120. *Un théorème de l'analyticité des hyperfonctions invariantes par les transformations de Lorentz*

Par Mitsuo MORIMOTO

(Comm. by Kunihiko KODAIRA, M. J. A., June 12, 1971)

Nous présentons dans cette note une version du théorème de Bargmann-Hall-Wightman-Jost ([2], [5]) en cadre des hyperfonctions comme un corollaire direct du théorème fondamental de M. Sato concernant la régularité des solutions hyperfonctions d'une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients réel-analytiques.

Pour énoncer notre théorème, préparons-nous des notations. Soit V une variété réel-analytique orientée. Pour une hyperfonction f sur V, le support singulier S. S. f est, par définition, le support de la section βf du faisceau $\mathcal{C}$ sur S^*V l'espace fibré des sphères cotangentielles sur V. Dans cette note on suppose que la variété V est un ouvert d'un espace euclidien réel E à m dimensions. Alors l'espace fibré S^*V des sphères cotangentielles sur V s'identifie à l'espace produit $V\times S^*$ avec la projection canonique sur V, S^* désignant une sphère, dans l'espace dual E^* de E, de centre l'origine. En associant à chaque sous-ensemble I de S^* le cône $\tilde{I}=\bigcup_{t>0} tI$, on peut identifier le sous-ensemble I de S^* et le cône $\tilde{I}$ de sommet l'origine de E^*. On note $I=\tilde{I}\infty$. Pour un cône Γ dans E de sommet l'origine, Γ^* désigne le cône dual de Γ:

$$\Gamma^*=\{\eta\in E^*, \eta(x)\geqq 0 \text{ pour tout } x\in\Gamma\}.$$

Nous définissons pour un quadri-vecteur $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)\in \boldsymbol{R}^4$ le produit de Minkowski:

$$(x, x)=(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2.$$

$\Gamma_+=\{x\in\boldsymbol{R}^4\,;\, x^0>0, (x, x)>0\}$ désigne le cône de lumière positif. Soit $\boldsymbol{R}^{4n}=\boldsymbol{R}^4\times\boldsymbol{R}^4\times\cdots\times\boldsymbol{R}^4$ l'espace des n-tuples de quadri-vecteurs $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Posons $\Gamma_+^n=\Gamma_+\times\Gamma_+\times\cdots\times\Gamma_+$, qui est un cône ouvert de $\boldsymbol{R}^{4n}$ de sommet l'origine. Un point $X=(x_1, \cdots, x_n)$ est, par définition, *un point de Jost* si et seulement si, pour tout $\lambda_j\geqq 0$ tel que $\sum_{j=1}^n\lambda_j>0$, on a $(\sum_{j=1}^n\lambda_j x_j, \sum_{j=1}^n\lambda_j x_j)<0$, c'est-à-dire, le quadri-vecteur $\sum_{j=1}^n\lambda_j x_j$ est de genre espace. J désigne l'ensemble des points de Jost de $\boldsymbol{R}^{4n}$.

Nous considérons dorénavant des hyperfonctions sur un ouvert V de l'espace $\boldsymbol{R}^{4n}$. Une hyperfonction f sur V est, par définition, *invariante par les transformations infinitésimales de Lorentz* si et seulement si f satisfait aux 6 équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre 1:

$$\sum_{j=1}^n\left(x_j^0\frac{\partial}{\partial x_j^k}+x_j^k\frac{\partial}{\partial x_j^0}\right)f(X)=0,\qquad k=1, 2, 3\,;$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^k\frac{\partial}{\partial x_j^l}-x_j^l\frac{\partial}{\partial x_j^k}\right)f(X)=0, \qquad 1\leqq k<l\leqq 3.$$

Voici notre théorème:

Théorème. *Supposons qu'une hyperfonction f définie sur un ouvert V de l'espace $\boldsymbol{R}^{4n}$ satisfait aux deux conditions suivantes:*

a) S. S. $f\subset V\times((\Gamma_+^n)^*\cup(-\Gamma_+^n)^*)\infty$;

b) *f est invariante par les transformations infinitésimales de Lorentz.*

Alors l'hyperfonction f est analytique sur $V\cap J$.

Remarque. La condition a) est équivalente à la condition que l'hyperfonction f peut être représentée comme la différence de deux valeurs au bord de deux fonctions holomorphes F_1 et F_2:

$$f(X)=F_1(X+\sqrt{-1}\,\Gamma_+^n 0)-F_2(X-\sqrt{-1}\,\Gamma_+^n 0).$$

(Voir pour les détails le théorème (6.1) de [3].)

Démonstration. La démonstration repose directement sur le théorème fondamental de M. Sato concernant la régularité des solutions hyperfonctions d'une équation linéaire aux dérivées partielles à coefficients réel-analytiques. (Voir [1] ou [4].) La condition b) du théorème implique, grâce au théorème de M. Sato, qu'on a pour $(X,\eta\infty)\in$ S. S. f

$$(1)\qquad \begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^k+x_j^k\eta_j^0)=0, &&\text{pour } k=1,2,3;\\ &\sum_{j=1}^{n}(x_j^k\eta_j^l-x_j^l\eta_j^k)=0, &&\text{pour } 1\leqq k<l\leqq 3.\end{aligned}$$

D'autre part, si $X\in V$ est point de Jost, on peut supposer que

$$(2)\qquad |x_j^0|<x_j^1 \qquad \text{pour tout } j=1,2,\cdots,n.$$

(Si nécessaire, on n'a qu'à effecteur une transformation de Lorentz [5], les conditions a) et b) du théorème étant encore valables sur l'image de V par cette transformation.)

Si $\eta\in(\Gamma_+^n)^*$, on a

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\eta_j^0\geqq|\eta_j^1| &&\text{pour tout } j=1,2,\cdots,n;\\ &\eta_j^0>0 &&\text{pour un } j,\ 1\leqq j\leqq n,\end{aligned}$$

d'où résulte, moyennant (2), l'inégalité:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1+x_j^1\eta_j^0)>\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1+|x_j^0|\eta_j^0)\\ &\geqq\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1+|x_j^0||\eta_j^1|)\geqq 0.\end{aligned}$$

Si $\eta\in(-\Gamma_+^n)^*$, on a

$$(4)\qquad \begin{aligned}&\eta_j^0\leqq-|\eta_j^1| &&\text{pour tout } j=1,2,\cdots,n;\\ &\eta_j^0<0 &&\text{pour un } j,\ 1\leqq j\leqq n,\end{aligned}$$

d'où résulte, moyennant (2), l'inégalité:

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1+x_j^1\eta_j^0)<\sum_{j=1}^{n}(x_j^0\eta_j^1+|x_j^0|\eta_j^0)$$

$$\leqq \sum_{j=1}^{n} (x_j^0 \eta_j^1 - |x_j^0||\eta_j^1|) \leqq 0.$$

On a ainsi montré que la condition b) implique

$$\text{S. S. } f \cap \{(V \cap J) \times ((\Gamma_+^n)^* \cup (-\Gamma_+^n)^*)\infty\} = \phi.$$

On utilise maintenant la condition a) et obtient

$$\text{S. S. } f \cap \{(V \cap J) \times S^*\} = \phi,$$

d'où résulte, grâce au théorème de décomposition de singularités d'hyperfonction (le théorème (5.1) de [3]), l'analyticité de notre hyperfonction f sur les points de Jost dans V. (c.q.f.d.)

Un analogue du théorème de Bargmann-Hall-Wightman-Jost s'obtient comme un corollaire de notre théorème.

Corollaire. *Soit f une hyperfonction sur $\boldsymbol{R}^{4n}$. Supposons que f satisfait à la condition* a) *du théorème* (V *remplacé par* $\boldsymbol{R}^{4n}$) *et à la condition* b′) *suivante*:

b′) *f est invariante par les transformations propres de Lorentz.*

Alors l'hyperfonction f est analytique aux points de Jost.

Démonstration. La condition b′) implique la condition b), d'où résulte le corollaire.

Remerciement. L'auteur remercie Monsieur le Professeur M. Sato de l'avoir prodiguer beaucoup de conseils utils. La démonstration du théorème se trouve son origine dans la discussion avec lui.

Références

[1] Kashiwara, M., et Sato, M.: Sur la structure de l'hyperfonction. Sûgaku-no-Ayumi, **15**, 9–71 (1970) (en japonais).
[2] Jost, R.: The General Theory of Quantized Fields. AMS, Providence, Rhode Island (1965).
[3] Morimoto, M.: Sur la décomposition du faisceau des germes de singularités d'hyperfonctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, **17**, 215–239 (1970).
[4] Sato, M.: Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Proc. Intern. Congress Math., Nice (1970) (à paraître).
[5] Streater, R. F., and Wightman, A. S.: PCT, Spin, Statics and All That. Benjamin, New York (1965).