45. *Sur une Condition Suffisante pour que le Problème de Cauchy Faiblement Hyperbolique soit Bien Posé*

Par Keiichiro KITAGAWA*) et Takashi SADAMATSU**)
Université d'Ehimé, Matsuyama

(Communicated by Kôsaku YOSIDA, M. J. A., Oct. 12, 1977)

1. **Introduction.** Si l'on envisage le problème de Cauchy (C):

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} P(t,x,D_t,D_x)u(t,x)=f(t,x) & (t,x)\in\Omega\equiv[0,T]\times R^l_x \\ D^j_t u(0,x)=\phi_j(x) \quad j=0,1,\cdots,m-1 & \left(D_t=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial t}, D_x=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$

pour un opérateur différentiel linéaire de type kowalevskien:

$$P(t,x,D_t,D_x)=D^m_t-\sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha|\leqq j} a_{j\alpha}(t,x)D^\alpha_x D^{m-j}_t \qquad (\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l))$$

à coefficients indéfiniment différentiables, à partie principale hyperbolique et à caractéristiques multiples, on sait que ce problème de Cauchy (C) n'est pas bien posé dans la classe de fonctions indéfiniment différentiables que les termes d'ordre inférieur ne vérifient de certaines conditions. ...Quand la multiplicité de caractéristiques est constante et au plus double, Mizohata-Ohya [3][4] a montré que "la condition de Levi" est nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy (C) soit bien posé. Ohya [5] l'a généralisé au cas de multiplicité au plus triple et a montré la condition suffisante. Quand la multiplicité est variable, Oleinik [6] a donné une condition suffisante au cas où l'opérateur $P(t,x,D_t,D_x)$ est d'ordre 2. Menikoff [2] l'a généralisé et a montré une condition suffisante au cas de multiplicité au plus double. ...Dans cette note, nous montrons une condition suffisante au cas de multiplicité variable et au plus triple.

2. **Les notations et les hypothèses.** Soient

$$P_k(t,x,\tau,\xi)=\sum_{j=1}^m \sum_{|\alpha|+(m-j)=k} a_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^{m-j} \qquad k=0,1,\cdots,m$$

en sorte que l'on a $P(t,x,D_t,D_x)=\sum_{k=0}^m P_k(t,x,D_t,D_x)$.

Soient, pour un multi-index $\alpha=(\alpha_0,\alpha')\equiv(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ (bien qu'imprécis)

$$D^\alpha_x=D^{\alpha_0}_t D^{\alpha'}_x, \quad \partial^\alpha_\xi=\partial^{\alpha_0}_\tau\partial^{\alpha'}_\xi \quad \left(\partial_\xi=\frac{\partial}{\partial\xi}, \partial_\tau=\frac{\partial}{\partial\tau}\right).$$

Soient, pour une fonction $u(t,x)$ de classe $\mathcal{E}^\infty_t(\mathcal{D}^\infty_{L^2})$,

$$\|u(t)\|=\left(\int_{R^l}|u(t,x)|^2\,dx\right)^{1/2}, \qquad \|u(t)\|_{k,j}=\left(\sum_{\substack{|\alpha'|\leqq k\\ \alpha_0\leqq j}}\|D^\alpha_x u(t)\|^2\right)^{1/2},$$

---

*) Département de Mathématiques.

**) Département de Mathématiques appliquées.

et $|||u(t)|||_{k,j}=\left(\sum_{i=0}^{m-1}\|\partial_t^i u(t)\|^2_{k+m-1-i,j}\right)^{1/2}$ $\left(\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}\right)$.

$C^\infty(\Omega\times R^l_\xi/\{0\})$ désignant la classe de fonctions $f(t,x,\xi)$ non seulement indéfiniment différentiables dans $\Omega\times R^l_\xi/\{0\}$, mais bornées sur $\Omega\times\{|\xi|=1\}$ avec leurs dérivées, nous écrivons, pour deux fonctions f, g de classe $C^\infty(\Omega\times R^l_\xi/\{0\})$, $f=\theta(g)$ s'il existe une troisième fonction h de classe $C^\infty(\Omega\times R^l_\xi/\{0\})$ telle que l'on ait $f(t,x,\xi)=h(t,x,\xi)g(t,x,\xi)$.

Pour la simplicité de l'écriture, nous laisserons tomber les variables: nous écriverons, par exemple, λ_j au lieu de $\lambda_j(t,x,\xi)$.

Nous posons les hypothèses (H) suivantes.

H–1) Le symbole de partie principale de $P(t,x,D_t,D_x)$ se factorise:

$$P_m(t,x,\tau,\xi)\equiv\tau^m-\sum_{j=1}^m\sum_{|\alpha|=j}a_{j\alpha}(t,x)\xi^\alpha\tau^{m-j}=\prod_{i=1}^m(\tau-\lambda_i(t,x,\xi))$$

et les caractéristiques λ_i $(i=1,\cdots,m)$ soient de classe $C^\infty(\Omega\times R^l_\xi/\{0\})$.

H–2) Les λ_i $(i=1,\cdots,m)$ soient réels dans $\Omega\times R^l_\xi/\{0\}$.

H–3) A l'exception des couples (j,k) tels que $k=s+j$ $(j=1,\cdots,2s)$ ou $k=2s+j$ $(j=1,\cdots,s)$, les λ_j et λ_k soient distincts en sens que l'on a

$$\operatorname*{Inf}_{(t,x)\in\Omega,|\xi|=1}|\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)|>0 \qquad (j\neq k).$$

H–4) Pour de tels couples exceptés à H–3), on a les relations:

$$\lambda_j-\lambda_{s+j}=\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\quad \lambda_j-\lambda_{s+j}=\theta(\lambda_{s+j}-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s.$$

Nous introduisons deux opérations sur des fonctions $F=F(t,x,\tau,\xi)$. Soient $\partial^{(0)}_{j(0)}F=F(t,x,\lambda_j(t,x,\xi),\xi)$

et $$\partial^{(\alpha)}_{j(\beta)}F=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}\sum_{\beta^1+\beta^2=\beta}(-1)^{|\alpha^2+\beta^2|}\frac{\alpha!\,\beta!}{\alpha^1!\,\alpha^2!\,\beta^1!\,\beta^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}D_x^{\beta^1}\partial^{(0)}_{j(0)}\partial_\xi^{\alpha^2}D_x^{\beta^2}F.$$

On remarque aisément

$$\partial^{(\alpha)}_{j(\beta)}F=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}(-1)^{|\alpha^2|}\frac{\alpha!}{\alpha^1!\,\alpha^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}\partial^{(0)}_{j(\beta)}\partial_\xi^{\alpha^2}F.$$

Et soit, comme la deuxième opération,

$$\delta^{(\alpha)}_jF=\sum_{\alpha^1+\alpha^2=\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha^1!\,\alpha^2!}\partial_\xi^{\alpha^1}\partial^{(0)}_{j(\alpha)}\partial_\xi^{\alpha^2}F.$$

On a alors $\delta^{(0)}_j=\partial^{(0)}_{j(0)}$, que nous confondons dans la suite. Nous faisons ici les remarques suivantes.

(1) Pour $|\alpha|=|\beta|=1$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\partial^{(\alpha)}_{j(0)}=-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\delta^{(0)}_j\partial_\tau,\qquad \partial^{(0)}_{j(\beta)}=D_x^\beta\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau,\\
&\partial^{(\alpha+\beta)}_{j(0)}=\partial_\xi^{\alpha+\beta}\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau+\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)\delta^{(0)}_j\partial_\tau^2,\\
&\partial^{(\alpha)}_{j(\beta)}=\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\beta\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau^2,\\
&\partial^{(0)}_{j(\alpha+\beta)}=D_x^{\alpha+\beta}\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau+D_x^\alpha\lambda_jD_x^\beta\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau^2.
\end{aligned}$$

(2) $$\sum_{|\alpha|=1}\delta^{(\alpha)}_j=\sum_{|\alpha|=1}(2D_x^\alpha\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\xi^\alpha\partial_\tau-\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau^2+\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\lambda_j\delta^{(0)}_j\partial_\tau),$$

$$\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j^{(\alpha)}=\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi^{\alpha+\beta}\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}+2\partial_\xi^{\alpha}\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi^{\beta}+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\xi^{\alpha+\beta}).$$

3. L'énoncé du théorème. Théorème. *Sous les hypothèses* (H), *si les termes d'ordre inférieur vérifient les trois conditions suivantes* [C_1], [C_2] *et* [C_3], *alors le problème de Cauchy* (C) *est* $\mathcal{E}_t^\infty(\mathcal{D}_{L^2}^\infty)$*-bien posé et comme l'estimation de solution, l'on a, avec de certains constantes positives C et N,*

$$|||u(t)|||_{k,j}^2\leqq C\Big(t^{2N+5}\int_0^t\|f(s)\|_{k+j+4,j+N+4}^2\,ds+|||u(0)|||_{k+3j+2N+14,0}^2$$
$$+\sum_{h=0}^{N+3+j}\|f(0)\|_{k+3j+2N+12-2h,h}^2\Big)\qquad(k,j\geqq 0)$$

où $|||u(0)|||_{h,0}^2=\sum_{i=0}^{m-1}\|\phi_i\|_{m-1-i+h,0}^2$.

[C_1] $\delta_j^{(0)}P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}P_m=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})),\qquad j=1,\cdots,s,$

[C_2] $\delta_j^{(0)}\partial_\tau P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}\partial_\tau P_m+\frac{1}{6}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(0)}\partial_\tau^3 P_m(\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})D_x^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)$
$+\partial_\xi^\alpha(\lambda_{s+j}-\lambda_j)D_x^\alpha\lambda_j)=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s,$

[C_3] $\delta_j^{(0)}P_{m-2}+\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\delta_j^{(\alpha)}P_{m-1}+\frac{1}{4}\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\delta_j^{(\alpha)}P_m$

$$+\frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_{j(0)}^{(\alpha+\beta)}\partial_\tau^2P_mD_x^\alpha\lambda_jD_x^\beta\lambda_j$$
$$+2\partial_{j(\beta)}^{(\alpha)}\partial_\tau^2P_mD_x^\alpha\lambda_j\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)+\partial_{j(\alpha+\beta)}^{(0)}\partial_\tau^2P_m\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j))$$
$$-\frac{1}{2(\lambda_j-\lambda_{2s+j})}\sum_{|\alpha|=1}\Big(\partial_\xi^\alpha\Big(\delta_j^{(0)}P_{m-1}+\frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m\Big)D_x^\alpha\lambda_j+D_x^\alpha\Big(\delta_j^{(0)}P_{m-1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{|\beta|=1}\delta_j^{(\beta)}P_m\Big)\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_{2s+j})\Big)=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\qquad j=1,\cdots,s.$$

A ce théorème, si nous ajoutons une autre hypothèse:

H-5) $D_x^\alpha(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\ \partial_\xi^\alpha(\lambda_j-\lambda_{2s+j})=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})$
où $|\alpha|=1$ et $j=1,\cdots,s$.

alors ces trois conditions se simplifient aux suivantes:

[C_1^0] $\delta_j^{(0)}\Big(P_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\beta D_x^\alpha P_m\Big)=t^{-1}\theta((\lambda_j-\lambda_{s+j})(\lambda_j-\lambda_{2s+j})),\quad j=1,\cdots,s,$

[C_2^0] $\delta_j^{(0)}\Big(\partial_\tau P_{m-1}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\partial_\tau P_m\Big)=t^{-1}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j}),\quad j=1,\cdots,s,$

[C_3^0] $\delta_j^{(0)}\Big(P_{m-2}-\frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=1}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha P_{m-1}+\frac{1}{8}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\partial_\xi^{\alpha+\beta}D_x^{\alpha+\beta}P_m$

$$-\frac{1}{24}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\partial_\xi^{\alpha+\beta}\partial_\tau^2P_mD_x^\alpha\lambda_jD_x^\beta\lambda_j+2\partial_\xi^\alpha D_x^\beta\partial_\tau^2P_mD_x^\alpha\lambda_j\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)$$
$$+D_x^{\alpha+\beta}\partial_\tau^2P_m\partial_\xi^\alpha(\tau-\lambda_j)\partial_\xi^\beta(\tau-\lambda_j)))=t^{-2}\theta(\lambda_j-\lambda_{2s+j})\quad j=1,\cdots,s.$$

La démonstration détaillée du théorème sera donnée dans "Journal of Mathematics of Kyoto University" et ici nous montrons des exemples simples.

Exemple 1. $P(t, x, D_t, D_x) = D_t^3 - (t^{2s}D_x^2 + at^jD_x)D_t - (bt^kD_x^2 + ct^hD_x)$.
Pour cet opérateur, les conditions [C] signifient $k \geqq 2s-1$, $j \geqq s-1$ et $h \geqq s-2$.

Exemple 2. $P(t, x, D_t, D_x) = D_t^3 - (x^{2s}D_x^2 + a_1x^{j_1}D_x + a_2x^{j_2}D_y)D_t - (b_1x^{k_1}D_x^2 + b_2x^{k_2}D_y^2 + c_1x^{h_1}D_x + c_2x^{h_2}D_y)$.
Pour celui-ci, les conditions [C] signifient $k_1 \geqq 2s$, $j_1 \geqq s$, $h_1 \geqq s$ et $a_2 = b_2 = c_2 = 0$.

Remarquons que l'on sait d'ailleurs d'après Ivrii [1] que ces conditions sont aussi nécessaires pour que le problème de Cauchy (C) soit bien posé pour ces opérateurs.

Références

[1] V. Ja. Ivri: The Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations. Soviet Math. Dokl., **12**, 483–486 (1971).
[2] A. Menikoff: The Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Amer. J. Math., **97**(2), 548–558 (1975).
[3] S. Mizohata and Y. Ohya: Sur la condition de E.E. Levi concernant des équations hyperboliques. Publ. RIMS. Kyoto Univ., Ser. A, **4**, 511–526 (1968).
[4] ——: Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples. II. Jap. Math., **40**, 63–104 (1971).
[5] Y. Ohya: On E.E. Levi's functions for hyperbolic equations with triple characteristics. Comm. Pure Appl. Math., **25**, 257–263 (1972).
[6] O. A. Oleinik: On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations. Comm. Pure Appl. Math., **23**, 569–586 (1970).