Une Note sur les Topologies Linéaires

By Mohamed TABAÂ
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Rabat, Maroc
(Communicated by Shokichi IYANAGA, M. J. A., May 12, 1997)

1. Introduction. Dans toute la suite, A désigne un anneau commutatif unitaire intègre, K son corps des fractions, A' sa clôture intégrale, A^* sa quasi-clôture intégrale, $P(A) = \mathrm{Spec}(A) - \{0\}$, $P_1(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de A et $\mathrm{Max}(A)$ l'ensemble de ses idéaux maximaux.

On désigne par τ_A la topologie linéaire sur K qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les idéaux non nuls de A ; si $\mathfrak{p} \in P(A)$, on notera $\tau_\mathfrak{p}$ la topologie $\tau_{A_\mathfrak{p}}$.

Rappelons deux définitions:

a) A est dit *h-semi-local* si, pour tout idéal propre $\mathfrak{a}$ de A, l'anneau $A/\mathfrak{a}$ est semi-local.

b) A est dit *topologiquement prüférien* si, pour tout $\mathfrak{p} \in P(A)$, la topologie $\tau_\mathfrak{p}$ est définie par une valuation de K.

Dans cette Note nous montrons que, si A est topologiquement prüférien h-semi-local, alors:

1) A^* est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension ≤ 1, et l'application $\mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n} \cap A$ de $\mathrm{Max}(A^*) - \{0\}$ dans $P_1(A)$ est bijective; ce résultat généralise le théorème 1.8 de [1] et le corollaire 9 de [6];

2) Toute topologie de corps A-linéaire séparée non discrète sur K, est borne surpérieure de topologies $\tau_\mathfrak{m}$ $(\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A))$.

Comme application de ces deux résultats, nous obtenons une généralisation du théorème 2.14 de [1].

2. Résultats. Si U est une partie de K, on désigne par $\mathfrak{f}_U$ le sous-A-module de K formé des $x \in K$ tel que $xU \subset A$.

Lemme 1. Si τ_A est définie par une valuation de K, alors, pour tout sous-A-module M de K tel que $M \neq K$, on a $\mathfrak{f}_M \neq 0$.

Preuve. Soient V un anneau de valuation de K tel que $\tau_A = \tau_V$, et $x \in K - M$. Montrons que $(\mathfrak{f}_V)^2 \subset x\,\mathfrak{f}_M$; en effet, on a $(\mathfrak{f}_V)VM \subset M$, donc $xV \not\subset (\mathfrak{f}_V)VM$, mais V est un anneau de valuation, donc $(\mathfrak{f}_V)VM \subset xV$; d'où $(\mathfrak{f}_V)^2 M \subset xA$, et par suite $(\mathfrak{f}_V)^2 \subset x\,\mathfrak{f}_M$. Le lemme découle de cette inclusion et du fait que $\mathfrak{f}_V \neq 0$.

Corollaire 1. On suppose τ_A définie par une valuation de K. S'il existe un sous-A-module M de K ouvert pour une topologie d'anneau τ sur K et tel que $M \neq K$, alors τ_A est moins fine que τ.

Preuve. D'après le lemme précédent, il existe $d \neq 0$ tel que $dM \subset A$; le corollaire découle du fait que pour tout $a \neq 0$ l'homothétie $x \rightarrow ax$ est un homéomorphisme de K sur lui-même.

On désigne par $L_r(A)$ (resp. $L_f(A)$) l'ensemble des topologies d'anneau (resp. de corps) A-linéaires séparées non discrètes sur K, et $\mathfrak{R}(A)$ le radical de A.

D'après [2, chap. 6 §5 exer. 1], $\tau_A \in L_r(A)$, et $\tau_A \in L_f(A)$ si et seulement si $\mathfrak{R}(A) \neq 0$.

Le résultat suivant donne une caracterisation (topologique) des anneaux étudiés dans [4].

Proposition 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) τ_A est définie par une valuation de K.

2) $L_r(A)$ est réduit à un seul élément.

3) $\mathfrak{R}(A) \neq 0$ et $L_f(A)$ est réduit à un seul élément.

Preuve. 1)$\Rightarrow$2). Si $\tau \in L_r(A)$, il est clair que τ est moins fine que τ_A et d'après le corollaire précédent τ_A est moins fine que τ, d'où $\tau = \tau_A$.

2)$\Rightarrow$3). Si $A \subset B$ est un sous-anneau local de K tel que $B \neq K$, alors $\tau_A = \tau_B$ donc $\tau_A \in L_f(A)$ et par suite $\mathfrak{R}(A) \neq 0$. La dernière assertion est claire.

3)$\Rightarrow$1). On a $\tau_A \in L_f(A)$, et d'après [2, chap. 6 § 1 n°2 th. 2] il existe un anneau de valuation V de K tel que $A \subset V$ et $V \neq K$, d'où $\tau_A = \tau_V$.

De cette proposition découle immédiatement la proposition 1.5 de [1].

Remarque. Let anneaux vérifiant les propriétés équivalentes de la proposition précédente sont caractérisés dans ([2, chap. 6 §5 exer. 3b)],[9, prop. 1]) pour les anneaux noethériens, et dans [11, chap. 1 prop. 2] pour les anneaux de dimension 1.

La proposition suivante est bien connue (cf. [4]); nous la démontrons directement.

Proposition 2. On suppose que τ_A est définie par une valuation de K. Si $A^* \neq K$, alors A^* est un anneau de valuation de hauteur 1, et la trace sur A de son idéal maximal est le plus petit élément de $P(A)$ ordonné par inclusion.

Preuve. D'après le lemme 1, si $A \subset B$ est un sous-anneau de K tel que $B \neq K$, il existe $d \neq 0$ tel que $dB \subset A$, d'où $B \subset A^*$. Il en résulte, d'une part que A^* est anneau de valuation de hauteur 1 [2, chap. 6 §4 n°5 prop. 6], et d'autre part que si $q \in P(A)$ alors $A_q \subset A^*$, d'où si p est la trace de l'idéal maximal de A^*, on a $p \subset q$.

On désigne par $V_1(A)$ l'ensemble des anneaux de valuation de hauteur 1 de K contenant A.

Si A est topologiquement prüférien, il résulte de la proposition 2 que l'application $V \longrightarrow m_V \cap A$, où m_V est l'idéal maximal de V, de $V_1(A)$ dans $P_1(A)$, est bien définie.

Proposition 3 [1, prop. 1.7]**.** Si A est topologiquement prüférien alors l'application $V \longrightarrow m_V \cap A$ de $V_1(A)$ dans $P_1(A)$ est bijective.

Preuve. D'après le lemme 1 de [10] et la proposition 2, l'application $p \longrightarrow (A_p)^*$ de $P_1(A)$ dans $V_1(A)$, est bien définie; on vérifie facilement que les applications $V \longrightarrow m_V \cap A$, et $p \longrightarrow (A_p)^*$ sont réciproques l'une de l'autre.

Théorème 1. Si A est topologiquement prüférien et h-semi-local, alors:

1) A^* est un anneau de Prüfer de dimension ≤ 1;

2) l'application $n \longrightarrow n \cap A$ est une bijection de $\mathrm{Max}(A^*) - \{0\}$ sur $P_1(A)$.

Preuve. Montrons 1). On suppose $A^* \neq K$. D'après [7, lemma 2.2], on a $A^* = \bigcap_{m \in \mathrm{Max}(A)} (A_m)^*$ car la famille $(A_m)_{m \in \mathrm{Max}(A)}$ satisfait à la condition FC. Si E est l'ensemble des $m \in \mathrm{Max}(A)$ tels que $(A_m)^* \neq K$, alors $A^* = \bigcap_{m \in E} (A_m)^*$. D'après la proposition 2, pour tout $m \in E$, $(A_m)^*$ est un anneau de valuation de hauteur 1, et comme la famille $((A_m)^*)_{m \in E}$ satisfait à la condition FC. A^* est donc un anneau de caractère fini et de type réel. Soit $n \in \mathrm{Max}(A^*)$; d'après [2, chap. 7 §1 exer. 26.d)] $(A^*)_n$ est un anneau de caractère fini et de type réel; donc il est complètement intégralement clos [2, chap. 6 §4 n°5 cor. de la prop. 9]. Mais, en vertu de la proposition 1, τ_n est définie par une valuation de K ; il résulte donc, de la proposition 2 et [2, chap. 6 §4 n°5 prop.6], que $(A^*)_n$ est un anneau de valuation de dimension 1. Donc A^* est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension 1. L'assertion 2 découle de l'assertion précédente et de la proposition 3.

Corollaire 2 [6, cor. 9]**.** Si A est un anneau de Prüfer h-semi-local alors A^* est un anneau de Prüfer de dimension ≤ 1.

Remarques. 1) Posons $A'' = \bigcap_{V \in V_1(A)} V$; dans la démonstration de l'assertion i) du théorème 1.8 de [1], l'auteur utilise le fait que, si A est topologiquement prüférien, h-semi-local et $P_1(A) \neq \emptyset$, alors pour tout $p'' \in P(A'')$ il existe $V \in V_1(A)$ tel que $A''_{p''} \subset V$; ce qui est incorrect, comme le montre l'exemple suivant:

Soient v une valuation d'un corps k dont l'anneau est sans idéal premier de hauteur 1 [5, exemple 19.12], $K = k(X)$, où X est une indéterminée, v_1 l'unique valuation de K prolongeant v, telle que $v_1(X) = 0$, V_1 son anneau et $V_2 = k[X]_{(X)}$. Posons $A = V_1 \cap V_2$. D'après [2, chap. 6 §10 n°1 prop. 2], V_1 est un anneau de valuation sans idéal premier de hauteur 1, et V_2 est un anneau de valuation discrète; notons m_i l'idéal maximal de V_i et posons $p_i = m_i \cap A$. D'après [2, chap. 6 §7 n°1 prop. 1 et 2] A est un anneau de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux p_1, p_2, $P_1(A) = \{p_2\}$, mais il n'existe aucun anneau de valuation de hauteur 1 de K contenant $A_{P_1} = V_1$ [2, chap. 6 §4 n°1 1 prop. 1].

2) La première assertion du théorème précédent entraîne que l'assertion iii) du théorème 1.8 de [1] est valable sans hypothèse supplémentaire.

Corollaire 3. Si A est topologiquement prüférien h-semi-local, alors A est complètement intégralement clos si et seulement si A est un anneau de Prüfer de dimension 1.

Preuve. La condition nécessaire résulte du théorème précédent. La condition suffisante découle de [5, th. 23.4].

La démonstration du théorème 2 utilise le

Lemme 2. Soit a un idéal de A tel que $a \neq A$. Si E est l'ensemble des $m \in \mathrm{Max}(A)$ tels que $a \subset m$, alors $(1 + a)^{-1}A = \bigcap_{m \in E} A_m$.

Preuve. L'inclusion $\subset$ est claire, reste à montrer l'autre; soit donc $x \in \bigcap_{m \in E} A_m$; pour tout $m \in E$ on a $\mathfrak{f}_x \cap A \not\subset m$; donc $a + (\mathfrak{f}_x \cap A) = A$, d'où $1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, avec $\boldsymbol{a} \in a$ et $\boldsymbol{b} \in \mathfrak{f}_x \cap A$, on en déduit que $x = \dfrac{bx}{1-\boldsymbol{a}} \in (1+a)^{-1}A$.

On dira que A *vérifie la propriété* (M) si toute topologie $\tau \in L_f(A)$ est borne supérieure de topologies τ_m $(m \in \operatorname{Max}(A))$.

La démonstration du résultat suivant est une adaptation de celle que nous avons donnée dans [11] pour A de dimension 1.

Théorème 2 [1, th. 1.3]. Si A est topologiquement prüférien h-semi-local alors A vérifie la propriété (M).

Preuve. Soient $\tau \in L_f(A)$ et F l'ensemble des $m \in \operatorname{Max}(A)$ tels que τ_m soit moins fine que τ. Montrons que $\tau = \sup_{m \in F} \tau_m$. Pour cela il suffit de montrer que τ est moins fine que $\sup_{m \in F} \tau_m$. Soit donc M un sous-A-module de K ouvert pour τ. L'application $(x, y) \to xy^{-1}$ de $K \times (K - \{0\})$ dans K est continue en (0,1), donc il existe un sous-A-module N de K ouvert pour τ tel que $N \subset M$, $1 \notin N$ et $N(1+N)^{-1} \subset M$. On pose $a = N \cap A$ et soient $\boldsymbol{a} \in a$, $\boldsymbol{a} \neq 0$ et E l'ensemble des $m \in \operatorname{Max}(A)$ tels que $a \subset m$. On a bien $\boldsymbol{a}(1+a)^{-1}A \subset M$, et d'après le lemme précédent on a $(1+a)^{-1}A = \bigcap_{m \in E} A_m$, d'où $\bigcap_{m \in E} \boldsymbol{a} A_m \subset M$. D'autre part, A est h-semi-local donc E est fini; et pour tout $m \in E$, τ_m est définie par une valuation de K et $1 \notin N_m$, donc, d'après le corollaire 1, τ_m est moins fine que τ. On en déduit que M est ouvert pour la topologie $\sup_{m \in F} \tau_m$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarques. 1) Si on applique le théorème précédent à la topologie linéaire τ^A, définie dans [9], qui admet pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-A-modules de K, de la forme $(1+a)^{-1}a$, où a est un idéal propre de A, on retrouve le lemme 13 de [8].

2) Le théorème précédent et sa réciproque sont énoncés dans [9, th. 2 et prop. 1] pour les anneaux noethériens (cf. aussi [12, chap. 12 th. 5]), et démontrés par l'auteur dans [11, chap. 1 th. 1] pour les anneaux de dimension 1.

3) D'après le corollaire 2.3 de [1], si A vérifie la propriété (M) et la condition (*) définie dans [1], alors il est de dimension 1 (notons qu'en vertu du lemme 1 de [10], si A est de dimension 1 alors il vérifie la condition (*)).

4) A peut vérifier la propriété de la borne supérieure définie dans [1] sans qu'il soit h-semi-local. On prend $A = k[Y] + Xk[X, Y]_{(X)}$, où k est un corps, X et Y sont des indéterminées. $A^* = k[X, Y]_{(X)}$ est un anneau de valuation discrète, et $\mathfrak{f}_{A^*} \neq 0$ donc, en vertu de la proposition 1, $L_f(A)$ est réduit à un seul élément et par suite A vérifie la propriété de la borne supérieure; mais $A/Xk[X, Y]_{(X)} \cong k[Y]$, donc A n'est pas h-semi-local (notons que, d'après l'isomorphisme précédent et la proposition 2, A est de dimension 2).

Lemme 3. Soit B un sur-anneau de A, intègre et tel que B soit une A-algèbre finie. Si A est h-semi-local, il en est de même de B.

Preuve. Soient b un idéal propre de B et $a = b \cap A$; posons $\bar{A} = A/a$, $\bar{B} = B/b$, et désignons par $\varphi : \bar{A} \to \bar{B}$ l'homomorphisme déduit de l'inclusion $A \subset B$ par passage aux quotients et ${}^a\varphi : \operatorname{Spec}(\bar{B}) \to \operatorname{Spec}(\bar{A})$ l'application associée. a est un idéal propre de A et $\bar{B}$ est une $\bar{A}$-algèbre finie. Le lemme découle donc de [2, chap. 5 §2 n°2 prop. 3] puisque, $\bar{A}$ est semi-local et, d'après [2, Chap. 5 §2 n°1 prop. 1], on a $({}^a\varphi)^{-1}(\operatorname{Max}(\bar{A})) = \operatorname{Max}(\bar{B})$.

A est dit *divisé* si $p = pA_p$, pour tout $p \in P(A)$.

La proposition suivante généralise le théorème 2.14 de [1].

Proposition 4. On suppose A h-semi-local, localement divisé et localement cohérent. Si A' est une A-algèbre finie, alors:

1) si $\tau \in L_f(A)$ alors $\tau \in L_f(A')$ et τ vérifie la propriété (M) dans $L_f(A')$;

2) A^* est un anneau de Prüfer h-semi-local de dimension ≤ 1.

Preuve. On a $\mathfrak{f}_{A'} \neq 0$, donc si $(M_\lambda)_\lambda$ est un système fondamental de voisinages de 0 pour τ, formé de sous-A-modules de K, alors $(A'M_\lambda)_\lambda$ est aussi un système fondamental de voisinages de 0 pour τ; d'où la première assertion de 1). D'autre part, d'après le corollaire 3.4 de [3], A' est un anneau de Prüfer, et en vertu du lemme précédent A' est h-semi-local; donc la deuxiéme assertion de 1) découle du théorème précédent, et l'assertion 2) découle du corollaire 2, puisque $A^* = (A')^*$.

Sous les hypothèses de la proposition précédente A ne vérifie pas nécessairement (M).

On prend pour A l'anneau intègre donné dans [2, chap. 5 §3 exer. 5c)]. A est un anneau local noethérien de dimension 1, sa clôture intégrale est une A-algèbre finie ayant deux idéaux maximaux; d'après les propositions 1 et 2, A ne vérifie pas la propriété (M).

Références

[1] D. Abouabdillah: Topologies de corps A-linéaires. Pac. J. Math., **107**, 257–266 (1983).

[2] N. Bourbaki: Algèbre commutative. Masson, Paris (1985).

[3] D. E. Dobbs: Coherence, ascent of going-down, and pseudeo-valuation domains. Houston J. Math., **4**, 551–567 (1978).

[4] D. E. Dobbs and R. Fedder: Conducive domains. J. Algebra, **86**, 494–510 (1984).

[5] R. Gilmer: Multiplicative Ideal Theory. Queen's Papers in Pure and Appl. Math., Queen's University, Toronto (1992).

[6] R. Gilmer and W. Heinzer: On the complete integral closure of an integral domain. J. Aust. Math. Soc., **6**, 351–361 (1966).

[7] W. Heinzer, J. Ohm, and R. Pendleton: On integral domains of the form $\cap R_p, P$ minimal. J. Reine Angew. Math., **241**, 147–159 (1970).

[8] J. Mockor: The completion of Prüfer domains. Proc. Amer. Math. Soc., **221,** 1–10 (1977).

[9] A. Jebli: Corps des fractions et topologies artiniennes. C. R. Acad. Sci. Paris, sér. A, **278**, 973–976 (1974).

[10] P. Ribenboim: Sur une conjecture de Krull en théorie des valuations. Nagoya Math. J., **9**, 87–97 (1955).

[11] M. Tabaâ: Sur une question de compacité linéaire. Thèse de $3^{ème}$ cycle, Rabat (1978).

[12] W. Wieslaw: Topological fields. Wroclaw (1982).