lassen, die mit den Funktionenräumen $L_p(K, \mu)$ zusammenhängen. Selbst wenn man sich auf die Betrachtung von N-Funktionen beschränkt, wie sie der Theorie der Orlicz-Räume zugrundeliegen, bleiben die gewünschten Ergebnisse

aus.

5. Jedes Operatorenideal A_ϕ umfaßt das *Ideal* π_1 *der absolut*-1-*summierenden Abbildungen*. Ist nämlich $T \in \pi_1(E, F)$, so existiert ein positives normiertes Maß μ auf U^0, das mit einer geeigneten Konstanten $\rho > 0$ für $\|Tx\|$ die Abschätzung

$$\frac{\|Tx\|}{\rho} \leq \int_{U^0} |\langle x, a\rangle|\, d\mu \tag{1.2$'$}$$

leistet. Daraus folgt unmittelbar

$$\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right) \leq \phi\left(\int_{U^0} |\langle x, a\rangle|\, d\mu\right).$$

Nach der Jensenschen Ungleichung aber kann wegen

$$\int_{U^0} 1 d\mu = 1$$

weiter auf

$$\phi\left(\frac{\|Tx\|}{\rho}\right) \leq \int_{U^0} \phi(|\langle x, a\rangle|) d\mu \tag{3.3}$$

geschlossen werden, womit $T \in A_\phi(E, F)$ gezeigt ist.

Literatur

[1] V. Craiu and V. Istrţăescu: On classes of Summing Operators. I. Proc. Japan Acad., **45**, 380–382 (1969).

[2] M. A. Krasnoselskii und J. B. Rutizkii: Konvexe Funktionen und Orlicz—Räume. Moskau (1958).

[3] W. Orlicz: On the Convergence of Norms in Spaces of φ-integrable Functions. Bull. de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des sciences math., astr. et phys., Vol. XIII, No. 3, 205–210 (1965).

[4] ——: On some classes of modular spaces. Studia Mathematica, **26**, 165–192 (1966).

[5] A. Pietsch: Absolut-p-summierende Abbildungen in normierten Räumen. Studia Mathematica, **28**, 333–353 (1967).

[6] A. Pietsch and H. Triebel: Interpolationstheorie für Banachideale von beschränkten linearen Operatoren. Studia Mathematica, **31**, 95–109 (1968).

[7] I. Stephani: Injektive Operatorenideale über der Gesamtheit aller Banach-Räume und ihre topologische Erzeugung. Studia Mathematica. XXXVIII Räume und ihre topologische Erzeugung. Studia Mathematica, **38** (im Druck).

[8] ——: Surjektive Operatorenideale über der Gesamtheit aller Banach-Räume. Wissenschaftliche Zeitschrift der Friedrich-Schiller-Universität Jena, math. naturw. Reihe (im Druck).