

ENTROPIES ET SPECTRES

LAURENT GUILLOPÉ

(Reçu le 25 Novembre 1992)

Introduction.

L'entropie, mesure des comportements asymptotiques, est un opérateur de distinction des systèmes dynamiques: invariant de conjugaison topologique, elle différencie spectaculairement les décalages de Bernoulli. Pour un système dynamique (action d'un groupe \mathbf{Z} , \mathbf{R} , Γ ou d'un semi-groupe \mathbf{N}) particulier, comment son entropie gouverne la structure orbitable qui la définit? Cette question est confortée par diverses situations où l'entropie, caractérisée apparemment fort vaguement (type de croissance exponentielle d'une fonction de comptage), détermine des éléments rigides (un unique zéro réel d'une fonction analytique).

Le comptage des orbites distinctes, en nombre infini, exige une renormalisation; l'entropie est définie par le type de croissance exponentielle du cardinal d'une orbite tronquée temporellement (pour les actions de \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{R}) ou spatialement (pour une action propre d'un groupe Γ). Le dénombrement peut porter aussi sur les éléments stationnaires (trajectoires périodiques), à supposer qu'il en existe. La suite examine, en mettant en parallèle graphes (compacts) et surfaces (à courbure -1 de géométrie finie), la validité (et leurs raffinements éventuels) de deux énoncés entropiques généraux. Le premier, dû à Patterson [27], Sullivan [33], Coornaert [6], concerne la distribution orbitale d'actions isométriques sur un espace hyperbolique (tel que défini par Gromov [9]):

Théorème 1. *Soit Γ un groupe opérant par isométrie sur l'espace hyperbolique (X, g) , discontinument, de manière cocompacte et avec un ensemble limite infini. Il existe une constante positive h_Γ et, pour x, x' dans X , une constante positive $C_{x,x'}$ telles que*

$$C_{x,x'}^{-1} e^{h_\Gamma R} \leq N_{x,x'}^\Gamma(R) = \#\{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma x')\} \leq R \leq C_{x,x'} e^{h_\Gamma R}.$$

et le second, établi par Bowen [3], porte sur le spectre des périodes de flots hyperboliques:

Théorème 2. Soient $\phi = (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ la restriction à un ensemble basique d'un flot Axiome A sur une variété compacte V et $\mathcal{C}_\phi^{\text{per}}$ l'ensemble de ses trajectoires périodiques primitives C (avec période T_C). Il existe des constantes positives h_ϕ et C_ϕ telles que

$$C_\phi^{-1} e^{h_\phi T} \leq N_\phi^{\text{per}}(T) = \#\{C \in \mathcal{C}_\phi^{\text{per}}, T_C \leq T\} \leq C_\phi e^{h_\phi T}.$$

Ces deux résultats s'appliquent à une variété riemannienne M compacte connexe à courbures sectionnelles strictement négatives: soient $X = (\tilde{M}, \pi)$, le revêtement universel de M , avec métrique qui fait de la projection π une isométrie locale, $\Gamma = \pi_1(M)$ le groupe fondamental de M et ϕ le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $V = T^1M$. Les entiers $N_{x,x'}^{\pi_1(M)}(R)$ et $N_\phi^{\text{per}}(T)$ jouissent en fait d'un asymptotique exact et les entropies $h_{\pi_1(M)}$, h_ϕ coïncident, entropies désignées brièvement par entropie h_M de (la variété riemannienne) M .

Théorème 3. Soit (M, g) une variété compacte de dimension n , connexe, de groupe fondamental $\pi_1(M)$, de revêtement universel riemannien \tilde{M} , à courbures sectionnelles négatives et d'entropie h_M .

(i) [20] Il existe des constantes positives $C_{\tilde{m}, \tilde{m}'}$ ($\tilde{m}, \tilde{m}' \in \tilde{M}$) et C_M telles que

$$N_{\tilde{m}, \tilde{m}'}^{\pi_1(M)}(R) \sim_{R \rightarrow \infty} C_{\tilde{m}, \tilde{m}'} e^{h_M R},$$

$$N_M^{\text{per}}(T) \sim_{T \rightarrow \infty} C_M \frac{e^{h_M T}}{h_M T}.$$

(ii) ([18]) Si, M est à courbure constante $-K^2$, l'entropie h_M vaut $(n-1)K$, $C_{\tilde{m}, \tilde{m}'}$ est indépendant de \tilde{m}, \tilde{m}' de valeur $c_n \text{Vol}(M)^{-1}$ avec $c_n = 2^{1-n} \text{Vol}(S^{n-1}) / (n-1)$ et le facteur C_M est égal à 1. Les asymptotiques précédents voient leur reste précisé:

$$N_{\tilde{m}, \tilde{m}'}^{\pi_1(M)}(R) =_{R \rightarrow \infty} \frac{C_n}{\text{Vol}M} e^{h_M R} (1 + O(e^{-\varepsilon R})),$$

$$N_M^{\text{per}}(T) =_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{h_M T}}{h_M T} (1 + O(e^{-\varepsilon T})),$$

où ε dépend de la plus basse valeur propre non nulle du laplacien riemannien (positif) sur M .

En fait, le premier résultat, dû à Margulis, concerne des flots d'Anosov mélangeants sur une variété compacte (comptage de l'intersection d'une sous-variété compacte transverse au feuilletage stable faible avec la R -translatée d'une sous-variété transverse au feuilletage instable fort, comptage des orbites périodiques), sans précision sur le reste, au contraire du second, issu de formules de trace dites de Selberg: basé sur des méthodes de théorie analytique des nombres, celui-ci provient des singularités de fonctions engendrées par la théorie spectrale du laplacien riemannien Δ_M (noyau et trace de sa résolvante) qui interfèrent avec les spectres des actions du groupe fondamental ou du flot géodésique par des formules de trace (la formule de trace de Selberg).

Les arbres constituent une famille fondamentale dans la théorie des espaces hyperboliques de Gromov: une définition possible de cette classe d'espaces est basée sur la notion de tripode (arbre à trois arêtes); les arbres approchent des parties finies d'un espace hyperbolique; enfin (et avant tout) un arbre est un espace 0-hyperbolique. Bien qu'un arbre T soit une variété singulière, il lui est attaché un fibré unitaire tangent T^1T avec flot géodésique, de même qu'à tout espace compact G qui est localement un arbre, à savoir un graphe. Les théorèmes 1, 2 ont une forme précise pour un graphe et son revêtement arborescent sur lequel opère le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(G)$ (groupe libre à $\dim H_1(G)$ générateurs). Les orbites périodiques du flot géodésique sur T^1G (induit par le flot $\pi_1(G)$ -équivariant sur T^1T) se projettent sur les cycles réduits du graphe (lacets sans aller et retour). Avant de formuler un énoncé précis, il convient d'introduire la propriété de mélange: un graphe ne la possède pas si et seulement si le spectre des longueurs de ses circuits engendre un sous-groupe discret $l_G \mathbf{Z}$ de \mathbf{R} .

Théorème 4. *Soit (G, d) un graphe compact métrique connexe non circulaire (i.e. $\dim H_1(G) > 1$), de revêtement universel T . Soient t, t' dans T .*

(i) *Si G est mélangeant, pour une constante $C_{t,t'}$ convenable,*

$$N_{t,t'}^{\pi_1(G)}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} C_{t,t'} e^{h_G l},$$

$$N_G^{\text{per}}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^{h_G l}}{h_G l}.$$

(ii) *Si G n'est pas mélangeant, pour des constantes $C_{t,t'}^i (i=1, \dots, 4)$ convenables,*

$$N_{t,t'}^{\pi_1(G)}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^4 C_{t,t'}^i e^{h_G l \lfloor (l - l_{t,t'}^i) / l_G \rfloor},$$

$$N_G^{\text{per}}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{h_G l_G}{e^{h_G l_G} - 1} \frac{e^{h_G l_G \lfloor l/l_G \rfloor}}{h_G l} .$$

Il est intéressant de s'attarder sur le cas des graphes: les méthodes employées se retrouvent pour certaines dans d'autres cadres (tel l'opérateur de Perron-Frobenius), de même que les divers points de vue géométrique (où la propriété de liberté du groupe fondamental d'un graphe simplifie certains développements tels la dynamique symbolique). Mais des différences subsistent, obstacles à des développements exactement parallèles. Par exemple, une dissemblance entre les graphes et les variétés riemanniennes a lieu dans l'interprétation de la fonction $N_{x,x'}$, dépendant seulement des projections $\pi(x)$, $\pi(x')$ sur la base X/Γ : pour une variété riemannienne (*resp.* un graphe), elle compte, dans l'ensemble $C_{\pi(x),\pi(x')}$ des géodésiques (*resp.* des chemins) issues de $\pi(x)$ passant par $\pi(x')$ (*resp.* aboutissant à $\pi(x')$), celles de longueur au plus R ; la projection sur une variété riemannienne d'une orbite du flot géodésique est déterminée par tout segment d'intérieur non vide, ce qui n'est pas le cas pour un graphe.

Malgré tout, les acteurs apparaissent clairement: espace hyperbolique X , groupe Γ , bords $\partial\Gamma$, ∂X à l'espace et du groupe, flot géodésique et son codage par une dynamique symbolique, action du groupe sur l'espace et son compactifié, équivalence orbitale de Γ sur ∂X et de l'application de Nielsen, égalités des diverses entropies, spectre d'opérateurs de Perron-Frobenius, spectres périodiques du flot géodésique, de son codage symbolique et de l'application de Nielsen, formule de trace pour la laplacien (différentiel ou combinatoire).

Concernant les surfaces, les notions précédemment énumérées interagissent de manière moins immédiate que dans le cas des graphes. Mais il est nécessaire de considérer cette interaction pour étendre les résultats du théorème 3 valides pour des surfaces compactes à des surfaces qui restent bornées: vis-à-vis du volume riemannien (variété à volume fini, sans être compacte) ou pour l'ensemble non-errant de leur flot géodésique (compacité de l'ensemble récurrent de ce flot) ou combinaison de ces deux limitations (mesure de Liouville finie pour l'ensemble non errant du flot géodésique). Les surfaces M à courbure constante -1 ainsi dégagées sont celles dont le groupe fondamental considéré comme sous-groupe de $PSL_2(\mathbf{R})$ (groupe des isométries positives du plan hyperbolique \mathbf{H}^2 , revêtement universel de M) sont les groupes fuchsien de type fini sans torsion (de première espèce si M est de volume fini, de seconde espèce sinon). Comme les graphes circulaires ont été négligés, les surfaces (dites élémentaires) simplement connexes ou de

groupe fondamental cyclique le seront.

Théorème 5. *Soit M surface à courbure constante -1 de géométrie finie, non élémentaire. Lui est attachée une entropie h_M égale à 1 si et seulement si M est d'aire finie, dans l'intervalle $(0,1)$ sinon. Soient \tilde{m}, \tilde{m}' dans \tilde{M} . Pour une constante $C_{\tilde{m}, \tilde{m}'}$ convenable (indépendante de \tilde{m}, \tilde{m}' si et seulement si M est de volume fini)*

$$N_{\tilde{m}, \tilde{m}'}^{\pi_1(M)}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} C_{\tilde{m}, \tilde{m}'} e^{h_M l},$$

$$N_M^{\text{per}}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^{h_M l}}{h_M l}.$$

Les contributions à ce théorème sont nombreuses: Selberg [31], Huber [14], Margulis [20], Patterson [26], Lax-Phillips [18], Colin de Verdière [5], Lalley [17]... mais aucune approche ne permet pour l'instant d'établir à elle seule l'ensemble des situations. Le biais spectral (formules de trace à la Selberg) traite des cas $h_M > 1/2$ (avec parfois des estimations sur le reste, comme l'énonce le théorème pour M compacte), le biais dynamique symbolique (à travers les fonctions zêta) ceux où l'action du groupe fondamental $\pi_1(M)$ sur \mathbf{H}^2 est convexe cocompacte (avec considération éventuelle des surfaces compactes à courbure variable strictement négative, mais sans estimation du reste).

Ainsi, comme pour les graphes et afin d'utiliser le théorème taubérien de Wiener-Ikehara, sont introduits la transformée de Laplace, associée à la classe $\mathcal{C}_{m, m'}$ de géodésiques joignant m et m' ,

$$L_{m, m'}^M(s) = \sum_{C \in \mathcal{C}_{m, m'}} e^{-s|C|}$$

et le produit (dit fonction zêta de Smale), portant sur le spectre périodique primitif $\mathcal{C}_{\text{prim}}$ du flot géodésique (ensemble des géodésiques fermées primitives de M),

$$\zeta_M(s) = \prod_{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}} (1 - e^{-s|C|})^{-1},$$

somme et produit absolument convergents définissant des fonctions holomorphes sur le demi-plan $\{\Re s > h_M\}$.

Théorème 6. *Soit E notant un graphe G mélangeant ou M une*

surface à courbure constante -1 de géométrie finie non élémentaire, d'entropie h_E .

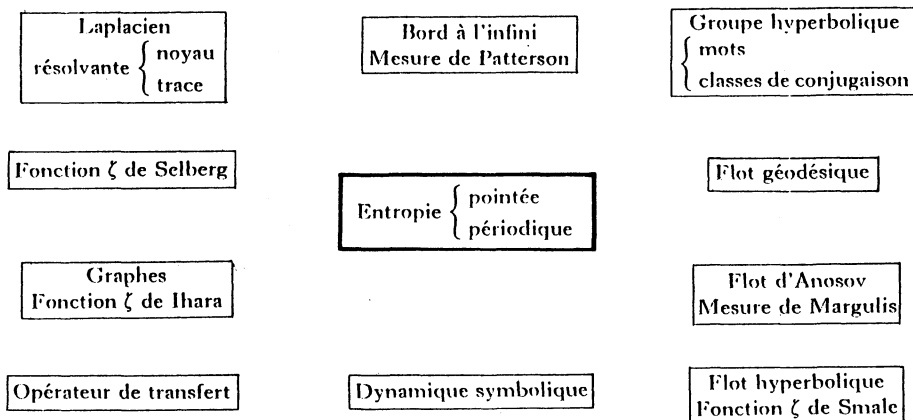
(i) La transformée de Laplace $L_{e,e'}^E$ a un prolongement méromorphe au voisinage du demi-plan $\{\Re s \geq h_E\}$ (à \mathbf{C} pour un graphe) avec pour seul pôle sur la droite $\Re s = h_E$ le point réel h_E (pôle simple de résidu $C_{e,e'}^{\pi_1(E)}$ non nul).

(ii) La fonction ζ_E a un prolongement méromorphe à \mathbf{C} , avec sur $\Re s = h_E$ aucun pôle, excepté h_E (pôle simple).

Si pour les graphes, c'est un opérateur de transfert (à la Perron-Frobenius) qui assure ces méromorphies, c'est pour une surface la théorie spectrale du laplacien riemannien Δ_M qui en est le médiateur, avec description des singularités dans le demi-plan $\{\Re s > 1/2\}$ (et donc sur $\{\Re s \geq h_M\}$ si $h_M > 1/2$). Pour $h_M \leq 1/2$, où l'action du groupe $\pi_1(M)$, libre, est bien codable, le recours (obligé pour l'instant, semble-t-il) à la dynamique symbolique permet de conclure. L'absence de pointe assure que ce codage réalise une équivalence topologique entre l'action de $\pi_1(M)$ sur son ensemble limite et un sous-décalage de type fini, si M a des pointes, cette dynamique symbolique n'a pas été développée jusqu'à pouvoir utiliser les acquis de la théorie de Perron-Frobenius-Ruelle (mis à part l'exception de la surface modulaire -singulière- $PSL_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}^2$ [21]).

La suite commence pas donner une liste de diverses entropies, en montrant la coïncidence de certaines d'entre elles. Puis est traité, avec quelque détail, le cas des graphes; un tel développement, au contenu sans nul doute familier à d'aucuns, se justifie par son absence (aux yeux de l'auteur du moins) dans la littérature et comme utile mise en place des différentes approches à propos des surfaces. La dernière partie est consacrée essentiellement aux surfaces de géométrie finie à courbure constante -1 . Par souci de cohérence, et comme un guide pour le lecteur, certains résultats, d'approche et de généralité variables, tels ceux de Margulis, Patterson, Lalley ont été mentionnés (sans développement complet). Au risque de rallonger le texte, ceci permet de mieux mettre en perspective les points de vue introduits à propos des graphes et d'insister à nouveau sur la coexistence (inévitabile en l'état pour l'analyse de la singularité de Z_M qui importe pour l'asymptotique de N_M^{per}) des approches spectrale et dynamique pour l'étude de la fonction zêta de Selberg attachée à une surface hyperbolique de géométrie finie: son prolongement méromorphe y est démontré en évitant la théorie la diffusion (à laquelle avait recours [12]). En clôture, un appendice rappelle quelques éléments du formalisme thermodynamique dont certains résultats généraux ont été utilisés précédemment.

Bref, certaines arêtes sont tracées, et commentées, entre les sommets du tableau suivant:



Bien des questions restent en suspens: la dimension au moins 3 (notamment pour les variétés hyperboliques réelles de type fini, sans ou avec pointes [28]), l'entropie à homologie fixée ([15]), le prolongement de la fonction zêta de Smale en courbure variable ([29])...

1. Entropies

Soit (X, d) un espace métrique. Un chemin de longueur l est un élément de $\mathcal{C}^0([0, l], X)$, espace des applications continues de $[0, l]$ dans X . Soit \mathcal{C} une classe de chemins et $\mathcal{C}(l)$ celle des chemins de \mathcal{C} de longueur l .

DÉFINITION 1.1. Une famille $\{c\} \subset \mathcal{C}(l)$ telle que les boules $(B(c, \varepsilon))_{\{c\}}$ de $\mathcal{C}^0([0, l], X)$ soient disjointes deux à deux est dite (ε, l) -séparante. L'entropie $h_{\mathcal{C}}$ de la classe \mathcal{C} est définie suivant

$$h_{\mathcal{C}} = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\mathcal{C}}(\varepsilon, l)}{l},$$

où $N_{\mathcal{C}}(\varepsilon, l)$ est le maximum du cardinal des familles (ε, l) -séparantes.

EXEMPLES 1.2.

(α) X est un espace compact de longueur (p. ex. une variété riemannienne, un graphe) et \mathcal{C} est l'ensemble des chemins localement géodésiques. D'après le théorème d'Ascoli, $\mathcal{C}(l)$ est compact dans $\mathcal{C}^0([0, l], X)$: $N_{\mathcal{C}}(\varepsilon, l)$ est fini.

- (β) X porte un flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ et $\mathcal{C}(l)$ est l'ensemble des portions d'orbites $(\varphi([0, l])x)_{x \in X}$. L'entropie ne change pas si la métrique de référence d est remplacée par une métrique équivalente. Le fibré unitaire tangent T^1M d'une variété M sera muni de la distance d_1 définie par $d_1(u, u') = \sup_{t \in [0, 1]} d(\pi_1 \varphi_t u, \pi_1 \varphi_t u')$, $u, u' \in T^1M$ avec d métrique induite sur M par la structure riemannienne, π_1 la projection de T^1M sur M et φ le flot géodésique; l'entropie de ce flot est la même que celle de la famille des chemins géodésiques sur M . À un homéomorphisme φ de T et une application r non négative sur T est associé le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ obtenu par suspension sur $T^{\varphi, r} = (T \times \mathbb{R}_s) / \sim$ (avec la relation \sim équivalent (τ, s) et $(\varphi(\tau), s - r(\tau))$) définie par $\varphi_t((\tau, s)) = (\tau, s + t)$.

L'entropie périodique associée à \mathcal{C} est définie suivant

$$h_{\mathcal{C}}^{\text{per}} = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log \# \mathcal{C}^{\text{per}}(l)}{l},$$

où $\mathcal{C}^{\text{per}}(l)$ est l'ensemble des chemins périodiques \mathcal{C} de longueur au plus égale à l , où deux chemins différant par leur paramétrisation ne sont pas distingués.

EXEMPLES 1.3.

- (α) Pour le flot géodésique, l'entropie périodique concerne la distribution asymptotique du spectre des longueurs des lacets géodésiques lisses de M , projections des orbites périodiques du flot géodésique par la projection π_1 de T^1M sur M .
- (β) Pour la suspension par une fonction constante d'un difféomorphisme φ de T , cette entropie quantifie la distribution des points périodiques de φ .

Une autre variation est obtenue en se restreignant à la classe $\mathcal{C}_{A, B}$ des chemins issus de A passant par B . Ainsi, si M est une variété riemannienne à courbures sectionnelles non positives, la classe $\mathcal{C}_{m, n}(l)$ des chemins géodésiques issus de m , passant par n et de longueur au plus l , correspond biunivoquement aux points de l'orbite $\pi_1(M)\tilde{n}$ dans le revêtement universel \tilde{M} de M dans la boule de rayon l centrée en \tilde{m} (\tilde{m} et \tilde{n} notent des points de \tilde{M} se projetant sur m , n resp.). L'entropie volumique des orbites de $\pi_1(M)$ (pour son action sur \tilde{M}) définie suivant

$$h_{\tilde{m}, \tilde{m}'}^{\pi_1(M)} = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \#\{\gamma \in \pi_1(M), d(\tilde{m}, \gamma \tilde{m}') \leq R\}}{R},$$

apparaît sous le nom d'exposant de Poincaré dans le cadre des groupes fuchsien (ou kleinien), avec des extensions aux actions de semi-groupes ou aux espaces métriques X munis d'un volume Vol_X dont l'expansion asymptotique est mesurée par l'entropie volumique (souvent indépendante de x)

$$h_X^{\text{Vol}}(x) = \limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{\log \text{Vol}_X(B(x, R))}{R}.$$

EXEMPLES 1.4.

- (α) Soit Γ un groupe, engendré par une partie finie S et opérant sur le graphe de Cayley $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ (l'ensemble des sommets est Γ et deux sommets γ, γ' sont joints par une arête si $\gamma\gamma'^{-1}$ est dans S). L'exposant de croissance du groupe Γ est l'entropie $h_{\gamma, \gamma'}^\Gamma$, qu'on peut voir comme l'entropie volumique $h_{\mathcal{G}(\Gamma, S)}^{\text{Vol}}$ où $\mathcal{G}(\Gamma, S)$ est muni de la distance qui confère la distance 1 à chaque arête et volume déterminé par cette distance. Cette entropie peut s'interpréter comme ordre de croissance du volume des boules $l_S^{-1}([0, l])$ déterminées par la fonction de longueur sur le groupe par le système de générateurs S . Si Γ opère sur (X, d) pointé en x_0 , la fonction $l_{x_0}(\gamma) = d(x_0, \gamma x_0)$ est une autre fonction de longueur, pour lequel se pose des problèmes asymptotiques analogues.
- (β) Soit S un semi-groupe de similitudes contractantes dans l'espace euclidien E^n , avec $L(S)$ pour ensemble limite (unique point fixe pour l'action de S sur l'ensemble des compacts de E^n muni de la distance de Hausdorff). Si $E^n \setminus L(S)$ est muni de la distance $\delta_{L(S)}(x, y) = \log(|x - L(S)|/|y - L(S)|) + |x - y|$, l'exposant de Poincaré $h_{x, y}^S$ coïncide avec le taux défini par Lalley [16] suivant

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \log \#\{s \in S, |sx - L(S)| \geq \varepsilon\} / \varepsilon.$$

Lemme 1.5. *Soit M variété compacte à courbures sectionnelles négatives. L'entropie $h_{\tilde{m}, \tilde{m}'}^{\pi_1(M)}$, indépendante de \tilde{m}, \tilde{m}' , coïncide avec l'entropie de la classe des chemins géodésiques de M , l'entropie h_φ du flot géodésique φ sur T^1M et l'entropie volumique h_M^{Vol} de son revêtement universel \tilde{M} .*

Preuve. Grâce à l'inégalité triangulaire

$$d(\tilde{m}_1, \gamma \tilde{m}'_1) \leq d(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) + d(\tilde{m}_2, \gamma \tilde{m}'_2) + d(\tilde{m}'_2, \tilde{m}'_1),$$

est assurée l'indépendance, relativement à (\tilde{m}, \tilde{m}') , de l'entropie $h_{\tilde{m}, \tilde{m}'}$, notée h_P (comme entropie de Poincaré).

Soient m, m' les projections de \tilde{m}, \tilde{m}' sur M , $\mathcal{C}_{m, m'}(\varepsilon, l)$ la classe des géodésiques issues de m , d'extrémité m' et de longueur dans $(l - \varepsilon, l]$ (en correspondance biunivoque avec la partie des $\gamma \in \Gamma$ tels que $d(\tilde{m}, \gamma \tilde{m}') \in (l - \varepsilon, l]$), $\mathcal{F}_{m, m'}(\varepsilon, l)$ la famille de vecteurs de $T_1 M_m$ déterminant ces géodésiques.

Lemme 1.6. *Si 3ε minore le rayon d'injectivité $\text{inj}(M)$ de M , la famille $\mathcal{F}_{m, m'}(\varepsilon, l)$ est $(\varepsilon, l - 1)$ -séparante.*

Preuve. *Ab absurdo*, il existerait u, u' distincts dans $\mathcal{F}_{m, m'}(\varepsilon, l)$ vérifiant $d_1(\varphi_t u_1, \varphi_t u_2) \leq \varepsilon$ sur $[0, l - 1]$. Leurs relèvements dans $T^1 \tilde{M}_{\tilde{m}}$ vérifieraient $d(\tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}, \tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}') \leq \varepsilon$ sur $[0, l]$, et par suite

$$d(\gamma_{u_1} \tilde{m}', \gamma_{u_2} \tilde{m}') \leq d(\gamma_{u_1} \tilde{m}', \tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}_1) + d(\tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}_1, \tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}_2) + d(\tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_t \tilde{u}_2, \gamma_{u_2} \tilde{m}') \leq 3\varepsilon,$$

ce qui contredirait l'hypothèse. \square

Ainsi

$$h_{m, m'}(\varepsilon) = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log \# \mathcal{C}_{m, m'}(\varepsilon, l)}{l} \leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log N(\varepsilon, l)}{l} = h_\varphi(\varepsilon).$$

Pour $\delta > 0$, il existe C_δ tel que $\# \mathcal{C}_{m, m'}(\varepsilon, l) \leq C_\delta e^{(h_{m, m'}(\varepsilon) + \delta)l} \leq C_\delta e^{(h_\varphi(\varepsilon) + \delta)l}$, d'où

$$\# \mathcal{C}_{m, m'}(l) = \sum_{j=0}^{\lfloor l/\varepsilon \rfloor} \# \mathcal{C}_{m, m'}(\varepsilon, l - j\varepsilon) \leq \frac{C_\delta e^{(h_\varphi(\varepsilon) + \delta)l}}{1 - e^{-(h_\varphi(\varepsilon) + \delta)\varepsilon}},$$

puis

$$h_P = h_{m, m'} = \limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log \# \mathcal{C}_{m, m'}(l)}{l} \leq h_\varphi(\varepsilon) + \delta, \quad \delta > 0,$$

soit finalement $h_P \leq h_\varphi$.

Inversement, soit $\varepsilon > 0$, $M_\varepsilon = (m_i)_{i=0}^{\varepsilon}$ une famille ε -recouvrante de M et $\tilde{M}_\varepsilon = (\tilde{m}_i)_{i=0}^{\varepsilon}$ un de ses relèvements à \tilde{M} . Soit $\mathcal{C}(\varepsilon, l)$ une famille de chemins (ε, l) -séparante de cardinal maximal $N(\varepsilon, l)$. Pour c dans $\mathcal{C}(\varepsilon, l)$,

α_c, ω_c notent des indices dans $\{0, \dots, n_\varepsilon\}$ tels que $d(c(0), m_{\alpha_c})$ et $d(c(l), m_{\omega_c})$ soient au plus égal à ε d'une part, γ_c un élément de Γ tel que, pour le relèvement \tilde{c} de c issu de \tilde{m}_{α_c} , $d(\tilde{c}(l), \gamma_c \tilde{m}_{\omega_c}) \leq \varepsilon$ d'autre part. Ainsi, $d(\tilde{m}_{\alpha_c}, \gamma_c \tilde{m}_{\omega_c})$ est au plus $l + 2\varepsilon$ et, d'après la convexité de l'application $s \rightarrow d(\tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_s \tilde{u}, \tilde{\pi}_1 \tilde{\varphi}_s \tilde{v})$, les chemins \tilde{c} et \tilde{c} (joignant \tilde{m}_{α_c} à $\gamma_c \tilde{m}_{\omega_c}$) sont ε -proches. Ainsi, pour $\varepsilon < \text{inj}(M)$, les points $(\gamma_c \tilde{m}_{\omega_c})$ sont distincts lorsque c parcourt les chemins de même origine $m_0 \in M_\varepsilon$, soit

$$N(\varepsilon, l) \leq \sum_{\tilde{n}, \tilde{n}'} N_{\tilde{n}, \tilde{n}'}(l + 2\varepsilon),$$

où \tilde{n}, \tilde{n}' parcourent \tilde{M}_ε . Il existe C_ε tel que $N_{\tilde{n}, \tilde{n}'}(l) \leq C_\varepsilon e^{(h_P + \varepsilon)l}$, d'où il résulte que

$$\limsup_{l \rightarrow \infty} \frac{\log N(\varepsilon, l)}{l} \leq \frac{\log(C_\varepsilon \# M_\varepsilon^2)}{l + 2\varepsilon} + (h_P + \varepsilon) \frac{l + 2\varepsilon}{l},$$

soit $h_\varphi \leq h_P$, ce qui termine la preuve de l'égalité $h_\varphi = h_P$, preuve qui s'inspire de celle de l'égalité $h_\varphi = h_M^{\text{Vol}}$ ([19]). \square

Un énoncé similaire (prouvé ci-après) vaut évidemment pour les graphes (pour lesquels fibré unitaire tangent et flot géodésique sont définis dans la partie suivante):

Lemme 1.7. *Soit G graphe métrique compact. L'entropie $h_{m, m'}^G$ de la classe $\mathcal{C}_{m, m'}$ des chemins de m à m' , indépendante de m et m' , coïncide avec l'entropie de la classe des chemins de G , l'entropie h_φ du flot géodésique φ sur T^1G et l'entropie volumique h_T^{Vol} .*

Que l'entropie des chemins et l'entropie périodique coïncident est moins immédiat: cela résultera des développements suivants pour les graphes et les surfaces; Bowen [3] l'établit pour un flot Axiome A sur une variété compacte.

Enfin les entropies considérées sont finies: il suffit essentiellement de le remarquer pour l'entropie volumique. C'est le cas pour l'espace simplement connexe à courbure constante négative ou nulle et par suite, par le théorème de comparaison de Gunther, pour les espaces simplement connexes à courbure négative pincée; c'est encore vrai pour les graphes combinatoires homogènes et donc, par un théorème de comparaison sans nom, pour les arbres revêtant un graphe compact.

2. Graphes

2.1 Le graphe, l'arbre et le groupe

Soit (G, d) un graphe compact métrique. Un complexe simplicial sous-tend G , avec 0-squelette G_0 (fini) et 1-squelette G_1 , dont chaque arête A , de longueur $l(A)$, porte deux arêtes orientées a et \bar{a} , opposées l'une de l'autre ($\bar{a} = a$) et marquées de leur origine ($\alpha(a)$) et fin ($\omega(a)$) avec $\alpha(\bar{a}) = \omega(a)$; l'ensemble des arêtes orientées sera noté \mathcal{A} . Un graphe métrique est dit combinatoire si deux sommets sont reliés par au plus une arête. Un multigraphe (plusieurs arêtes entre deux sommets) avec éventuellement des boucles (une arête aux extrémités identiques) se ramène à un graphe combinatoire via deux subdivisions barycentriques. Un graphe (combinatoire) est un graphe (combinatoire) métrique où, oubliée, la structure métrique est sans importance: les arêtes ont toutes même longueur L_G . Les lacets géodésiques (parfois désignés comme cycles réduits *i.e.* sans aller et retour) seront brièvement nommés cycles.

Le revêtement universel (T, π) de G est constitué d'un arbre métrique (T, d) localement compact, avec projection $\pi: T \rightarrow G$, arbre sur lequel opère le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(G)$ (libre, non abélien si le graphe a (au moins) deux cycles indépendants, ce que la suite supposera). A_G note un arbre maximal inclus dans G , T_G un de ses relèvements connexes dans T .

Sur T , la fonction de Busemann b_ζ^t (dont les lignes de niveau sont les horosphères centrées) au point ζ de son bord, nulle au point t de T et négative au voisinage de ζ , est définie par $b_\zeta^t(t') = d(t', p) - d(t, p)$ si p est la projection de t' sur le rayon $[t, \zeta]$.

Le théorème 1 est valide ([6]) pour des actions (non nécessairement) libres, discontinues, quasi-convexes-cocompactes, *i.e.* cocompactes en restriction à l'enveloppe de Gromov $Q(T, \Gamma)$ (union des géodésiques à extrémités dans l'ensemble limite de Γ dans ∂T). Le quotient T/Γ est égal au graphe fini $Q(T, \Gamma)/\Gamma$, auquel ont été rattachés des arbres enracinés; l'enveloppe $Q(T, \Gamma)$ est un arbre, support essentiel de la dynamique (non errante) de l'action de Γ sur T . Ainsi, pour ce qui concerne les entropies envisagées ici, le cas des actions libres quasi-convexes-cocompactes sur les arbres se ramène à des actions libres cocompactes. Il n'en est pas de même pour les variétés hyperboliques, comme le développe la partie suivante au sujet des surfaces.

2.2 Le flot géodésique

Le bord ∂T_t de T vu du point t est l'ensemble ∂T_t des rayons géodésiques issus de t *i.e.* chemins déterminés par une isométrie $c: \mathbf{R}^+ \rightarrow T$, espace muni de la distance $d_{\partial T_t}(c, c') = \int_{\mathbf{R}^+} e^{-s} d_T(c(s), c'(s)) ds$. En fait, il y

a un homéomorphisme naturel de ∂T_t sur $\partial T_{t'}$, ce qui définit indépendamment de t le bord ∂T , qui, ajouté à T , le compactifie naturellement.

L'espace T^1T des géodésiques $c: \mathbf{R} \rightarrow T$ muni de la métrique $d_{T^1T}(c, c') = \int_{\mathbf{R}} e^{-|s|} d_T(c(s), c'(s)) ds$ s'identifie à la partie de $T \times \partial T \times \partial T$ des triplets $\xi = (t_\xi, \xi_+, \xi_-)$ avec $\xi_+ \neq \xi_-$ et $t_\xi = c(0)$, $\xi_\pm = \lim_{s \rightarrow \pm \infty} c(s)$. Le flot géodésique est alors donné par l'action de \mathbf{R} de translation sur chaque géodésique c . L'action de Γ sur T , prolongée à T^1T , commute avec le flot géodésique. L'espace T^1T (et sa projection π_1 sur T définie par $\pi_1(c) = c(0)$) joue ainsi le rôle de fibré unitaire tangent pour l'espace singulier T .

Le fibré tangent T^1G est l'espace des géodésiques sur G , sur lequel opère le flot géodésique φ , avec métrique définie par

$$d_1(u, u') = \int_{\mathbf{R}} e^{-|s|} d(\pi_1 \varphi_s u, \pi_1 \varphi_s u') ds.$$

Le fibré T^1G apparaît aussi comme le quotient T^1T/Γ et admet une représentation en termes de dynamique symbolique: les symboles sont à prendre dans G_0 (paramétrant les sections $(T^1G)_{g_0 \in G_0}$ transverses aux orbites du flot) et les suites symboliques $\mathbf{t} = (t_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ (constituant Σ_0) vérifient t_i voisin de t_{i+1} et distinct de t_{i+2} , et ce pour tout i dans \mathbf{Z} . Le décalage τ sur Σ_0 défini par $(\tau(\mathbf{t}))_i = t_{i+1}$ et l'application longueur l par $l(\mathbf{t}) = l(a)$ où a est l'arête joignant t_0 et t_1 permettent d'introduire par suspension l'espace Σ_0^l (cf. appendice).

Lemme 2.1. *L'application $p: T^1T \rightarrow \Sigma_0^l$ qui à c associe la suite $(\pi(t_i))_{i \in \mathbf{Z}}, \lambda$ avec $\lambda = -\sup\{s \leq 0, c(s) \in T_0\}$ et (t_i) la suite ordonnée des sommets de T rencontrés le long de la géodésique c où $t_0 = (-\lambda) \cdot c(0)$, induit, en passant au quotient T^1G , un homéomorphisme de T^1G sur Σ_0^l .*

Preuve. La surjectivité s'établit en décrivant une section s de p : à la suite \mathbf{t} de Σ_0 est associée l'unique suite $\tilde{\mathbf{t}}$ telle que $\pi(\tilde{t}_i) = t_i$ et $\tilde{t}_0 \in \tilde{G}$, qui détermine une unique géodésique \tilde{c} dans T avec $\tilde{c}(0) = \tilde{t}_0$, ce qui amène à poser $s(\mathbf{t}, s) = \tilde{c}(s)$. La $\pi_1(G)$ -équivariance de p , de même que son injectivité et sa continuité, s'établissent aisément. \square

Un autre codage du fibré unitaire tangent T^1G s'avère utile. L'espace des symboles est remplacé par l'espace Σ_1 des suites symboliques $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbf{Z}}$ d'arêtes orientées telles que $\omega(a_i) = \alpha(a_{i+1})$ et $a_i \neq a_{i+1}$. L'application de premier retour est fournie par la longueur de l'arête a_0 . Σ_1 est en fait

déterminé par Σ_0 via la construction générale suivante: au décalage $\Sigma_A(\subset S^Z)$ de type fini déterminé par la matrice 0-1 $A \in \mathbf{R}^{S \times S}$, est associé le décalage basé sur l'alphabet constitué des couples de $S \times S$ légitimes vis à vis de A et comme couples légitimes ceux de la formes $((s, s'), (s', s''))$.

Il est temps d'indiquer la preuve du lemme 1.4:

Preuve. Les entropies $h_{m,m'}^G$ coïncident toutes, comme l'affirme le même argument que pour les variétés du lemme 1.2. D'autre part, l'entropie $h_{m,m'}^G$ (de la classe des chemins joignant m et m') est clairement au plus égale à $h_\mathcal{G}$, entropie de la classe de tous les chemins sur G ; il existe L , ne dépendant que de G , tel que, au chemin c de longueur l soit associable un chemin de longueur au plus $l+L$ d'origine m aboutissant en m' , l'égalité des entropies $h_{m,m'}^G$ et $h_\mathcal{G}$ en résulte.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{C}_\varepsilon(l)$ une famille de chemins (ε, l) -séparante de cardinal maximum. Pour chaque chemin c de $\mathcal{C}_\varepsilon(l)$, il existe $u_c \in T^1G_{c(0)}$ tel que la géodésique $\varphi_{\mathbf{R}}u_c$ porte le chemin c . Pour c, c' distincts dans $\mathcal{C}_\varepsilon(l)$, il existe s_0 dans $[0, l]$, tel que $d(\pi_1\varphi_{s_0}u_c, \pi_1\varphi_{s_0}u_{c'}) = d(c(s_0), c'(s_0)) \geq \varepsilon$, ainsi

$$d_1(\varphi_{s_0}u_c, \varphi_{s_0}u_{c'}) = \int_{\mathbf{R}} e^{-|s|} d(\pi_1\varphi_{s_0+s}u_c, \pi_1\varphi_{s_0+s}u_{c'}) ds \geq \int_{-\varepsilon/4}^{\varepsilon/4} e^{-|s|} \varepsilon/2 ds = \alpha_\varepsilon$$

et la famille $\{u_c, c \in \mathcal{C}_\varepsilon(l)\}$ est (α_ε, l) -séparante. Par suite, $h_\mathcal{G}(\varepsilon) \leq h_\varphi(\alpha_\varepsilon)$ et $h_\mathcal{G} \leq h_\varphi$.

Inversement, soit $\varepsilon > 0$ et $\mathcal{F}_\varepsilon(l)$ une famille (ε, l) -séparante pour le flot géodésique dans T^1G .

Lemme 2.2. Soient $\varepsilon > 0$ et $s_\varepsilon = \log(4 \text{diam } G/\varepsilon)$. Si u, u' de T^1G sont à distance au moins ε , il existe s dans $[-s_\varepsilon, s_\varepsilon]$ tel que $\pi_1\varphi_s u, \pi_1\varphi_s u'$ soient à distance au moins $\varepsilon/6$.

Preuve. Sinon, il adviendrait

$$d_1(u, u') \leq \int_{|s| \leq s_\varepsilon} e^{-|s|} \varepsilon/6 ds + \int_{|s| \geq s_\varepsilon} e^{-|s|} \text{diam } G ds \leq 2\varepsilon/6 + \frac{2 \text{diam } G}{4 \text{diam } G} \varepsilon < \varepsilon,$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse. □

Ainsi, pour tous u, u' , distincts de $\mathcal{F}_\varepsilon(l)$, il existe s dans $[-s_\varepsilon, l+s_\varepsilon]$ tel que $d(\pi_1\varphi_s u, \pi_1\varphi_s u') \geq \varepsilon/6$, ce qui confère à la famille de chemins $(\pi_1\varphi_{[s_\varepsilon, l+s_\varepsilon]}u)_{u \in \mathcal{F}_\varepsilon(l)}$ le caractère $(\varepsilon/6, l+2s_\varepsilon)$ -séparant, il en résulte $h_\varphi \leq h_\mathcal{G}$,

soit finalement l'égalité de h_φ et h_φ . \square

2.3. Entropie des chemins, entropie volumique

L'espace $\mathcal{C}^\mathcal{A}$ est muni de la base canonique, notée $(\delta_a)_{a \in \mathcal{A}}$, notation aussi utilisée pour la base duale, le crochet de dualité étant noté \langle, \rangle . Soit \mathcal{L}_s^l l'opérateur (dit de transfert ou de Ruelle), avec représentation matricielle dans la base $(\delta_a)_{a \in \mathcal{A}}$ dont les coefficients non nuls $\mathcal{L}_s^l(a, a') = e^{-sl(a)}$ correspondent aux couples d'arêtes légitimes pour la représentation symbolique de T^1G . Soit \widehat{G} , éclaté du graphe G défini comme somme topologique disjointe des 1-simplexes (fermés) de G et contenant $G \setminus G_0$ comme sous-espace dense.

Pour m dans \widehat{G} porté par l'arête a , les vecteurs $\chi_m(s)$ (dans $\mathcal{C}^\mathcal{A}$) et $\mu_m(s)$ (dans son dual) définis suivant

$$\begin{aligned}\chi_m(s) &= e^{-sd(m, \omega(a))} \delta_a + e^{-sd(m, \omega(\bar{a}))} \delta_{\bar{a}} \\ \mu_m(s) &= e^{sd(m, \omega(a))} \delta_a + e^{sd(m, \omega(\bar{a}))} \delta_{\bar{a}},\end{aligned}$$

sont continus sur \widehat{G} .

Lemme 2.3. Soit $L_{m, m'}^G(s) = \sum_{C \in \mathcal{C}_{m, m'}} e^{-sl_C}$. Alors, pour $m, m' \in G \setminus G_0$ et $\Re s > h_G$,

$$L_{m, m'}^G(s) = \langle \mu_{m'}(s), (1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1} \chi_m(s) \rangle - e^{sd(m, m')} \langle \mu_{m'}(s), \chi_m(s) \rangle / 2 \operatorname{ch}(sd(m, m')).$$

La fonction $L_{m, m'}^G(s)$ se prolonge méromorphiquement à \mathbb{C} , continûment en m, m' dans G .

Preuve. Un chemin C de $\mathcal{C}_{m, m'}$, contenant au moins un sommet de G en son intérieur, est supporté par l'arc $(a_0 = a$ ou $\bar{a}, a_1, \dots, a_n = a'$ ou $\bar{a}')$ avec $\alpha(a_{i+1}) = \omega(a_i)$, de longueur $l_C = d(m, \omega(a_0)) + l(a_1) + \dots + l(a_n) - d(m', \omega(a_n))$, ainsi la somme $L_{m, m'}^{G, (1)}(s)$ correspondant à des chemins de ce type est égale à

$$\langle \mu_{m'}(s), \sum_{n \geq 1} (\mathcal{L}_s^l)^n \chi_m(s) \rangle = \langle \mu_{m'}(s), \mathcal{L}_s^l (1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1} \chi_m(s) \rangle.$$

L'expression de $L_{m, m'}^G(s)$, prenant en compte les chemins (éventuels) de m à m' ne contenant pas de sommets de G , en résulte, ainsi que son

prolongement méromorphe à \mathbf{C} (continûment en les variables m, m'), dont les singularités sont données par les zéros du déterminant de $1 - \mathcal{L}_s^l$. \square

L'opérateur \mathcal{L}_s^l ($s \in \mathbf{R}$) est de Perron-Frobenius (cf. A.1): son spectre est constitué d'une valeur propre $\beta_G(s)$ positive, simple avec vecteur propre $\chi_G(s)$ à coefficients tous positifs et d'autres valeurs propres de module inférieur à $\beta_G(s)$. La valeur propre $\beta_G(s)$ est analytique en s , strictement décroissante de $+\infty$ à 0 sur \mathbf{R} ; l'unique s_0 tel que $\beta(s_0)=1$ (zéro simple du déterminant $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$) coïncide avec l'entropie h_G du graphe, exposant de Poincaré de Γ opérant sur T ou abscisse de convergence de la série de Dirichlet $L_{m,m}^G(s)$. Le résidu en $s=h_G$ de $(1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1}$ est l'opérateur de rang 1 $\mu_G \otimes \chi_G / \langle \mu_G, l\chi_G \rangle_{|s=h_G}$ avec $(\mu_G(s), \beta_G(s))$ élément propre de l'adjoint de \mathcal{L}_s^l et où la fonction l opère par multiplication coordonnée à coordonnée sur $\mathbf{C}^{\mathcal{A}}$.

DEFINITION 2.4. Un graphe G est dit non mélangeant si les longueurs de ses cycles sont commensurables entre elles. Le plus grand réel positif dont ces longueurs sont des multiples entiers sera noté l_G , la période fondamentale de G .

Lemme 2.5. *Sont équivalents:*

- (i) G est non mélangeant,
- (ii) $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$ a au moins deux zéros sur la droite critique $\{\Re(s) = h_G\}$,
- (iii) il existe $v > 0$ telle que $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$ soit iv -périodique.

Si G est non mélangeant, $2\pi i l_G^{-1}$ est la période de $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$ et l'application $\det(1 - \mathcal{L}_{-\log(z)/l_G}^l)$ n'a pas d'autre zéro sur $\{|z| = e^{-h_G}\}$ que $z = e^{-h_G}$.

Preuve. L'assertion (iii) implique clairement (ii). Supposant (i), pour tout entier N , la trace $\text{tr}(\mathcal{L}_s^l)^N$, égale à la somme $\sum e^{-sl_C}$ sur les cycles C de G contenant N sommets est $2\pi i l_G^{-1}$ -périodique. Il en est donc de même pour $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$ qui a une progression arithmétique de zéros sur $\{\Re s = h_G\}$. Ainsi (ii) et (iii) sont vérifiées.

Supposant (ii), soit $\eta = (\eta_a)_{a \in \mathcal{A}}$ vecteur propre (à coefficients strictement positifs) de $\mathcal{L}_{h_G}^l$, ξ de $\mathcal{L}_{h_G + iv}^l$, tous deux pour la valeur propre 1. Alors $|\xi_a|/\eta_a$ est constant sur \mathcal{A} . Sinon, il existerait a tel que $|\xi_a|/\eta_a = \sup_{b \in \mathcal{A}} |\xi_b|/\eta_b > \inf_{\omega(b) = \alpha(a), a \neq b} |\xi_b|/\eta_b$ et on aurait

$$\frac{|\xi_a|}{\eta_a} = \left| \sum_{\omega(b)=\alpha(a), a \neq \bar{b}} \frac{e^{-(h_G + iv)l(a)} \xi_b}{\eta_a} \right| < \left(\sum_{\omega(b)=\alpha(a), a \neq \bar{b}} \frac{e^{-h_G l(a)} \eta_b}{\eta_a} \right) \frac{|\xi_a|}{\eta_a} = \frac{|\xi_a|}{\eta_a},$$

ce qui ne saurait être. L'égalité

$$\frac{\xi_a}{\eta_a} = \sum_{\omega(b)=\alpha(a), a \neq \bar{b}} \frac{e^{-h_G l(a)} \eta_b}{\eta_a} e^{-ivl(a)} \frac{\xi_b}{\eta_b}$$

exprime ξ_a/η_a comme barycentre de points situés sur le cercle de rayon $|\xi_a|/\eta_a$, ainsi $|\xi_a|/\eta_a e^{-ivl(a)} \xi_b/\eta_b$ pour (a,b) légitime (i.e. $\alpha(a)=\omega(b)$, $a \neq \bar{b}$) et par suite, $e^{-ivlC}=1$ pour tout cycle C , ce qui assure (i) et achève de prouver l'équivalence des trois assertions.

Si G est non mélangeant, avec pour période fondamentale l_G , et ν la période de $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$, il existe une suite finie de cycles (C_j) et d'entiers relatifs (u_j) tels que $\sum u_j l(C_j) = l_G$, il en résulte que $\nu l_G \in 2\pi\mathbb{Z}$ et, $2i\pi l_G^{-1}$ étant une période de $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)$, $\nu = 2\pi/l_G$. □

REMARQUE. Si G non mélangeant a un sommet g_0 de valence 2, il est loisible, sans changer les longueurs des cycles, de modifier les longueurs des arêtes issues de g_0 de telle manière que leurs longueurs ne soient pas commensurables à celles des cycles. Au contraire, si G non mélangeant a tous ses sommets de valence au moins trois, alors toute arête a a une longueur multiple demi-entière de la longueur l_G : soient deux chemins $C = a_1 \cdots a_m$, $D = b_1 \cdots b_n$ avec a_1, b_1 arêtes distinctes issues de $\alpha(a)$ (resp. \bar{a}_m, \bar{b}_n distinctes, issues de $\omega(a)$) différentes de a (resp. \bar{a}). Alors $2l(a)$ est égale à la longueur du cycle $C\bar{D}$ diminuée de celle des cycles aC et aD . Le graphe complet à quatre sommets avec un couple d'arêtes opposées de longueur unité et toutes les autres de longueur moitié fournit un exemple de graphe avec des arêtes de longueur $l_G/2$.

Si G est mélangeant, la famille $(L_{m,m'}^G(s))_{(m,m') \in G^2}$ vérifie les conditions du théorème de Wiener-Ikehara avec paramètres (A.3):

Corollaire 2.6. *Soit G un graphe mélangeant.*

(i) *Pour m, m' dans G ,*

$$N_{m,m'}^G(l) = \#\{l \leq l, C \in \mathcal{C}_{m,m'}\} \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{\langle \mu_G, \chi_m \rangle \langle \mu_m, \chi_G \rangle}{h_G \langle \mu_G, l \chi_G \rangle} \Big|_{s=h_G} e^{h_G l}.$$

(ii) *Pour t dans T ,*

$$\text{Vol}_T(B(t,l)) \sim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \mu_G, \chi_{\pi(t)} \rangle \langle M_G, \chi_G \rangle}{h_G \langle \mu_G, l \chi_G \rangle} \Big|_{s=h_G} e^{h_G t},$$

avec $M_G = \sum_{a \in \mathcal{A}} (e^{h_G l(a)} - 1) / h_G \delta_a$.

REMARQUE. Le vecteur $\sum_{a \in \mathcal{A}} e^{h_G l(a)} \langle \delta_a, \chi_G(h_G) \rangle$ est propre pour l'adjoint de \mathcal{L}_s^l et la valeur propre 1, et donc proportionnel à $\mu_G(h_G)$: la symétrie en (m, m') de $\langle \mu_G, \chi_m \rangle \langle \mu_{m'}, \chi_G \rangle \Big|_{s=h_G}$ est ainsi confirmée.

Preuve. D'après le lemme 2.3, la transformée de Laplace $L_{m,m'}^G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dN_{m,m'}^G(t)$ a pour pôle simple $s = h_G$ avec résidu

$$\langle \mu_G, \chi_m \rangle \langle \mu_{m'}, \chi_G \rangle / \langle \mu_G, l \chi_G \rangle \Big|_{s=h_G}.$$

Via le théorème taubérien (A.2), le (i) en résulte. Quant au (ii), il suffit d'invoquer l'expression $\text{Vol}_{\mathcal{G}}(B(t,l)) = \int_G N_{\pi(t),y}^G(t) dy$ et le calcul de M_G : si $a(g_1)$ est une orientation pour chaque 1-simplexe g_1 de G ,

$$M_G = \sum_{g_1 \in G_1} \int_{g_1} \left(e^{h_G d(y, \omega(a(g_1)))} \delta_{a(g_1)} + e^{h_G d(y, \alpha(a(g_1)))} \delta_{\overline{a(g_1)}} \right) dy. \quad \square$$

Dans le cas non mélangeant le théorème de Wiener-Ikehara est remplacé par la proposition taubérienne A.3:

Corollaire 2.7. *Soit G un graphe non mélangeant.*

(i) *Soient m, m' dans \hat{G} , a_m (resp. $a_{m'}$) une arête orientée portant m (resp. m') et $\mathcal{C}_{m,m'}^{a_m, a_{m'}}$ la classe de chemins $C = m \alpha(a_m) \cdots \omega(a_{m'}) m'$, $l_{a_m, a_{m'}}$ la longueur d'un chemin d'arêtes initiale a_m et terminale $a_{m'}$. Alors, $[l]$ désignant la partie entière de l ,*

$$\#\{l_C \leq l, C \in \mathcal{C}_{m,m'}^{a_m, a_{m'}}\} \sim_{l \rightarrow \infty} C_{m,m'}^{a_m, a_{m'}} e^{h_G l} \lfloor (l - l_{m,m'}^{a_m, a_{m'}}) / l_G \rfloor$$

avec

$$C_{m,m'}^{a_m,a_{m'}} = \frac{\langle \mu_G, \delta_{\bar{a}_m} \rangle \langle \delta_{a_{m'}}, \chi_G \rangle}{\langle \mu_G, l\chi_G \rangle} \Big|_{s=h_G} \frac{e^{-h_G(l_{a_m,a_{m'}} - l(a_{m'}))}}{1 - e^{-h_G l_G}},$$

$$l_{m,m'}^{a_m,a_{m'}} = d(m, \alpha(a_m)) + d(m', \omega(a_{m'})) - l_{a_m,a_{m'}}.$$

(ii) Soient G avec toutes ses arêtes de même longueur l_G et t_0 un sommet de T . Alors

$$\text{Vol}_T(B(t_0, Nl_G + u)) \sim_{N \rightarrow \infty} V_{G,t_0} e^{h_G N l_G} (1 + u(e^{h_G l_G} - 1)), \quad N \in \mathbb{N}, u \in [0, 1),$$

avec

$$V_{G,t_0} = \frac{\langle \mu_G, \chi_{\pi(t_0)} \rangle \langle 1, \chi_G \rangle}{\langle \mu_G, l\chi_G \rangle} \Big|_{s=h_G} \frac{l_G}{1 - e^{-h_G l_G}}.$$

Preuve. Soient $\chi_m^{a_m}(s) = e^{-sd(m, \alpha(a_m))} \delta_{\bar{a}_m}$, $\mu_m^{a_m}(s) = e^{sd(m, \omega(a_m))} \delta_{\bar{a}_m}$. Comme au lemme 2.3, la transformée de Laplace $L_{m,m'}^{G, a_m, a_{m'}(1)}(s)$ associée à la classe des chemins de $\mathcal{C}_{m,m'}^{a_m, a_{m'}}$ contenant au moins un sommet en son intérieur, vérifie

$$L_{m,m'}^{G, a_m, a_{m'}(1)}(s) = \langle \mu_{m'}^{a_{m'}}(s), \mathcal{L}_s^l (1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1} \chi_m^{a_m}(s) \rangle.$$

La fonction $L_{m,m'}^{G, a_m, a_{m'}(1)}(s) \exp[-s(l_{a_m, a_{m'}} - d(m, \alpha(a_m)) - d(m', \omega(a_{m'})))]$ est $2i\pi/l_G$ -périodique, avec pôle simple en $s=h_G$ de résidu $R_{m,m'}^{a_m, a_{m'}}$. Le lemme A.3, portant sur cette fonction en la variable $z=e^{-sl_G}$ fournit l'estimation asymptotique annoncée.

L'assertion (ii) résulte de (i) de la même manière que sous l'hypothèse mélangeante. □

REMARQUE. Pour G non mélangeant, l'asymptotique de $N_{m,m'}^G(l)$ est la somme de quatre contributions, non simplifiable en général. De même pour le calcul du volume de la boule $B(t, l)$ centrée en t , somme d'intégrales du type de celles calculées dans le lemme suivant:

Lemme 2.8. Soit k entier positif, $u \in [0, 1)$ et $I_\alpha(k, u) = \int_0^{k/2} e^{\alpha[\omega+v]} dv$.

Alors $I_\alpha(2l, u) = (e^{\alpha l} - 1)(u + 1/(e^\alpha - 1))$, $I_\alpha(2l + 1, u) = I_\alpha(2l, u) + e^{\alpha l}/2$ si $u \in [0, 1/2]$ et $I_\alpha(2l + 1, u) = I_\alpha(2(l + 1), u - 1/2) + (u - 1/2)e^{\alpha(l+1)} - u$ si $u \in [1/2, 1)$.

2.4 Exposant de Poincaré

Le groupe $\Gamma = \pi_1(G)$ a une présentation à la Schottky. Soit e une

arête de $G \setminus A_G$, qui a deux relèvements $(e+, e-)$ adhérents à T_G dans T . Soit $m_{e_{\pm}}$ le milieu de e_{\pm} et $T_{e_{\pm}}$ l'arbre enraciné en $m_{e_{\pm}}$, ne contenant pas le segment de $m_{e_{\pm}}$ à T_G . Soit $\gamma_{e_{\pm}} \in \Gamma$ transformant e_{\mp} en e_{\pm} . γ_{e_+} et γ_{e_-} sont inverses l'un de l'autre, avec γ_{e_+} transportant $T \setminus T_{e_-}$ sur T_{e_+} . Le groupe Γ est engendré librement par l'ensemble S de ces $\gamma_{e_+}, \gamma_{e_-}$ lorsque e parcourt les arêtes de $G \setminus A_G$ et un domaine fondamental \mathcal{D}_G de T pour l'action de Γ sur T est fourni par T_G auquel ont été rajoutés les segments de T_G à m_{γ} , $\gamma \in S$.

Le bord à l'infini ∂T de T s'identifie au bord $\partial \Gamma$ de Γ , présenté via le système de générateurs S comme l'ensemble des mots infinis $\gamma_1 \gamma_2 \dots$ sur l'alphabet S avec les conditions $\gamma_i \neq \gamma_{i+1}^{-1}$: le point ξ de ∂T correspondant à $\gamma_1 \gamma_2 \dots$ est le rayon $T_{\gamma_1} \cap \bigcap_{i \geq 1} \gamma_1 \dots \gamma_i T_{\gamma_{i+1}}$ et le décalage τ sur $\partial \Gamma$ ($\tau(\gamma_1 \gamma_2 \dots) = \gamma_2 \gamma_3 \dots$) se réalise sur ∂T comme l'application de Nielsen: $F_N \zeta = \gamma^{-1} \zeta$ si ζ est dans l'arbre T_{γ} , application codant l'action de Γ sur ∂T au sens suivant:

Lemme 2.9. *L'action de Γ et F_N sont orbitalement équivalentes, i.e. pour ζ, ζ' dans ∂T , il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que $\zeta = \gamma \zeta'$ si et seulement s'il existe des entiers n, n' tels que $F_N^n \zeta = F_N^{n'} \zeta'$.*

Preuve. D'après la définition de F_N , deux points de ∂T dans la même F_N -orbite sont Γ -conjugués.

Pour la réciproque, il est utile de remarquer que, si le domaine $\varphi \mathcal{D}_G$ intersecte un rayon issu de \mathcal{D}_G et d'extrémité ζ dans ∂T , il existe alors un n tel que la transformation ψ décrivant l'action de F_N^n au voisinage de ζ dans ∂T ramène $\varphi \mathcal{D}_G$ sur \mathcal{D}_G : ψ égale φ^{-1} et $F_N^n(\zeta) = \varphi^{-1} \zeta$. Soient ζ', ζ dans ∂T et γ dans Γ tels que $\zeta = \gamma \zeta'$. Si le rayon $[\mathcal{D}_G, \zeta]$ rencontre $\gamma \mathcal{D}_G$, pour n convenable, $F_N^n \zeta = \gamma^{-1} \zeta = \zeta'$. Si le rayon $[\mathcal{D}_G, \zeta]$ ne rencontre pas $\gamma \mathcal{D}_G$, soit p la projection de ζ sur le segment joignant \mathcal{D}_G à $\gamma \mathcal{D}_G$. Il existe φ dans Γ et n convenable tels que $F_N^n \zeta = \varphi \zeta$ avec p dans $\varphi^{-1} \mathcal{D}_G$. Le domaine $\varphi^{-1} \mathcal{D}_G$ rencontre le rayon $[\gamma \mathcal{D}_G, \zeta]$, ainsi, pour m convenable, $F_N^m(\gamma^{-1} \zeta) = (\gamma^{-1} \varphi^{-1})^{-1} \gamma^{-1} \zeta = \varphi \zeta = F_N^n(\zeta)$, ce qui achève la preuve. \square

Cycles (*resp.* primitifs) C de G et classes de conjugaison $[C]$ (d'éléments primitifs *resp.*) se correspondent biunivoquement. Chaque classe de conjugaison $[\varphi]$ de Γ a un représentant unique (à permutation cyclique près) $\gamma_{[\varphi]} = \gamma_1 \dots \gamma_n$ cycliquement réduit (i.e. $\gamma_1 \neq \gamma_n^{-1}$). Les cycles (*resp.* cycles primitifs) de G se trouvent donc en correspondance biunivoque avec les points périodiques (*resp.* les orbites périodiques) de τ sur $\partial \Gamma$ (ou F_N sur ∂T): si C est primitif, l'axe de la transformation $\gamma_{[C]} = \gamma_1 \dots \gamma_n$ intersecte \mathcal{D}_G suivant le segment $[m_{\gamma_n^{-1}}, m_{\gamma_1}]$ et le segment $[m_{\gamma_1}, \gamma_1 m_{\gamma_2}, \dots, \gamma_1 \dots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}, \gamma_1 \dots \gamma_n m_{\gamma_1}]$ se projette bijectivement sur le cycle C .

Soient $t, t' \in T$ et l'_t la fonction définie sur l'orbite de t' privée de t'

suisant

$$l'_t(\gamma_1 \cdots \gamma_n t') = d(\gamma_1 \cdots \gamma_n t', t) - d(\gamma_2 \cdots \gamma_n t', t)$$

où $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ est une écriture réduite d'un élément non trivial de Γ . Pour simplifier l'exposé (cf. la preuve du lemme suivant) et sans nuire à la généralité du propos, il sera supposé t' dans le domaine \mathcal{D}_G .

Lemme 2.10. *La fonction l'_t , définie sur l'orbite $\Gamma t'$, se prolonge continûment à $\Gamma = \Gamma \cup \partial\Gamma$ et sa restriction à $\partial\Gamma = \partial T$, indépendante de t' est définie par $l_t(\zeta) = -b'_\zeta(\gamma t) = b'_{F_N \zeta}(\gamma^{-1} t)$ si ζ est dans le bord ∂T_γ , $\gamma \in S$.*

Preuve. Une récurrence établit que

$$d(\gamma_1 \cdots \gamma_n t', t) - d(\gamma_2 \cdots \gamma_n t', t) = d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, t) - d(m_{\gamma_2}, t), \quad t' \in \mathcal{D}_G, n \geq 2.$$

Pour $n=2$, les points $t, m_{\gamma_2}, \gamma_2 t'$ sont alignés de même que les points $t, m_{\gamma_1}, \gamma_1 m_{\gamma_2}, \gamma_1 \gamma_2 t'$. Ainsi

$$\begin{aligned} d(\gamma_1 \gamma_2 t', t) - d(\gamma_2 t', t) &= d(\gamma_1 \gamma_2 t', \gamma_1 m_{\gamma_2}) + d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, t) - (d(\gamma_2 t', m_{\gamma_2}) + d(m_{\gamma_2}, t)) \\ &= d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, t) - d(m_{\gamma_2}, t). \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence au cran $n-1$ est appliquée alors à l'expression où m_{γ_n} remplace t' :

$$\begin{aligned} d(\gamma_1 \cdots \gamma_n t', t) - d(\gamma_2 \cdots \gamma_n t', t) &= d(\gamma_1 \cdots \gamma_n t', \gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}) + d(\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}, t) \\ &\quad - (d(\gamma_2 \cdots \gamma_n t', \gamma_2 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_2}) + d(\gamma_2 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}, t)) \\ &= d(\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}, t) - d(\gamma_2 \cdots \gamma_{n-1} m_{\gamma_n}, t). \end{aligned}$$

Ainsi l'_t , définie sur l'orbite $\Gamma t'$ (ensemble de mots finis), se prolonge naturellement au bord $\partial\Gamma$ (ensemble de mots infinis) suivant

$$(2.11) \quad l_t(\gamma_1 \gamma_2 \cdots) = d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, m_{\gamma_1}) + d(m_{\gamma_1}, t) - d(m_{\gamma_2}, t) = d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, t) - d(m_{\gamma_2}, t),$$

expression se réduisant à la formulation du lemme en termes de fonction de Busemann par l'identification des bords ∂T et $\partial\Gamma$. \square

La série de Poincaré associée à t, t' prend la forme

$$L_{t, t'}^G(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\gamma t', t)} = \sum_{n \geq 1} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} e^{-sd(\gamma_1 \cdots \gamma_n t', t)} + e^{-sd(t', t)}$$

$$= \sum_{n \geq 1} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)} e^{-s(l_t'(\gamma_1 \dots \gamma_n t') + \dots + l_t'(\gamma_{n-1} \gamma_n t') + d(\gamma_n t', t))} + e^{-sd(t', t)}.$$

Soit pour $\gamma \in S$ le point à l'infini $\gamma_\infty = \gamma \gamma \dots$ de T_γ . Si au mot fini $\gamma_1 \gamma_n$ avec $\gamma_n = \gamma$ est associé le point à l'infini $\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \gamma_\infty$, l'expression précédente se réécrit

$$\begin{aligned} L_{t,t'}^G(s) &= \sum_{\gamma \in S} \sum_{n \geq 1} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})} e^{-s(l_t(\gamma_1 \dots \gamma_{n-1} \gamma_\infty) + \dots + l_t(\gamma_{n-1} \gamma_\infty) + d(\gamma t', t))} + e^{-sd(t', t)} \\ &= \sum_{\gamma \in S} \left[\sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{\zeta \in \partial T \\ \tau^{n-1} \zeta = \gamma_\infty}} e^{-s l_t^{(n-1)}(\zeta)} \right] e^{-sd(\gamma t', t)} + e^{-sd(t', t)} \\ &= \sum_{\gamma \in S} (1 - \mathcal{L}_s^{l_t})^{-1}(\mathbf{1})(\gamma_\infty) e^{-sd(\gamma t', t)} + e^{-sd(t', t)} \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}_s^{l_t}$ est l'opérateur de transfert défini sur $\mathcal{C}(\partial T)$ par

$$(\mathcal{L}_s^{l_t} \varphi)(\xi) = \sum_{\tau \zeta = \xi} e^{-s l_t(\zeta)} \varphi(\zeta),$$

$\mathbf{1}$ la fonction constante égale à 1 et $l_t^{(k)}(\zeta) = \sum_{j=1}^k l_t(\tau^{j-1} \zeta)$.

Lemme 2.12. *l_t est mélangeant si et seulement si G l'est.*

Preuve. Soit $\zeta = \gamma_1 \dots \gamma_n \gamma_1 \dots$ un point n -périodique primitif du décalage τ . Alors la longueur

$$l_t^{(n)}(\zeta) = d(\gamma_1 m_{\gamma_2}, m_{\gamma_1}) + d(\gamma_2 m_{\gamma_3}, m_{\gamma_2}) \dots + d(\gamma_n m_{\gamma_1}, m_{\gamma_n})$$

coïncide avec la longueur du cycle primitif associé à ζ . Ainsi, l_t et G sont simultanément mélangeants (d'après ce qui est rappelé dans l'appendice). \square

L'opérateur de transfert $\mathcal{L}_s^{l_t}$ laisse invariant le sous-espace (de dimension finie) $\mathcal{C}_2(\partial T)$ des fonctions constantes sur chacun des bords des arbres $T_\gamma \cap \gamma T_\varphi$, $\gamma, \varphi \in S$ (i.e. ne dépend que des deux premières coordonnées de $\zeta = \gamma_1 \gamma_2 \dots$). L'élément propre de Perron-Frobenius (i.e. sa valeur propre positive de module maximum, avec vecteur propre) de

l'opérateur $\mathcal{L}_s^{l_t}$ coïncide avec celui de sa restriction à $\mathcal{C}_2(\partial T)$.

Le s (qui ne dépend pas de t , vu que l_t est cohomologue à l_T d'après (2.11)) tel que 1 soit la valeur propre de Perron-Frobenius de $\mathcal{L}_s^{l_t}$, coïncide avec l'entropie h_G déjà introduite. Soit $\chi_G^t \in \mathcal{C}_2(\partial T)$ une fonction propre de $\mathcal{L}_{h_G}^{l_t}$ et μ_G^t une mesure propre (mesure sur $\mathcal{C}(\partial T)$) de l'opérateur dual de $\mathcal{L}_{h_G}^{l_t}$ pour la valeur propre 1. D'après le théorème de Perron-Frobenius-Ruelle, il est loisible de prendre $\chi_G^t > 0$ et μ_G^t normalisée comme mesure de probabilité, mesure nommée alors mesure d'équilibre.

La restriction de la mesure μ_G^t à $\mathcal{C}_2(\partial T)$ est la forme linéaire (vecteur propre de Perron-Frobenius de l'opérateur dual de la restriction de $\mathcal{L}_{h_G}^{l_t}$ à $\mathcal{C}_2(\partial T)$) qui importe pour obtenir la nouvelle formulation du corollaire 2.5 (i):

Corolaire 2.13. *Si G est mélangeant,*

$$\#\{\gamma \in \Gamma, d(\gamma t', t) \leq l\} \sim_{l \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{\gamma \in S} e^{-h_G d(\gamma t', t)} \chi_G^t(\gamma_\infty)}{h_G \langle \mu_G^t, l_t \chi_G^t \rangle} e^{h_G l}.$$

Quant à elle, la mesure μ_G^t sur le bord ∂T est la cheville ouvrière du théorème 1 ([6]).

Proposition 2.14. *Sur ∂T coïncident les trois mesures de probabilité suivantes:*

- la mesure de Hausdorff h_G -dimensionnelle pour la métrique visuelle de source t ,
- la mesure de Patterson $\mu_P^t = \lim_{s \rightarrow h^+} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(t, \gamma t)} \delta_{\gamma t} / L_{\pi(t), \pi(t)}^G(s)$,
- la mesure d'équilibre μ_G^t .

Preuve. La métrique visuelle d_t sur ∂T de source t est définie par $d_t(\zeta, \zeta') = e^{-d(p, t)}$ où p est la projection de t sur la géodésique (ζ, ζ') . Le jacobien $j_t(f)(\zeta)$ (s'il existe) d'une fonction f définie au voisinage d'un point ζ de ∂T est défini suivant $j_t(f)(\zeta) = \lim_{\zeta', \zeta'' \rightarrow \zeta} d_t(f(\zeta'), f(\zeta'')) / d_t(\zeta', \zeta'')$; en particulier, tout γ dans Γ opérant sur ∂T a un jacobien (localement constant) $j_t(\gamma)$ valant $j_t(\gamma)(\zeta) = e^{-b_\zeta^t(\gamma^{-1}t)}$.

D'après Coornaert [6], les mesures de Patterson et de Hausdorff h_G -dimensionnelle coïncident, caractérisées comme unique mesure de probabilité h_G -conforme: $\gamma^* \mu = j_t(\gamma)^{h_G} \mu, \gamma \in \Gamma$. Il suffit donc de montrer que μ_G^t est h_G -conforme.

Soit A ouvert de ∂T ne rencontrant pas $\partial T_{\sigma^{-1}}$, $\sigma \in S$. D'après

l'invariance de μ_G^t par l'adjoint de $\mathcal{L}_{h_G}^t$, l'égalité $\mu_G^t(\sigma A) = \int_A j_t(\sigma)^{h_G} d\mu_G^t$ résulte de

$$\mathcal{L}_{h_G}^t(\mathbf{1}_{\sigma A})(\zeta) = \sum_{F_N(\xi)=\zeta} e^{-h_G l_t(\xi)} \mathbf{1}_{\sigma A}(\xi) = e^{-h_G h_\zeta^t(\sigma^{-1})} \mathbf{1}_A(\zeta) = (j_t(\sigma)^{h_G} \mathbf{1}_A)(\zeta).$$

Soit γ dans Γ , ζ un point dans ∂T . D'après le lemme 2.9 (et sa preuve), il existe un voisinage ouvert A de ζ , des suites (légitimes sur l'alphabet S) $(\sigma_i)_{i=1}^m$, $(\tau_j)_{j=1}^n$ telles que $F_N^m(A) = \sigma_1 \cdots \sigma_m A = \tau_1 \cdots \tau_n \gamma A = F_N^n(\gamma A)$, $\sigma_1 \cdots \sigma_m = \tau_1 \cdots \tau_n \gamma$ et les restrictions $j_t(\xi)|_B$ ($\xi \in \Gamma^-$, $B \subset \partial T$) considérées cidessous sont constantes. Il vient donc

$$\begin{aligned} \mu_G^t(\sigma_1 \cdots \sigma_m A) &= j_t(\sigma_1)^{h_G}|_{\sigma_2 \cdots \sigma_m A} \cdots j_t(\sigma_m)^{h_G}|_A \mu_G^t(A) \\ &= j_t(\tau_1)^{h_G}|_{\tau_2 \cdots \tau_n \gamma A} \cdots j_t(\tau_n)^{h_G}|_{\gamma A} \mu_G^t(\gamma A) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \mu_G^t(\gamma A) &= j_t(\tau_n^{-1})^{h_G}|_{\tau_n \gamma A} \cdots j_t(\tau_1^{-1})^{h_G}|_{\tau_1 \cdots \tau_n \gamma A} j_t(\sigma_1)^{h_G}|_{\sigma_2 \cdots \sigma_m A} \cdots j_t(\sigma_m)^{h_G}|_A \mu_G^t(A) \\ &= j_t(\gamma)^{h_G} \mu_G^t(A) \end{aligned}$$

ce qui exprime la h_G -conformité de la mesure μ_G^t . □

2.5 Entropie périodique

Proposition 2.15. *Soit $\mathcal{C}_{\text{prim}}$ l'ensemble des cycles primitifs de G . La fonction ζ_G (dite de Ihara-Serre) définie, pour $\Re s > h_G$, par $\zeta_G(s) = \prod_{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}} (1 - e^{-sl_C})^{-1}$, vérifie*

$$\zeta_G(s) = \det(1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1} = \det(1 - \mathcal{L}_s^l|_{\mathcal{C}_2(\partial T)})^{-1}.$$

Preuve. Si C est un cycle de longueur l_C avec n_C arêtes, le cycle primitif C_0 supportant C a pour longueur $l_{C_0} = n_C l_C / n_C$. Soit \mathcal{C} (resp. $\mathcal{C}(n)$) l'ensemble des cycles de G (cycles avec n arêtes). La dérivée logarithmique de $\zeta_G(s)$ est

$$\frac{\zeta'_G(s)}{\zeta_G(s)} = \sum_{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}} \frac{l_C e^{-sl_C}}{1 - e^{-sl_C}} = \sum_{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}} \sum_{k \geq 0} l_C e^{-s(k+1)l_C} = \sum_{C \in \mathcal{C}} l_{C_0} e^{-sl_C},$$

alors que celle de $\det(1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1} = \exp \operatorname{tr} \log(1 - \mathcal{L}_s^l)^{-1}$ vaut

$$\partial_s \sum_{n \geq 1} \text{tr}(\mathcal{L}_s^l)^n / n = \partial_s \sum_{n \geq 1} \sum_{(C,a) \in \mathcal{C}(n)} \frac{e^{-sl_C}}{n} = \sum_{C \in \mathcal{C}} \frac{n_{C_0}}{n_C} l_C e^{-sl_C},$$

où l'avant-dernière somme, portant sur les cycles $C \in \mathcal{C}(n)$ parcourus à partie d'une arête a de C_0 , compte n_{C_0} fois chaque cycle C et celle de $\det(1 - \mathcal{L}_{s|\mathcal{C}_2(\partial T)}^l)^{-1}$

$$\partial_s \sum_{n \geq 1} \text{tr}(\mathcal{L}_{s|\mathcal{C}_2(\partial T)}^l)^n / n = \partial_s \sum_{n \geq 1} \sum_{\zeta \in \text{Fix}(F_N^n)} \frac{e^{-sl_t^{(n)}(\zeta)}}{n},$$

où $\text{Fix}(F_N^n)$ est l'ensemble des points périodiques avec période n de F_N correspondant aux cycles de G . □

Corollaire 2.16. *Si G est mélangeant,*

$$\#\{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}, l_C \leq l\} \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^{h_G l}}{h_G l}.$$

Si G est non mélangeant,

$$\#\{C \in \mathcal{C}_{\text{prim}}, l_C \leq l\} \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{h_G l_G}{e^{h_G l_G} - 1} \frac{e^{h_G l_G \lfloor l/l_G \rfloor}}{h_G l}.$$

2.6 Laplacien combinatoire

Bass a établi une relation entre le laplacien (combinatoire) d'un graphe combinatoire G et son opérateur de transfert $T^B = \mathcal{L}_s^l / e^{-sLG}$, donnant une écriture de la fonction ζ_G en termes de laplacien; une expression de la série de Poincaré $L_{g,g'}^G(z)$ pour g et g' dans G_0 est exhibée ici pareillement.

Soient les espaces \mathbf{C}^{G_0} et $\mathbf{C}^{\mathcal{A}}$ munis des bases canoniques (orthonormées) $(\delta_s)_{s \in G_0}$ et $(\delta_a)_{a \in \mathcal{A}}$, j l'opérateur d'inversion d'orientation sur $\mathbf{C}^{\mathcal{A}}$ ($j\delta_a = \delta_{\bar{a}}$) et $\alpha \in \text{End}(\mathbf{C}^{G_0}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$ le pointage à l'origine ($\alpha(\delta_a) = \delta_{\alpha(a)}$).

Le laplacien combinatoire Δ (positif, annihilant les fonctions constantes) est égal à $\Delta = 1 + q - \delta = (\alpha - \alpha j)^t (\alpha - \alpha j) / 2$ avec $q + 1 = \alpha^t \alpha$, opérateur de valence et $\delta = \alpha j^t \alpha$, somme sur les voisins. Soit $\Delta(z) = 1 + qz^2 - \delta z$.

Proposition 2.17 ([2]). *Soit $A(z) = \begin{pmatrix} 1 - z^2 & \alpha z - \alpha j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B(z) =$*

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha j - \alpha z \\ \alpha z & 1 - z^2 \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$A(z)B(z) = \begin{pmatrix} \Delta z & 0 \\ \alpha z & 1 - z^2 \end{pmatrix}, \quad B(z)A(z) = \begin{pmatrix} 1 - z^2 & 0 \\ \alpha z(1 - z^2) & (1 - zT^B)(1 - jz) \end{pmatrix}.$$

Preuve. Si $\partial(z) = \alpha z - \alpha j$ et $e(z) = \alpha z$, la proposition résulte des identités

$$\begin{aligned} \partial(z)e(z) &= (q+1)z^2 - \delta z \\ e(z)\partial(z) &= z^2(T^B j + 1) - z(T^B + j). \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 2.18. (i) Soient g, g' sommets de G . Confondant $L_{g,g'}^G(s)$ et $L_{g,g'}^G(z)$ pour $z = e^{-sL_G}$,

$$L_{g,g'}^G(z) = (1 - z^2)\Delta(z)^{-1}(g, g').$$

(ii) ([2]) Soit $\chi(G) = \#G_0 - \#G_1$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de G . Confondant $\zeta_G(s)$ et $\zeta_G(z)$ pour $z = e^{-sL_G}$,

$$\zeta_G(z) = (1 - z^2)^{\chi(G)} \det \Delta(z)^{-1}.$$

Preuve. Soient a arête d'origine g, a' d'origine g', a' de même support que a si $d(g, g') \leq 1, \chi_a(z) = z\delta_a + \delta_{\bar{a}}$ et $\mu_a(z) = z^{-1}\delta_a + \delta_{\bar{a}}$ a' . D'après le lemme 2.3, avec $r_{g,g'}$ nul si $d(g, g') > 1$, valant $z^{-d(g,g')}$ sinon,

$$\begin{aligned} L_{g,g'}^G(z) + r_{g,g'} &= \langle \mu_{a'}(z), (1 - zT^B)^{-1} \chi_a(z) \rangle \\ &= \langle (1 - jz)\mu_{a'}(z), (B(z)A(z))^{-1} \chi_a(z) \rangle \\ &= \langle {}^t A(z)^{-1} (1 - jz)\mu_{a'}(z), (A(z)B(z))^{-1} A(z)\chi_a(z) \rangle. \end{aligned}$$

Les identités

$$\begin{aligned} A(z)\chi_a(z) &= (z^2 - 1)\delta_{\alpha(a)} + z\delta_a + \delta_{\bar{a}}, \\ {}^t A(z)^{-1} (1 - jz)\mu_{a'}(z) &= z^{-1}(1 - z^2)\delta_{a'}, \end{aligned}$$

donnent

$$L_{g,g'}^G(z)r_{g,g'} = -\langle \alpha\delta_{a'}, \Delta(z)^{-1}(z^2 - 1)\delta_{\alpha(a)} \rangle + z^{-1}\langle \delta_{a'}, z\delta_a + \delta_{\bar{a}} \rangle,$$

ce qui est la formule annoncée.

En fait, un calcul simple assure que le noyau $(z^{d(g,g')/LG}/(1-z^2))_{g,g' \in T_0}$ est celui de l'inverse du laplacien $\Delta(z)$ opérant sur C^{T_0} , dont est déduit celui de $\Delta(z)^{-1}$ sur C^{G_0} par moyennisation sur Γ .

L'égalité des déterminants de $A(z)B(z)$ et $B(z)A(z)$ donne l'expression de $\zeta_G(z) = \det(1 - zT^B)^{-1}$, moyennant l'égalité $\det(1 - jz) = (1 - z^2)^{\#\mathcal{A}/2}$ avec $\#\mathcal{A} = 2\#G_1$.

3. Surfaces

3.1 Entropie des chemins, entropie volumique

3.1.A. Courbure constante (surfaces de géométrie finie).

Soit M surface orientable sans bord à courbure constante -1 , quotient du plan hyperbolique H^2 par l'action d'un groupe fuchsien Γ . Si Γ est de type fini, M est égale à l'union d'un nombre fini (e) d'entonnoirs (demi-cylindres hyperboliques à bord circulaire totalement géodésique) recollés à une surface d'aire finie à bord totalement géodésique avec un nombre fini (p) de pointes, dite région de Nielsen. La surface est d'aire finie si et seulement si $e=0$; l'ensemble non errant du flot géodésique est compact si et seulement si $p=0$.

Le bord à l'infini ∂H^2 du plan H^2 est topologiquement un cercle. Si ζ est dans ∂H^2 et m dans H^2 , la fonction de Busemann (dont les lignes de niveau sont des horocycles centrés) au point ζ , nulle en m et négative au voisinage de ζ , sera notée b_ζ^m .

Soit $h_\Gamma = h_M$ l'exposant de Poincaré de Γ (et de M), abscisse de convergence (indépendante des points m, m' de M) de la série de Poincaré $L_{m,m'}^M(s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(m, \gamma \tilde{m}')$, où \tilde{m}, \tilde{m}' relèvent m, m' dans H^2 . D'après [34], l'entropie mesurée du flot géodésique relativement à la mesure sur T^1M induite par celle de Patterson $\tilde{\mu}_m$ (cf. preuve du lemme 3.4) coïncide avec cet exposant, si M n'a pas de pointes, c'est aussi l'entropie topologique de la restriction du flot géodésique à sa partie (compacte) non errante: si M est compacte, ces entropies coïncident avec celles introduites dans la première partie.

Soit Δ_{H^2} (resp. Δ_M) le laplacien riemannien sur H^2 (resp. M).

Lemme 3.1. *Soient m et m' deux points de M . Série de Poincaré et noyau de résolvante sont reliés suivant*

$$L_{m,m'}^M(s) = 2^{2(1-s)} \pi \Gamma(2s) / \Gamma(s)^2 (\Delta_M - s(1-s))^{-1}(m, m') + r(m, m', s), \quad \Re s > 1,$$

avec le reste $r(m, m', s)$ holomorphe sur $\{\Re s > h_M/2\}$.

Preuve. Le noyau de la résolvante $(\Delta_M - s(1-s))^{-1}$ s'obtient à partir de celui de $(\Delta_{\mathbf{H}^2} - s(1-s))^{-1}$ par moyennisation sur Γ : si \tilde{m}, \tilde{m}' sont des relevés de m, m' dans \mathbf{H}^2 ,

$$(\Delta_M - s(1-s))^{-1}(m, m') = \sum_{\gamma \in \Gamma} (\Delta_{\mathbf{H}^2} - s(1-s))^{-1}(\tilde{m}, \gamma \tilde{m}'),$$

avec comme expression explicite

$$(\Delta_{\mathbf{H}^2} - s(1-s))^{-1}(\tilde{m}, \tilde{m}') = (4\pi)^{-1} \int_0^1 (t(1-t))^{s-1} (t + \sigma(\tilde{m}, \tilde{m}'))^{-s} dt,$$

où $\sigma(\tilde{m}, \tilde{m}') = \text{sh}^2(d(\tilde{m}, \tilde{m}')/2)$. Le lemme résulte alors d'un développement limité pour $\sigma \sim +\infty$. \square

Les singularités de la série de Poincaré sont ainsi reliées à celles du noyau de la résolvante, et ainsi à la théorie spectrale du laplacien Δ_M résumée dans la proposition suivante:

Proposition 3.2. *Soit Γ fuchsien sans torsion de type fini, σ_M le spectre du laplacien Δ_M sur $M = \mathbf{H}^2/\Gamma$.*

- (i) *Si M est compacte, σ_M est discret, s'accumulant en $+\infty$.*
- (ii) *Si M est non compacte de volume fini, σ_M a une composante continue égale à $[1/4, +\infty)$ de multiplicité égale au nombre de pointes de M et une composante de valeurs propres, contenant 0 (valeur propre simple), discrète, ne pouvant s'accumuler qu'en $+\infty$.*
- (iii) *Si M est d'aire infinie, σ_M a une composante continue égale à $[1/4, +\infty]$ de multiplicité infinie et une partie discrète finie de valeurs propres dans $(0, 1/4)$, non vide si et seulement si $h_M > 1/2$ (auquel cas le bas du spectre est $h_M(1-h_M)$, valeur propre simple avec fonction propre positive). Si M a une pointe, Δ_M a une valeur propre (i.e. $h_M > 1/2$).*

L'application du théorème taubérein de Wiener–Ikehara fournit de suite l'estimation:

Corollaire 3.3. *Soit Γ fuchsien de type fini sans torsion, $M = \mathbf{H}^2/\Gamma$, avec $h_M > 1/2$. Soit Φ_M la fonction propre positive normée dans $L^2(M)$ de valeur propre $h_M(1-h_M)$.*

$$N_{m, m'}^\Gamma(l) \sim_{l \rightarrow +\infty} \frac{2^{2(1-h_M)} \pi \Gamma(2h_M)}{2h_M - 1 \Gamma(h_M)^2} \Phi_M(m) \Phi_M(m') e^{h_M l}.$$

Le cas $h_M \leq 1/2$ (qui ne survient que pour des $\pi_1(M)$ de seconde espèce sans élément parabolique) n'est pas susceptible du traitement spectral précédent: la singularité $s=h_M$ de la série de Poincaré est au delà de la droite critique $\{\Re s=1/2\}$ (pour le noyau résolvant $(\Delta_M - s(1-s))^{-1}(\tilde{m}, \tilde{m})$), dont le franchissement équivaut dans le plan spectral $\{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda = s(1-s)\}$ à une traversée du spectre continu $[1/4, +\infty)$ vers le second feuillet (dit feuillet non physique) de la surface de Riemann, revêtement ramifié de degré 2, associé à la fonction $s=1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda}$.

Patterson (resp. Lalley), en étudiant la dynamique du flot géodésique (resp. l'action du groupe Γ) obtiennent cet asymptotique:

Proposition 3.4 ([26],[17]). *Soit Γ fuchsien de seconde espèce non élémentaire avec $h_\Gamma \leq 1/2$.*

$$N_{m,m'}^\Gamma(l) \sim_{l \rightarrow +\infty} C_{m,m'} e^{hr l}.$$

Preuve. (Indications) Patterson commence en rappelant que le noyau de la résolvante admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe de la variable s , si bien que la série de Poincaré $L_{m,m'}^M$ admet un prolongement méromorphe au voisinage de la droite critique $\{\Re s = h_M\}$; il s'agit de montrer que h_M y est le seul pôle. Soit, pour \tilde{m} relèvement de m dans H^2 , la mesure (dite de Patterson) $\mu_P^{\tilde{m}}$, de support l'ensemble limite $L(\Gamma)$, limite vague (indépendante de m' et de son relèvement \tilde{m}) des mesures $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(\tilde{m}, \gamma \tilde{m}')} \delta_{\gamma \tilde{m}'} / L_{m,m'}^M(s)$ pour $s \rightarrow h_\Gamma^+$. Supposant $L_{m,m'}^M(s)$ avec une singularité $h^\Gamma + i\tau (\tau \neq 0)$, il existe une mesure (non nulle) $\mu_P^{\tilde{m}}(\tau)$, limite vague des mesures $\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-(s+i\tau)d(\tilde{m}, \gamma \tilde{m}')} \delta_{\gamma \tilde{m}'} / L_{m,m'}^M(s+i\tau)$ pour $s \rightarrow h_\Gamma^+$. Cette mesure induit la mesure Γ -invariante $\tilde{\mu}^{\tilde{m}}(\tau) = \|\zeta - \zeta''\|^{-2(h_\Gamma + i\tau)} \mu_P^{\tilde{m}}(\tau) \otimes \mu_P^{\tilde{m}}(\tau)$ sur $L(\Gamma) \times L(\Gamma) \setminus \Delta$ (et par suite la mesure $\tilde{\mu}^{\tilde{m}}(\tau) \otimes ds$ sur $(L(\Gamma) \times L(\Gamma) \setminus \Delta) \times \mathbb{R}$, identifié au fermé non errant du flot géodésique sur T^1M , mesure $\tilde{\mu}^{\tilde{m}}(\tau)$ invariante par le flot géodésique). Les mesures $\mu_P^{\tilde{m}}(\tau)$, $\tilde{\mu}^{\tilde{m}}(\tau)$ sont absolument continues par rapport à $\mu_P^{\tilde{m}}$ et $\tilde{\mu}^{\tilde{m}} = \|\zeta - \zeta''\|^{-2\Gamma} \mu_P^{\tilde{m}} \otimes \tilde{\mu}_P^{\tilde{m}}$ et les actions de Γ sur $(L(\Gamma), \mu_P^{\tilde{m}})$, et $(L(\Gamma) \times L(\Gamma) \setminus \Delta, \tilde{\mu}^{\tilde{m}})$ sont ergodiques. Patterson en déduit alors que l'ensemble limite est fini, ce qui n'est pas. Ainsi la série de Poincaré $L_{m,m'}^M$ (et le noyau résolvant) n'au qu'un pôle simple ($s=h_M$) sur la droite $\{\Re s = h_M\}$, dont le résidu est précisé par celui de la résolvante $C_\Gamma \Psi_{h_M}(m) \Psi_{h_M}(m')$ avec $\Psi_{h_M}(\pi(\tilde{m})) = \int_{L(\Gamma)} e^{-h_M b_\zeta^{\tilde{m}}} d\mu_P^{\tilde{m}}(\zeta)$.

Lalley utilise la dynamique du groupe Γ , présenté comme groupe de Schottky : il existe une famille finie de transformations $S = (\gamma_j, \gamma_{-j})_{j=1}^k$

engendrant librement Γ définie de la manière suivante. Soient $(C_{\pm j})_{j=1}^k$ $2k$ géodésiques de \mathbf{H}^2 ne s'intersectant pas; pour une telle géodésique C , son extérieur E_C désigne la composante de $\mathbf{H}^2 \setminus C$ contenant les autres géodésiques de la famille, son intérieur I_C l'autre composante. Les $\gamma_{\pm j}$ sont les transformations hyperboliques appliquant l'extérieur $E_{\mp j}$ sur l'intérieur $I_{\pm j}$; γ_j et γ_{-j} sont inverses l'une de l'autre et le domaine $\bigcap_{\{C\}} E_C$ est fondamental pour l'action de Γ sur \mathbf{H}^2 .

Le groupe libre Γ s'identifie à un ensemble de mots finis Σ_* en les éléments de S (le neutre étant représenté par le mot \emptyset) et son bord $\partial\Gamma$ à l'infini (au sens des groupes hyperboliques) à un sous-décalage de type fini $(\Sigma(\infty) = \partial\Sigma_*, \tau)$, homéomorphe à l'ensemble limite $L(\Gamma)$ de Γ dans \mathbf{H}^2 , sur lequel opère l'application de Nielsen F_N définie par $F_N\zeta = \gamma^{-1}\zeta$ si ζ appartient à l'intérieur I_γ . La fonction $l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}$ définie sur l'orbite $\Gamma\tilde{m}'$ privée de \tilde{m}' , par

$$l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}(\gamma_1 \cdots \gamma_n \tilde{m}') = d(\gamma_1 \cdots \gamma_n \tilde{m}', \tilde{m}) - d(\gamma_2 \cdots \gamma_n \tilde{m}', \tilde{m})$$

(avec $\gamma_1 \cdots \gamma_n$ écriture réduite) se prolonge continûment à $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$, avec restriction $l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}$ à $\partial\Gamma \simeq L(\Gamma)$ (indépendante de \tilde{m}') vérifiant $l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}(\zeta) = b_{F_N\zeta}^{\tilde{m}}(\gamma^{-1}\tilde{m})$ si ζ est dans l'intérieur I_γ . L'ensemble $(\bar{\Gamma}, \tau)$ n'est pas un décalage de type fini, néanmoins Lalley montre que les résultats asymptotiques du formalisme thermodynamique pour $(\partial\Gamma, \tau, l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'})$ sont prolongeables (continûment) à $(\bar{\Gamma}, \tau, l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'})$. De manière analogue à ce qui a été énoncé au sujet des arbres précédemment, il existe une fonction $\chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}$ continue sur $\bar{\Gamma}$ (de restriction $\chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}|_{\partial\Gamma}$ indépendante de \tilde{m}'), une mesure $\mu_{\tilde{m}}$ sur $\mathcal{C}(\partial\Gamma)$ telles que

$$\#\{y \in \Sigma_* \setminus \{\emptyset\}, \exists n, \gamma^n y = x \text{ et } l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}(n)(y) \leq R\} \sim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_{\tilde{m}}(\partial\Gamma) \chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}(x)}{h_M \langle \mu_{\tilde{m}}, l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'} \chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'} \rangle} e^{h_M R}$$

Ainsi pour $x = \emptyset$

$$\#\{\gamma \in \Gamma, d(\tilde{m}, \gamma\tilde{m}') - d(\tilde{m}, \tilde{m}') \leq R\} \sim_{R \rightarrow \infty} \frac{d\mu_{\tilde{m}}(\partial\Gamma) \chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'}(\emptyset)}{h_M \langle \mu_{\tilde{m}}, l_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'} \chi_{\tilde{m}}^{\tilde{m}'} \rangle} e^{h_M R}. \quad \square$$

REMARQUE. (i) La mesure $\mu_{\tilde{m}}$ a été construite pour tout groupe Γ de type fini sans éléments paraboliques (à l'exception de quelques uns) par Series ([32]), qui a montré (comme le traitement des graphes s'en est inspiré) que $\mu_{\tilde{m}}$ coïncidait avec la mesure de Patterson $\mu_p^{\tilde{m}}$.

(ii) Pour des surfaces d'aire finie, Nicholls [23] établit l'asymptotique de $N_{m,m}(R)$ sans faire appel ni à la théorie spectrale du laplacien ni à la dynamique symbolique (compliquée pour les groupes cocompacts qui ne sont pas libres) en se basant sur le caractère mélangeant du flot

géodésique opérant sur T^1M muni de la mesure de Liouville.

3.1.B. Courbure variable (variétés compactes).

Soit φ flot d'Anosov mélangeant sur une variété compacte (sans bord) V . Soit \mathcal{F}^s (resp. \mathcal{F}^i) le feuilletage fortement stable (resp. fortement instable). Margulis construit des mesures μ_s, μ_i transverses aux feuilletages $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^i$ resp., avec la propriété $(\varphi_t)_*\mu_s = e^{-h_\varphi t}\mu_s, (\varphi_t)_*\mu_i = e^{h_\varphi t}\mu_i$. Le feuilletage faiblement (in)stable ne possède pas de mesure transverse : si V_{fs} est une sous-variété compacte transverse au feuilletage faiblement stable, il existe $\varepsilon_{V_{fs}} > 0$ tel que pour $\varepsilon \leq \varepsilon_{V_{fs}}$, $\varphi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(V_{fs})$ est transverse au feuilletage fortement stable; Margulis définit alors la mesure $\mu_{V_{fs}}$ (indépendante de $\varepsilon \leq \varepsilon_{V_{fs}}$) sur V_{fs} par

$$\mu_{V_{fs}}(A) = \frac{e^{h_\varphi \varepsilon} - e^{-h_\varphi \varepsilon}}{h_\varphi} \mu_{fs}(\varphi_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(A)), \quad A \subset V_{fs},$$

mesure notée simplement μ_{fs} , si la sous-variété V_{fs} est omise (l'indice fs rappelant que celle-ci est transverse au feuilletage faiblement stable). Une sous-variété V_{fi} transverse au feuilletage faiblement instable porte une mesure μ_{fi} définie de manière analogue. Utilisant la transversalité des feuilletages fortement stable et faiblement instable, Margulis construit à partir des mesures précédentes ce qu'il est convenu de nommer désormais la mesure de Margulis μ_M (unique à un facteur scalaire près).

Théorème 3.5 ([20]). *Soit φ flot d'Anosov mélangeant sur une variété compacte V d'entropie h_φ . Soit V_{fs} (resp. V_{fi}) sous-variété compacte transverse au feuilletage faiblement instable (resp. faiblement stable). Alors*

$$\#\{\varphi_{[0, T]}V_{fs} \cap V_{fi}\} \sim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu_{fs}(V_{fs})\mu_{fi}(V_{fi})}{\mu_M(V)} e^{h_\varphi T}.$$

Ce théorème, appliqué au flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété compacte M à courbures sectionnelles strictement négatives avec $V_{fs} = T^1M_m$ et $V_{fi} = T^1M_{m'}$ a comme corollaire:

Corollaire 3.6 ([20]). *Soit (M, g) compacte à courbures sectionnelles négatives.*

$$(i) \quad \#\{C \in \mathcal{C}_{m, m'}, l_C \leq l\} \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{\mu_{fi}(T^1M_m)\mu_{fs}(T^1M_{m'})}{\mu_M(T^1M)} e^{h_M l}.$$

(ii) Soit \tilde{M} le revêtement universel de M . Pour \tilde{m} dans \tilde{M} ,

$$\text{Vol}(B(\tilde{m}, R)) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\mu_{\text{fs}}(T^1 M_{\pi(\tilde{m})}) \int_M \mu_{\text{fi}}(T^1 M_{m'}) dm'}{\mu_M(T^1 M)} e^{h_M R}.$$

3.2 Entropie périodique

3.2.A. Courbure constante (surfaces de géométrie finie).

Théorème 3.7. Soit M surface hyperbolique orientable de géométrie finie.

- (i) La fonction zêta de Smale ζ_M admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} .
- (ii) Sur la droite critique $\{\Re s = h_M\}$, h_M est le seul pôle (en fait simple) de ζ_M .

(iii) $N_M^{\text{per}}(l) \underset{l \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{h_M l}}{h_M l}.$

L'asymptotique de N_M^{per} résulte des deux assertions le précédant, via le théorème taubérien de Wiener-Ikehara.

Si M est d'aire finie, le théorème est un corollaire de la formule de trace de Selberg, qui exprime la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Selberg $Z_M(s) = \prod_{k=0}^{+\infty} \zeta_M(s+k)^{-1}$ en termes de données spectrales du laplacien riemannien sur M .

Pour s'occuper des surfaces d'aire infinie et utiliser au mieux leurs décompositions en région de Nielsen et entonnoirs, il est opportun d'introduire des fonctions de Selberg pour des surfaces à bord totalement géodésique compact. Associées par une formule de trace à des fonctions spectrales de laplaciens, elles diffèrent suivant le choix des conditions au bord (Dirichlet ou Neumann); il suffit d'en considérer un type pour le propos présent.

DÉFINITION 3.8. Soit M surface à bord compact, totalement géodésique.

Si M est connexe, sa fonction zêta de Selberg est le produit $\prod_C Z_M(C)$ portant sur toutes les géodésiques fermées (éventuellement avec contact sur le bord en obéissant à la règle d'égalité des angles d'incidence et de réflexion) primitives de M où $Z_M(C)(s) = \prod_{k \geq 0} 1 - (-1)^{i_C k} e^{-l_C(s+k)}$ si C , de longueur l_C a un nombre d'intersection i_C fini avec le bord, $Z_M(C)(s) = e^{l_C s/8} \prod_{k \geq 0} 1 - e^{-2l_C(s/2+k)}$ sinon.

En général, Z_M est le produit des fonctions zêta des composantes

connexes de M .

À l'ordinaire, la convergence du produit infini est assurée sur le demi-plan $\{\Re s > 1\}$ pour une surface de géométrie finie. Si X est une surface à bord, Δ_X notera toujours dans la suite le laplacien sur les fonctions avec conditions de Neumann sur le bord.

Proposition 3.9 ([12]). *Soit M surface hyperbolique de type fini et N sa région de Nielsen. Alors, pour λ dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, l'opérateur $T_{M, \partial N}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M \setminus \partial N} - \lambda)^{-1}$ est traçable, avec trace vérifiant:*

$$(3.10) \quad \text{tr}[T_{M, \partial N}(\lambda)] = \frac{d}{d\lambda} \left[\log Z_M / Z_{M \setminus \partial N} (1/2 + \sqrt{1/4 - \lambda}) \right]$$

La fonction $Z_{M \setminus \partial N}$, produit de fonctions zêta de variétés d'aire finie, admet un prolongement méromorphe à \mathbf{C} : pour M compacte à bord, la formule de traces de Selberg peut se récrire sous forme multiplicative en termes de déterminant du laplacien (le déterminant $\det A$ de l'opérateur elliptique A d'ordre p sur une variété compacte X est défini par régularisation $\zeta : \det A = \exp(-\zeta'_A(0))$ avec ζ_A prolongement méromorphe de la fonction $\zeta_A(s) = \text{tr} A^{-s}$ défini sur $\{\Re s > \dim X/p\}$ par une série absolument convergente). Comme Sarnak [30] et Voros [36] l'ont montré pour les surfaces sans bord,

Proposition 3.11. *Soit M surface hyperbolique compact à bord totalement géodésique. Soient $\zeta_{\mathbf{R}}$ la fonction zêta de Riemann, Γ_2 la fonction digamma de Barnes et Z_{Γ} défini suivant*

$$Z_{\Gamma}(s) = e^{2\zeta_{\mathbf{R}}(-1) - 1/4 - \log \sqrt{2\pi} - s(1-s)} (2\pi)^{-s} \Gamma_2(s)^2 \Gamma(s)^{-1}.$$

Alors

$$(3.12) \quad \det[\Delta_M - s(1-s)] = Z_M(s) Z_{\Gamma}(s)^{\text{Vol}(M)/\pi} e^{I(\partial M)(s-1/2)}.$$

Pour M d'aire finie, la formule de trace de Selberg nous spectre des longueurs, valeurs propres et opérateur d'Eisenstein \mathcal{C}_M associés au laplacien Δ_M . Cet opérateur décrit le comportement asymptotique des fonctions d'Eisenstein associées aux pointes de M , fonctions décomposant spectralement la partie continue du laplacien Δ_M . Soit \tilde{M} la compactification de M obtenue en ajoutant un nombre fini de points (les pointes) à M . Soit p une pointe de M et ζ un de ses relèvements dans $\tilde{M}(\infty)$. Il existe une fonction lisse χ_p , valant 1 au voisinage de p et une fonction

b_p , nulle dehors d'un voisinage de p telle que $b_p \circ \pi = (\chi_p \circ \pi) b_\zeta$ où b_ζ est une fonction de Busemann sur \tilde{M} centrée en ζ .

La fonction d'Eisenstein $E_p(s)$, définie pour $\Re s > 1$ suivant

$$E_p(s) = \chi_p e^{sb_p} - (\Delta_M - s(1-s))^{-1} ((\Delta_\infty - s(1-s)) (\chi_p e^{sb_p}))$$

admet un prolongement méromorphe à \mathbf{C} . Si E_M note le vecteur d'Eisenstein $[E_p]_{p \in \tilde{M} \setminus M}$, $\mathcal{C}_m(s)$ est le coefficient (méromorphe en s) de l'équation fonctionnelle

$$E_M(1-s) = \mathcal{C}_M(s) E_M(s)$$

et la formule de trace prend la forme:

Proposition 3.13 ([13]). *Soient M surface hyperbolique de volume fini à bord totalement géodésique et P_M^d le projecteur sur la partie discrète de $L^2(M)$ pour le laplacien Δ_M . Soit Ψ la dérivée logarithmique de la fonction Γ .*

$$\begin{aligned} & \text{tr}[P_M^d [(\Delta_M - \sigma(1-\sigma))^{-1}]_{s_0}^s] + [(2\sigma-1)^{-2}]_{s_0}^s \text{tr}[1 - \mathcal{C}_M(1/2)] \\ & + \frac{1}{2i\pi} \int_{1/2+i\mathbf{R}^+} [(\zeta(1-\zeta) - \sigma(1-\sigma))^{-1}]_{s_0}^s \text{tr} \left[\frac{\mathcal{C}'_M(\zeta)}{\mathcal{C}_M} \right] d\zeta \\ (3.14) \quad & = \left[(2\sigma-1)^{-1} \frac{Z'_M(\sigma)}{Z_M(\sigma)} \right]_{s_0}^s + \frac{\text{Vol}(M)}{4\pi} [\Psi(\sigma)]_{s_0}^s \\ & + \#(\tilde{M} \setminus M) [(2\sigma-1)^{-1} (2 + \Psi(\sigma))]_{s_0}^s. \end{aligned}$$

La formule différentielle valable pour M compacte

$$\text{tr}[(\Delta^M - \mu)^{-1}]_{\lambda}^{\lambda_0} = \frac{d}{d\lambda} \log(\det[\Delta_M - \lambda]) e^{\sigma_0 \lambda},$$

à placer entre la formulation habituelle (telle (3.14)) et l'écriture multiplicative (3.12), est remplacée pour une surface non compacte de la manière suivante:

Théorème 3.15. *Soit H courbe compacte sur la surface M .*

(i) *Pour λ dans $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, l'opérateur $T_{M,H}(\lambda) = (\Delta_M - \lambda)^{-1} - (\Delta_{M \setminus H} - \lambda)^{-1}$ est traçable.*

(ii) *Soit ε réel positif. La fonction $D_{M,H}^\varepsilon$, définie (et holomorphe) sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ suivant*

$$D_{M,H}^\varepsilon(\lambda) = \det[1 + T_{M,H}(-\varepsilon)((\Delta_{M \setminus H} + \varepsilon)^{-1} - (\lambda + \varepsilon)^{-1})^{-1}],$$

a pour dérivée logarithmique $\text{tr}[T_{M,H}(\lambda)]$.

(iii) *Si M est à courbure constante -1 en dehors d'un compact, la fonction $D_{M,H}^\varepsilon(s(1-s))$ définie sur $\{\Re s > 1\}$ admet un prolongement méromorphe à \mathbf{C} .*

Preuve. Les deux premières parties sont prouvées dans le travail [12]. La troisième l'est aussi, via la formule de Krein reliant déphasage spectral et matrice de diffusion pour des perturbations traçables; en fait, ce recours à la théorie de la diffusion est évitable, comme la suite l'expose.

De l'indépendance (assurée par (ii)) de la dérivée logarithmique de $D_{M,H}^\varepsilon$ vis-à-vis de ε , il suffit de montrer que $D_{M,H}^\varepsilon(s(1-s))$, $\Re s > 1/2$, se prolonge méromorphiquement sur $\{\Re s > -a(\alpha)\}$ avec $a(\alpha) \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, pour établir le prolongement de $D_{M,H}^\varepsilon(s(1-s))$ à \mathbf{C} tout entier.

Soit m_0 point base de M et, pour a réel, $L^{2,a}(M)$ le complété de $\mathcal{C}_\infty^0(M)$ normé par la norme $\|\cdot\|_{2,a}$ définie suivant $\|\varphi\|_{2,a} = \|e^{ad(m_0,\cdot)}\varphi\|_{L^2(M)}$. L'espace vectoriel localement convexe $L^{2,a}(M)$ est indépendant du pointage m_0 , même si sa structure euclidienne en dépend. L'espace des opérateurs continus (resp. compacts, de classe \mathcal{I}^p) de $L^{2,a}(M)$ dans $L^{2,b}(M)$ sera noté $\mathcal{L}_{a,b}(M)$ (resp. $\mathcal{I}_{a,b}^\infty(M)$, $\mathcal{I}_{a,b}^p(M)$) et le demi-plan $\{\Re s > \alpha\}$ désigné par \mathcal{P}_α .

Pour une surface asymptotiquement hyperbolique, le prolongement de la résolvante a son action sur l'échelle des espaces à poids $L^{2,a}(M)$ précisée par le lemme suivant (dont la démonstration est reportée ci-dessous):

Lemme 3.16. *Soit H courbe compacte sur la surface M .*

(α) *Soit $a > 0$, $\mathcal{M}(U, \mathcal{B})$ l'espace des fonctions méromorphes sur U (ouvert de \mathbf{C}) à valeurs dans le Banach \mathcal{B} et S la surface M ou $M \setminus H$. Par prolongement méromorphe, la résolvante $(\Delta_S - s(1-s))^{-1}$ considérée comme élément de $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{1/2}, \mathcal{L}_{0,0}(M))$, induit un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{-a+1/2}, \mathcal{L}_{a,-a}(M))$ avec parties polaires de rang fini.*

(β) *Soient $\varepsilon, \varepsilon_-$ positifs avec $\varepsilon > \varepsilon_-$. L'opérateur $T_{M,H}(-\varepsilon)$, opérant sur $L^{2,-\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$ à valeurs dans $L^{2,\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$, est de classe trace.*

Si $\varepsilon > \varepsilon_-$, le produit $T_{M,H}(-\varepsilon)((\Delta_{M \setminus H} + \varepsilon)^{-1} - (\lambda + \varepsilon)^{-1})^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ appliqué, par son premier facteur

$$((\Delta_{M \setminus H} + \varepsilon)^{-1} - (\lambda + \varepsilon)^{-1})^{-1} = -(\lambda + \varepsilon)^{-1}[1 + (\lambda + \varepsilon)(\Delta_{M \setminus H} - \lambda)^{-1}],$$

l'espace $L^2(M)$ dans $L^{2,-\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$, puis $L^{2,-\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$ dans $L^{2,\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$ d'après la partie β du lemme 3.16. Ainsi le déterminant $D_{M,H}^\varepsilon(\lambda)$ peut être considéré comme celui d'un opérateur interne à $L^{2,\sqrt{\varepsilon_-}}(M)$. D'après

le lemme 3.16 en sa partie (α), pour $\lambda_s = s(1-s)$ avec $\Re s > 1/2$, l'opérateur

$$((\Delta_{M \setminus H} + \varepsilon)^{-1} - (\lambda_s + \varepsilon)^{-1})^{-1} = -(\lambda_s + \varepsilon)[1 + (\lambda_s + \varepsilon)(\Delta_{M \setminus H} - \lambda_s)^{-1}],$$

induit un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{-\sqrt{\varepsilon_-}+1/2}, \mathcal{L}_{\sqrt{\varepsilon_-}, -\sqrt{\varepsilon_-}}(M))$, ce qui assure le prolongement de $D_{M,H}^s(s(1-s))$, $s \in \mathcal{P}_{1/2}$ au demi-plan $\mathcal{P}_{-\sqrt{\varepsilon_-}+1/2}$ et conclut la preuve de la partie (ii) du théorème. \square

Preuve du lemme 3.16.

L'action de la résolvante $(\Delta_S - s(1-s))^{-1}$ sur les espaces $L^{2,a}(M)$ est déduite de celle d'une paramétrice $P_S(s)$ construite dans [12] en recollant des paramétrices de laplaciens sur des surfaces élémentaires: si (φ_*) et (ψ_*) sont des partitions de l'unité adaptées à une décomposition de S en morceaux portés par des surfaces simples (i.e dont la résolvante du laplacien est étudiable simplement), vérifiant $\psi_* \varphi_* = \varphi_*$, la paramétrice P_S est définie suivant $P_S = \sum \psi_*(\Delta_* - s(1-s))^{-1} \varphi_*$ où les laplaciens Δ_* sont de divers types: Δ_X avec X surface compacte, Δ_E avec E bout hyperbolique évasé, Δ_0 (resp. Δ_\perp) laplacien sur les fonctions invariantes par rotation (resp. d'intégrale nulle sur les horocycles) de la pointe P ($P = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})_x \times \{y \geq 1\}$ avec métrique $(dx^2 + dy^2)/y^2$).

Les laplaciens Δ_X et Δ_\perp sont à résolvante compacte, ainsi pour ces termes, $\psi_*(\Delta_* - s(1-s))^{-1} \varphi_*$ se prolonge méromorphiquement comme élément de $\mathcal{M}(\mathbf{C}, \mathcal{L}_{a,-a}(M))$. Le prolongement des termes de type entonnoir résulte de celui de la résolvante du plan hyperbolique ([22]). Via des changements de variable et de fonction ($t = \log y, f(y) = e^{t/2}g(t)$), Δ_0 est essentiellement équivalent au laplacien $-\partial_t^2 + 1/4$ sur $L^2(\mathbf{R}^+, dt)$ (avec conditions de Dirichlet au bord p. ex.), $L_0^{2,a}(P)$ étant mis en isomorphisme avec $L^2(\mathbf{R}^+, dt)$, son prolongement comme élément de $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{-a+1/2}, \mathcal{L}(L_0^{2,a}(P), L_0^{2,-a}(P)))$ en résulte.

Le reste $K_S(s) = (\Delta_S - s(1-s))P_S(s) - 1$ est régularisant, d'image dans $\mathcal{C}(K)$ pour un compact K de S ; ainsi $K_S(s)$ induit un élément de $\mathcal{M}(\mathcal{P}_{-a+1/2}, \mathcal{I}_{a,a}^\infty)$ ce qui donne la propriété énoncée en (α) pour la résolvante $(\Delta_S - s(1-s))^{-1} = P_S(s)(1 + K_S(s))^{-1}$.

Posant $s_\varepsilon = (1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon})/2$ (vérifiant $s_\varepsilon(1 - s_\varepsilon) = -\varepsilon$), l'opérateur $T_{M,H}(-\varepsilon)$ se décompose suivant

$$T_{M,H}(-\varepsilon) = [P_\bullet(s_\varepsilon)]_{M \setminus H}^M - [P_\bullet(s_\varepsilon)K_\bullet(s_\varepsilon)(1 + K_\bullet(s_\varepsilon))^{-1}]_{M \setminus H}^M.$$

La décomposition de M (et ainsi le choix de (φ_*) , (ψ_*)) est supposée telle que les termes correspondants aux bouts de M disparaissent par différence dans $[P_\bullet(s_\varepsilon)]_{M \setminus H}^M$, rendant ce terme (traçable comme opérateur

de Green singulier sur une surface [10]) continu comme opérateur de $L^{2, -\sqrt{\varepsilon^-}}(M)$ à valeurs dans $L^{2, \sqrt{\varepsilon^-}}(M)$. L'opérateur $K_\bullet(s_\varepsilon)$ ($\bullet = M$ ou $M \setminus H$), régularisant, applique $L^{2, -\sqrt{\varepsilon^-}}(M)$ dans $L^2(K)$ alors que la paramétrice $P_\bullet(s_\varepsilon)$, somme de résolvantes localisées, laisse invariant $L^{2, \sqrt{\varepsilon^-}}(M)$ d'après le résultat de stabilité établi par Agmon:

Lemme 3.17 ([1], p. 19). *Soient X variété riemannienne complète, η positif. Pour φ dans $\mathcal{C}_0^\infty(X)$, $\|(\Delta_X - \lambda)^{-1}\varphi\|_{2, \pm\sqrt{\eta}} \leq \frac{1}{-\Re\lambda - \eta} \|\varphi\|_{2, \pm\sqrt{\eta}}$ si $\Re\lambda < -\eta$.*

Ainsi le second terme applique continûment $L^{2, -\sqrt{\varepsilon^-}}(M)$ dans $L^{2, \sqrt{\varepsilon^-}}(M)$, ce qui complète la preuve de l'affirmation (β). \square

Voilà la partie (i) du théorème 3.7 établie. Bowen remarquait déjà dans [4] le prolongement méromorphe à \mathbf{C} de la fonction ζ_M pour une surface M non compacte sans pointe.

Concernant (ii), d'après la formule de trace (3.9), les singularités $\{s_i\}$ de Z_M dans $\{\Re s > 1/2\}$ sont localisés dans l'intervalle $(1/2, 1]$, déterminées par les valeurs propres (s'il en existe) $\{\lambda_i = s_i(1 - s_i)\}$ dans l'intervalle $[0, 1/4)$. Si $h_M > 1/2$, Δ_M admet $h_M(1 - h_M)$ comme (plus petite) valeur propre et Z_M a $s = h_M$ comme zéro simple. Si $h_M \leq 1/2$ (auquel cas la surface de volume infinie n'a pas de pointe), les formules précédentes ne permettent pas de conclure. Avec la présentation (décrite précédemment) de $\pi_1(M)$ comme groupe de Schottky, l'ensemble limite $L(\pi_1(M))$ dans $\partial\mathbf{H}^2$, avec l'application de Nielsen F_N , est un sous-décalage de type fini, i.e. le bord du groupe libre $\pi_1(M)$ vu comme ensemble de mots semi-infinis sur l'alphabet S muni du décalage naturel. Les géodésiques primitives et les points périodiques de F_N sont liés suivant (en usant du cadre introduit dans la preuve de la proposition 3.4):

Proposition 3.18 ([17], [4], [32]). (i) *Le spectre primitif du flot géodésique sur M est en correspondance biunivoque avec les orbites périodiques de l'application de Nielsen F_N .*

(ii) *Si la géodésique fermée C est associée au point périodique ζ de période n , sa longueur vérifie $l_C = l_m^{(n)}(\zeta)$. L'application l_m est höldérienne, mélangeante.*

Ainsi, la fonction ζ_M coïncide avec la fonction zêta du flot suspendu à partir de F_N , avec application temps de premier retour l_m , et, d'après Parry-Pollicott, est holomorphe au voisinage de $\{\Re s = h_M\}$, excepté une singularité polaire (simple) en $s = h_M$. Ce qui achève la preuve du théorème 3.7. \square

3.2.B. Courbure variable (variétés compactes).

La preuve de Margulis [20] a été reprise par Toll [35], qui observant que la mesure de Margulis coïncide avec celle de Bowen (limite vague des mesures uniformes sur les géodésiques $\mu_B = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{l_C \leq l} \delta_C / \sum_{l_C \leq l} l_C$) montre que $C_M = 1$ dans l'énoncé (cf. théorème 3) donné par Margulis.

Parry-Pollicott établissent que cet asymptotique est partagé par la distribution des périodes d'un flot Axiome A:

Théorème 3.19 ([25]). *Soit $\varphi = (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot Axiome A d'une variété compacte, restreint à un ensemble basique et d'entropie h_φ .*

(i) ζ_φ a un prolongement méromorphe au voisinage de $\{\Re s = h_\varphi\}$ et $s = h_\varphi$ en est un zéro simple. Si φ est faiblement mélangeant, c'est le seul zéro sur la droite critique $\{\Re s = h_\varphi\}$, sinon ζ_φ est $2\pi/l_\varphi$ périodique.

(ii) Soit $N_\varphi^{\text{per}}(l) = \#\{\tau \text{ périodique, } \lambda(\tau) \leq l\}$. Si φ est faiblement mélangeant,

$$N_\varphi^{\text{per}}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{e^{h_\varphi l}}{h_\varphi l},$$

sinon

$$N_\varphi^{\text{per}}(l) \sim_{l \rightarrow \infty} \frac{h_\varphi l_\varphi}{e^{h_\varphi l_\varphi} - 1} \frac{e^{h_\varphi l_\varphi \lfloor l/l_\varphi \rfloor}}{h_\varphi l}.$$

REMARQUE. Par une partition de Markov convenable (et un argument de comptage des orbites fermées dû à Manning-Bowen), l'étude du flot φ est remplacée par celle d'un flot obtenu par suspension sur un décalage de type fini Σ avec application temps de premier retour r . Les mots (semi-infinis) de ce décalage s'interprètent comme la trace d'un chemin sur l'ensemble des sommets d'un graphe G d'arêtes orientées (l'opposée de l'arête a n'est pas nécessairement présente dans G). L'application temps de premier retour r dépend du chemin tout entier (et non d'un nombre fini de ses sommets, comme pour le flot géodésique sur un graphe); néanmoins r est höldérienne et grâce à une suite de fonctions localement constantes (r_n) sur Σ approchant r , les singularités de ζ_{r_n} , approchées par celles de ζ_{r_n} , sont sujet à description.

Appendice: Formalisme thermodynamique

Comme il a été développé à propos des graphes, il est utile de coder un

système dynamique suivant une formulation combinatoire, qui apparaît dans la statistique de modèles de spins linéaires, d'où le vocable de *formalisme thermodynamique*. Ce codage ne réalise pas en général une équivalence topologique entre le système dynamique donné et son codage; néanmoins il suffit pour certains aspects de la théorie de la mesure et, grâce à un argument de Manning-Bowen, pour compter les éléments périodiques du système.

Pour un flot φ sur un espace V , un tel codage consiste en la donnée d'un alphabet fini S (étiquetant une famille finie de sections transverses au flot très convenablement choisies), de règles de juxtaposition littérale sous la forme d'une matrice A à coefficients 0-1 indexée par S (reflétant quelles sections sont traversées par une orbite à partir de telle section), de l'espace des mots biinfinis $\Sigma_A = \{(s_i) \in S^{\mathbf{Z}}, a_{s_i s_{i+1}} = 1\}$ licites (liste des sections traversées par une trajectoire) et d'une application positive l (dite temps de premier retour, mesurant le temps écoulé pour aller de la section s_0 à la section s_1 pour la trajectoire correspondant au mot $s = \dots s_{-1} s_0 s_1 \dots$) sur Σ_A ; l'espace $\Sigma_A^l = \{(\sigma, s), \sigma \in \Sigma_A, s \in \mathbf{R}\} / \sim$ obtenu en identifiant $(\sigma, s + l(\sigma))$ et $(\tau\sigma, s)$ est le support du flot suspendu $\varphi_{\Sigma_A}^l$ à partir du décalage τ de Σ_A et de l'application $l: \varphi_{\Sigma_A}^l(t)(\sigma, s) = (\sigma, s + t)$. Si la famille de sections est adéquate (et une telle construction est possible pour les flots géodésiques sur des variétés compactes à courbure strictement négative p. ex.), il est obtenu ainsi une projection du suspendu Σ_A^l sur V , entrelaçant les flots $\varphi_{\Sigma_A}^l$ et φ . Cette projection n'est pas un homéomorphisme, ni ne met en correspondance biunivoque les trajectoires périodiques. Néanmoins, ces deux flots ont même entropie, (si φ est Anosov ou Axiome A) la mesure (unique) d'entropie maximale de $\varphi_{\Sigma_A}^l$ se projette sur celle pour φ et ces flots sont simultanément mélangeants ou non. Cette propriété de mélange (existence d'une fonction propre non constante) peut se lire sur l ; $\varphi_{\Sigma_A}^l$ est mélangeant si et seulement si l est cohomologue à une fonction localement constante ou si et seulement si les longueurs $l(C_\sigma) = \sum_{i=1}^{\tau_\sigma} l(\tau^i \sigma)$ des cycles $C_\sigma = (\sigma, \tau\sigma, \dots, \tau^{\tau_\sigma} \sigma = \sigma, \dots)$ de période τ_σ sont commensurables entre elles.

Pour un graphe fini, un tel codage a été exhibé. En fait, la partie consacrée à l'exposant de Poincaré repose sur un autre codage: la famille des sections choisie consiste en les parties S_m^ε de $T^1 G_m$ des vecteurs tangents pointant vers ε , où (m, ε) décrit les paires du milieu m d'une arête de $G \setminus A_G$ et d'une de ses extrémités ε .

La structure de l'ensemble des trajectoires périodiques sur Σ_A^l est celle des mots périodiques de Σ_A ou bien encore celle des orbites périodiques sur Σ_A^+ (espace des mots $s = (s_i)_{i \geq 0}$ licites vis-à-vis de A) sous l'action du décalage τ ($\tau(s)_i = s_{i+1}$). A priori, la fonction de premier retour l dépend

du passé (i.e. des coordonnées s_i avec $i \leq 0$) des trajectoires, mais il existe une fonction l^+ , cohomologue à l (i.e. $l^+ = l + u - u \circ \tau$ avec u continue).

Géométriquement, cela revient à remplacer les sections S par des sections laminées en variétés stables (ainsi, si $x, x' \in S$ avec $x' \in \mathcal{F}^s(x)$ et $\varphi_{l+(x)}(x) \in S'$, alors $\varphi_{l+(x)}(x') \in S'$ i.e. $l^+(x) = l^+(x')$). Ainsi, le spectre des périodes de φ_Σ^l s'identifie au spectre des longueurs $\{l^{+(p)}(\mathbf{s})\}$ où \mathbf{s} (de période p_s) parcourt une classe de représentants des orbites périodiques du décalage τ sur Σ_A^+ .

Si d_S est une distance sur S , l'espace Σ_A est métré suivant $d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{-|i|} d_S(s_i, s'_i)$. Une fonction continue f est dite α -höldérienne si $|f|_\alpha = \sup_{\mathbf{s}, \mathbf{s}'} d(f(\mathbf{s}), f(\mathbf{s}')) / d(\mathbf{s}, \mathbf{s}')^\alpha$ est finie, l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\Sigma_A)$ des fonctions α -höldériennes, avec la norme $\| \cdot \|_\alpha$ définie par $\|f\|_\alpha = |f|_\alpha + \|f\|_\infty$, est une algèbre de Banach. L'espace des fonctions sur Σ_A ne dépendant pas du passé s'identifie à l'espace des fonctions continues sur Σ_A^+ (dont la topologie est induite par une métrique analogue à celle introduite pour Σ_A). La réduction cohomologique de l à l^+ est possible sans perte irrémédiable de régularité: si l est α -höldérienne, il est possible de prendre l^+ et u $\alpha/2$ -höldériennes.

Pour l dans $\mathcal{C}_n(\Sigma_A^+)$, espace des fonctions sur Σ_A^+ ne dépendant que des n premières coordonnées, la fonction $\zeta_A^l(s)$ définie par

$$\zeta_A^l(s) = \exp\left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{s \in \text{Fix } \tau^m} e^{-s l^{(m)}(s)}\right),$$

coïncide avec le déterminant $\det(1 - \mathcal{L}_{s|_{\mathcal{C}_n(\Sigma_A^+)}})^{-1}$ où \mathcal{L}_f est l'opérateur, dit de Perron-Frobenius-Ruelle, défini sur $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$ suivant

$$\mathcal{L}_f(\varphi)(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t}: \tau \mathbf{t} = \mathbf{s}} e^{f(\mathbf{t})} \varphi(\mathbf{t}),$$

et dont la théorie spectrale est en partie explicitée par le théorème de Perron-Frobenius-Ruelle (le dernier auteur étendant aux opérateurs sur des espaces de fonctions continues le résultat des deux premiers concernant les matrices):

Théorème A.1 ([25]). *Soit A matrice aperiodique (i.e. une puissance de A est à coefficients tous strictement positifs) et f α -höldérienne à valeurs réelles.*

(i) *L'opérateur \mathcal{L}_f admet une valeur propre simple positive β , de module maximum, avec une fonction propre χ strictement positive, α -höldérienne.*

(ii) *Le spectre de \mathcal{L}_f , mis à part β , est contenu dans un disque de rayon*

strictement inférieur à β .

(iii) Il existe une unique mesure de probabilité μ , vecteur propre de l'adjoint de \mathcal{L}_f avec valeur propre β .

(iv) $\mathcal{L}_f^n \varphi / \beta^n \rightarrow \chi \int_{\Sigma_A^+} \varphi d\mu / \int_{\Sigma_A^+} \chi d\mu$ pour tout φ dans $\mathcal{C}(\Sigma_A^+)$.

Ainsi, l'opérateur \mathcal{L}_{-st} a $\beta(s)$ comme plus grande valeur propre simple, analytique en s , décroissante sur \mathbf{R} , de dérivée $\partial_s \beta = -\langle \mu, l_\chi \rangle / \langle \mu, \chi \rangle$. L'unique h (qui est strictement positif) tel que $\beta(h) = 1$ coïncide avec l'entropie du flot suspendu sur Σ_A^+ .

Pour l dans $\mathcal{C}_n(\Sigma_A^+)$, le produit $\zeta_l(s)(1 - \beta(s))$ est méromorphe au voisinage de \mathbf{R} , analytique sur un voisinage de $s = h$; pour l α -höldérienne, Parry et Pollicott [24] prouvent que, sans que ζ_l admette nécessairement un prolongement méromorphe au plan tout entier, le produit $\zeta_l(s)(1 - \beta(s))$ se prolonge analytiquement au voisinage de $\{\Re s > h\}$, et si l est mélangeante, le seul zéro de $1 - \beta(s)$ sur la droite critique $\{\Re s = h\}$ est en $s = h$.

De la singularité de ζ_l en $s = h$ résultent les asymptotiques du théorème 3.19 en appliquant deux assertions taubériennes (utilisées aussi pour des dénombrements d'orbites ou de chemins à extrémités fixées), celle de Wiener-Ikehara ([37]):

Théorème A.2. Soit $a_\alpha(t)$, $\alpha \in A$ une famille de fonctions monotones non décroissantes continues supérieurement telle que, pour un s_0 réel, $L_\alpha(s) = \int_0^\infty e^{-st} a_\alpha(t) dt$ converge absolument pour $s \in (s_0, +\infty)$ et que $\varphi_\alpha(s) = L_\alpha(s) - A_\alpha / (s - s_0)$ soit continue sur un voisinage de $A \times \{\Re s \geq s_0\}$. Alors $a_\alpha(t) = A_\alpha e^{s_0 t} (1 + \varepsilon_\alpha(t))$ avec $\varepsilon_\alpha(t) \rightarrow 0$ uniformément sur A .

où l'introduction de paramètres ne coûte pas beaucoup, et celle, dont la preuve plus aisée est donnée:

Lemme A.3. Soit $R \in (0, 1)$ et $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$ fonction méromorphe au voisinage de $\bar{D}_R = \{|z| \leq R\}$ avec R pour seul pôle (simple de résidu $A \neq 0$) dans \bar{D}_R . Alors $\sum_{n=0}^N f_n = -AR^{-(N+1)} / (1 - 2R)(1 + \varepsilon(N))$ avec $\varepsilon(N) \rightarrow 0$. Si la fonction f dépend d'un paramètre α avec résidu A_α continu en α , la conclusion vaut avec $\varepsilon_\alpha(N) \rightarrow 0$ uniformément en α .

Preuve. La fonction $f(z) - A/(z - R) = \sum_{n \geq 0} (f_n + AR^{-(n+1)})z^n$ est holomorphe au voisinage de D_R ; aussi existe-t-il $\varepsilon > 0$ avec $R(1 + \varepsilon) < 1$ et C_ε tels que $|f_n + AR^{-(n+1)}| \leq C_\varepsilon (R(1 + \varepsilon))^{-n}$. Le résultat en découle. \square

Bibliographie

- [1] S. Agmon: *Lectures on exponential decay of solutions of second-order elliptic equations bounds on eigenfunctions of N-body Schrödinger operators*, Princeton University Press, 1982.
- [2] H. Bass: *The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice*, *Internat. J. Math.*, **3** (1992), 717–797.
- [3] R. Bowen: *Periodic orbits for hyperbolic flows*, *Amer. J. Math.* **94** (1972), 1–30.
- [4] R. Bowen: *Hausdorff dimension of quasi-circles*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50** (1979), 11–25.
- [5] Y. Colin de Verdière: *Théorie spectrale des surfaces de Riemann d'aire infinie*, *Astérisque* **132** (1985), 259–275.
- [6] M. Coornaert: *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov*, *Pacific J. Math.*, **159** (1993), 241–270.
- [7] I. Efrat: *Determinants of laplacian on surfaces of finite volume*, *Comm. Math. Phys.* **119** (1988), 443–451.
- [8] E. Ghys et P. de la Harpe: *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, *Progress in mathematics*, **83**, 1990.
- [9] M. Gromov: *Hyperbolic groups*, in 'Essays in group theory', Gersten s. ed., M.S.R.I. Publ. **8**, Springer, p. 75–263, 1987.
- [10] G. Grubb: *Singular Green operators and their spectral asymptotics*, *Duke Math. J.* **51** (1984), 477–528.
- [11] L. Guillopé: *Sur la distribution des longueurs des géodésiques fermées d'une surface compacte à bord totalement géodésique*, *Duke Math. J.* **53** (1986), 827–848.
- [12] L. Guillopé: *Fonctions zêta de Selberg et surfaces de géométrie finite*, *Adv. Stud. Pure Math.*, **21** (1992), 33–70.
- [13] D. Hejhal: *The Selberg trace formula for $PSL(2, R)$, volume 2.*, *Lecture Notes in Math.*, **1001**, Berlin, Heidelberg, New-York, 1983.
- [14] Huber: *Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen*, *Math. Ann.* **138** (1956), 1–26.
- [15] A. Katsuda et T. Sunada: *Closed orbits in homology classes*, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **71** (1990), 5–32.
- [16] S. Lalley: *The packing and the covering functions of some self-similar fractals*, *Indiana Univ. Math. J.* **37** (1988), 699–709.
- [17] S. Lalley: *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, noneuclidean tessellations and their fractal limits*, *Acta Math.* **163** (1989), 1–55.
- [18] P. Lax et R. Phillips: *The asymptotic distribution of lattice points in euclidean and noneuclidean space*, *J. Funct. Anal.* **46** (1982), 280–350.
- [19] A. Manning: *Topological entropy for geodesic flows*, *Ann. of Math.* **110** (1979), 567–573.
- [20] г. Маргулис: *О некоторых вопросах теории u -систем*, диссертация, Москва, 1970.
- [21] D. Mayer: *Selberg's zeta function for $PSL(2, \mathbf{Z})$ via the thermodynamic formalism for the continued fraction map*, preprint, 1990.
- [22] R. Mazzeo et R. Melrose: *Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature*, *J. Funct. Anal.* **75** (1987), 260–310.
- [23] P. Nicholls: *The Ergodic theory of discrete groups*, *London Mathematical Society lecture note series*, Cambridge University Press, **143**, 1989.
- [24] W. Parry et M. Pollicott: *An analogue of the prime number theorem for closed orbits of axiom A flows*, *Ann. of Math.* **118** (1983), 573–591.

- [25] W. Parry et M. Pollicott: *Zeta functions and the periodic structure of hyperbolic dynamics*, Astérisque **187–188**, 1990.
- [26] S.J. Patterson: *On a lattice-point problem in hyperbolic space and related questions in spectral theory*, Ark. Mat. **26** (1988), 167–172.
- [27] S.J. Patterson: *The limit set of a fuchsian group*, Acta Math. **136** (1976), 241–273.
- [28] P. Perry: *The Selberg zeta function and scattering poles for kleinian groups*, Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 327–333.
- [29] M. Pollicott: *Meromorphic extension of generalized zeta-functions*, Invent. Math. **85** (1986), 147–164.
- [30] P. Sarnak: *Determinants of laplacians*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 113–120.
- [31] A. Selberg: *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.
- [32] C. Series: *The infinite word problem and limit sets in fuchsian groups*, Ergodic Theory Dynamical Systems **1** (1981), 337–360.
- [33] D. Sullivan: *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50** (1979), 419–450.
- [34] D. Sullivan: *Entropy, Haussdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite klenian groups*, Acta Math. **153** (1984), 259–277.
- [35] C. Toll: *A multiplicative asymptotic for the prime theorem*, Dissertation, Maryland, 1984.
- [36] A. Voros: *Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 439–465.
- [37] N. Wiener: *The Fourier integral and certain of its applications*, C.U.P., Cambridge, 1967.

Institut Fourier
URA 188 du CNRS
Laboratoire de Mathématiques
BP 74
38402 St MARTIN D'HÈRES Cedex
France

