Dieudonné, Jean
Osaka Math. J.
10 (1958), 75-82

*Remarques sur la Réduction mod. $\mathfrak{p}$ des Groupes Linéaires Algébriques**

Par Jean DIEUDONNÉ

1. Dans un récent travail publié dans ce journal [4], T. Ono a appliqué aux groupes linéaires algébriques la théorie de la réduction mod. $\mathfrak{p}$ due à G. Shimura [5], et obtenu de nombreux résultats intéressants. Toutefois, pour établir une partie de ces résultats, il est amené à utiliser la connection entre un groupe linéaire et son algèbre de Lie, ce qui l'oblige à se limiter au cas où le corps de base est de caractéristique 0. Je me propose de montrer dans cette note comment on peut se débarrasser de cette restriction gênante en utilisant la théorie des hyperalgèbres de Lie[1].

2. Dans tout ce qui suit, K désigne un corps parfait de caractéristique $p>0$, ayant un ensemble infini de valuations discrètes $(w_\lambda)_{\lambda\in L}$; nous conservons les notations $\mathfrak{o}_\lambda$, $\mathfrak{p}_\lambda$ et κ_λ de T. Ono, et nous suppcsons comme lui que tout élément $\neq 0$ de K est une $\mathfrak{p}_\lambda$-unité pour presque tout $\lambda\in L$.

Il nous sera commode de désigner par $s_k\,(1\leq k\leq n^2)$ les "coordonnées" $t_{ij}-\delta_{ij}$ d'une matrice dans le groupe linéaire $GL(n)=GL(n,\,\Omega)$ (Ω domaine universel contenant K).

Lemme 1. *Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n)$, défini sur K, et soit $(F_\rho)\,(1\leq\rho\leq r)$ un système de générateurs de l'idéal de G, ayant leurs coefficients dans K. Pour presque tout $\lambda\in L$, les polynômes F_ρ ont leurs coefficients dans $\mathfrak{o}_\lambda$, et si $A^{(\lambda)}$ est l'ensemble algébrique défini (sur κ_λ) par les équations $F_\rho^{(\lambda)}((s_k))=0$ $(1\leq\rho\leq r)$, la composante connexe de l'élément neutre e dans $A^{(\lambda)}$ est la composante connexe du groupe réduit $G^{(\lambda)}$.*

La première assertion est évidente. Si G est de dimension m, il résulte du critère jacobien de simplicité que la matrice jacobienne des F_ρ (pour $s_k=0$, $1\leq k\leq n^2$) est de rang n^2-m. Pour presque tout λ, les mineurs d'ordre n^2-m de cette matrice qui ne sont pas nuls sont des $\mathfrak{p}_\lambda$-unités, donc la matrice jacobienne des $F_\rho^{(\lambda)}$ est de rang n^2-m. Le critère de

---

* Work done under contract *AF* 49 (638)-106 with the U.S. Air Force.

1) J'utilise dans ce qui suit les notations et résultats de [2] et [3].

simplicité montre alors que la composante connexe de e dans $A^{(\lambda)}$ est de dimension m, donc a même dimension que $G^{(\lambda)}$ [5, prop. 19]; la proposition résulte de ce que $G^{(\lambda)}$ est contenu dans $A^{(\lambda)}$ [5, th. 7].

Corollaire. *Soient G, H deux sous-groupes algébriques de $GL(n)$, définis sur K. Pour presque tout λ, les composantes connexes de e dans $(G\cap H)^{(\lambda)}$ et dans $G^{(\lambda)}\cap H^{(\lambda)}$ sont les mêmes.*

En effet, soient P_i $(1\leq i\leq r)$ (resp. $Q_j\,(1\leq j\leq s)$) des générateurs de l'idéal de G (resp. H) à coefficients dans K. Pour presque tout λ, les coefficients des P_i et Q_j sont dans $\mathfrak{o}_\lambda$; soit $A^{(\lambda)}$ (resp. $B^{(\lambda)}$) l'ensemble algébrique défini par les équations $P_i^{(\lambda)}=0$ (resp. $Q_j^{(\lambda)}=0$). Comme l'idéal de $G\cap H$ est engendré par les P_i et les Q_j, le lemme 1 montre que la composante connexe de $(G\cap H)^{(\lambda)}$ est la même que celle de $A^{(\lambda)}\cap B^{(\lambda)}$ pour presque tout λ; mais le lemme 1 appliqué respectivement à G et à H, prouve aussi que cette composante connexe est celle de $G^{(\lambda)}\cap H^{(\lambda)}$.

Nous désignerons par $\mathfrak{U}$ l'hyperalgèbre de $GL(n)$, par (T_μ) (où $\mu\in \boldsymbol{N}^I$, I étant l'intervalle $1\leq k\leq n^2$) la base structurale de $\mathfrak{U}$ correspondant à la loi de groupe exprimée à l'aide des paramètres s_k; comme cette loi est définie sur le corps premier $\boldsymbol{F}_p$, les coefficients de la table de multiplication de la base (T_μ) appartiennent à $\boldsymbol{F}_p$; nous poserons $S_{hk}=T_{p^h\varepsilon_k}$.

Soit G un sous-groupe algébrique de $GL(n)$, de dimension $m>0$, défini sur K, et soit $\mathfrak{G}$ la sous-hyperalgèbre de $\mathfrak{U}$ qui lui correspond [3]. Si (Z_α) (où $\alpha\in\boldsymbol{N}^J$, J étant l'intervalle $1\leq j\leq m$) est une base structurale de $\mathfrak{G}$, on peut écrire

$$Z_\alpha=\sum_\mu a_{\alpha\mu}T_\mu \qquad (a_{\alpha\mu}\in K)\,. \tag{1}$$

Une autre manière d'interpréter ces formules est de dire qu'il y a un groupe formel G^* de dimension m et un monomorphisme $\boldsymbol{u}=(u_k)$ de G^* dans $GL^*(n)$ ayant pour image le groupe formel correspondant à G et tel que

$$u_k(\boldsymbol{x})=\sum_\alpha a_{\alpha\varepsilon_k}\boldsymbol{x}^\alpha \qquad (1\leq k\leq n^2) \tag{2}$$

et, pour tout $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_{n^2})\in\boldsymbol{N}^I$

$$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))^\mu=\prod_k(u_k(\boldsymbol{x}))^{\mu_k}=\sum_\alpha a_{\alpha\mu}\boldsymbol{x}^\alpha\,. \tag{3}$$

J'ignore s'il est possible de choisir la base structurale (Z_α) de sorte que, pour presque tout $\lambda\in L$, *tous* les éléments $a_{\alpha\mu}$ (ou, ce qui revient au même d'après (3), tous les $a_{\alpha\varepsilon_k}$) soient des $\mathfrak{p}_\lambda$-*entiers*; mais pour notre objet, il nous suffiira d'un résultat plus faible (prop. 1 ci-dessous).

Soit $\mathfrak{H}_m(K)$ une hyperalgèbre de Lie libre à m "générateurs" (U_{hj})

sur K, à loi canonique [2]; avec les notations de [2, p. 215], on a $V_\alpha=\Phi_\alpha((U_{hj}))$, où Φ_α est un polynôme non commutatif par rapport aux U_{hj} $(1\leq j\leq m,\ h\leq h(\alpha))$, à coefficients dans le corps premier $\boldsymbol{F}_p$.

Lemme 2. *Soit (F_ρ) $(1\leq\rho\leq r)$ un système de polynômes à coefficients dans K, tel que la composante connexe de e dans l'ensemble algébrique A défini par les équations $F_\rho=0$ $(1\leq\rho\leq r)$ soit identique à la composante connexe de e dans G. Pour tout entier $t\geq 0$, soit $(b_{\alpha\mu})$ une famille d'éléments de K, où $h(\alpha)\leq t$, $h(\mu)\leq t$, satisfaisant aux conditions suivantes*:

1° *si on pose $Z_\alpha=\sum_\mu b_{\alpha\mu}T_\mu$ pour $h(\alpha)\leq t$, et $X_{hj}=Z_{p^h\varepsilon_j}$ $(1\leq j\leq m,\ 0\leq h\leq t)$, on a $Z_\alpha=\Phi_\alpha((X_{hj}))$ pour $h(\alpha)\leq t$*;

2° *si on pose $u_k^{(t)}(\boldsymbol{x})=\sum_\alpha b_{\alpha\varepsilon_k}\boldsymbol{x}^\alpha (1\leq k\leq n^2)$, pour tout couple d'indices $\mu\in\boldsymbol{N}^I$, $\alpha\in\boldsymbol{N}^J$, de hauteurs $h(\alpha)\leq t$, $h(\mu)\leq t$, le coefficient de $\boldsymbol{x}^\alpha$ dans $\prod_k (u_k^{(t)}(\boldsymbol{x}))^{\mu_k}$ est $b_{\alpha\mu}$*;

3° *si on pose $b_{jk}=b_{\varepsilon_j\varepsilon_k}$ $(1\leq j\leq m,\ 1\leq k\leq n^2)$, la matrice (b_{jk}) est de rang m*;

4° *dans chacun des polynômes $F_\rho((u_k^{(t)}(\boldsymbol{x})))(1\leqslant\rho\leqslant r)$, les coefficients des $x_j^{p^h}(1\leq j\leq m,\ 0\leq h\leq t)$ sont nuls.*

Dans ces conditions, il existe une base structurale (Z_α') de $\mathfrak{G}$ telle que $Z_\alpha'=Z_\alpha$ pour $h(\alpha)\leq t$.

Posons $F_\rho((s_k))=\sum_k f_{\rho k}s_k+\cdots$, les termes non écrits étant de degrés ≥ 2 par rapport à l'ensemble des s_k. Nous démontrerons le lemme par récurrence sur t.

Pour $t=0$, l'hypothèse 4° du lemme se réduit à

$$\sum_k f_{\rho k}b_{jk}=0 \qquad (1\leq j\leq m,\ 1\leq\rho\leq r)\,. \tag{4}$$

Mais on sait que le système d'équations linéaires $\sum_k f_{\rho k}\xi_k=0$ $(1\leq k\leq r)$ est de rang n^2-m, et que lorsque (ξ_k) parcourt l'ensemble des solutions de ce système, $X=\sum_k \xi_k S_{0k}$ parcourt l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Comme par hypothèse la matrice (b_{jk}) est de rang m, les $X_{0j}=\sum_k b_{jk}S_{0k}$ $(1\leq j\leq m)$ forment une base de $\mathfrak{g}$, d'où aussitôt le lemme dans ce cas, vu l'existence des lois de groupe pseudo-canoniques [2, th. 2].

Supposons le lemme démontré jusqu'à l'entier t, et soit $(b_{\alpha\mu})$ une famille vérifiant les conditions du lemme où t est remplacé par $t+1$. Par l'hypothèse de récurrence, il y a un monomorphisme $\boldsymbol{u}$ d'un groupe formel G^* dans $GL^*(n)$, tel que, dans les expressions (2) et (3) on ait $a_{\alpha\mu}=b_{\alpha\mu}$ pour $h(\alpha)\leqslant t$, $h(\mu)\leqslant t$, et que l'on ait $F_\rho(u_k(\boldsymbol{x})))=0$ pour $1\leq\rho\leq r$ [3, p. 364, lemma 2]. En vertu de ces relations et de l'hypothèse 4°, on a donc

$$(5) \qquad \sum_k f_{\rho k}(A_{jk}-B_{jk}) = 0 \qquad (1 \leq j \leq m\,,\ 1 \leq \rho \leq r)$$

où on a posé $A_{jk}=a_{p^{t+1}\varepsilon_j,\varepsilon_k}$ et $B_{jk}=b_{p^{t+1}\varepsilon_j,\varepsilon_k}$. D'après ce qu'on a vu plus haut, il y a donc, pour chaque indice i tel que $1 \leq i \leq m$, une famille (C_{ij}) d'éléments de K $(1 \leq j \leq m)$ telle que l'on ait

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{m} b_{jk}C_{ij} = A_{ik}-B_{ik} \qquad (1 \leq i \leq m)\,.$$

Définissons alors un isomorphisme $\boldsymbol{v} = (v_j)$ d'un groupe formel G'^* sur G^* par les formules

$$(7) \qquad v_j(\boldsymbol{x}') = x_j' - \sum_{i=1}^{m} C_{ij}x_i'^{p^{t+1}} \qquad (1 \leq j \leq m)\,.$$

Si on pose $\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{v} = (u_k^{(1)})$ et $u_k^{(1)}(\boldsymbol{x}') = \sum_\alpha a'_{\alpha\varepsilon_k}\boldsymbol{x}'^\alpha$, il résulte de (6) que l'on a $a'_{\alpha\varepsilon_k} = b_{\alpha\varepsilon_k}$ pour $h(\alpha) \leq t$ et pour $\alpha = p^{t+1}\varepsilon_j$ $(1 \leq j \leq m)$. Par le "procédé standard" [3, p. 335], on peut définir un isomorphisme $\boldsymbol{w} = (w_j)$ d'un groupe formel G''^* sur G'^*, ayant une loi de composition pseudo-canonique et tel que si on pose $\boldsymbol{u}^{(2)} = \boldsymbol{u}^{(1)}\circ\boldsymbol{w} = (u_k^{(2)})$, et $u_k^{(2)}(\boldsymbol{x}'') = \sum_\alpha a''_{\alpha\varepsilon_k}\boldsymbol{x}''^\alpha$, on ait $a''_{\alpha\varepsilon_k} = a'_{\alpha\varepsilon_k} = b_{\alpha\varepsilon_k}$ pour $h(\alpha) \leq t$ et pour $\alpha = p^{t+1}\varepsilon_j (1 \leq j \leq m)$. En vertu de l'hypothèse 1°, on a alors aussi $a''_{\alpha\varepsilon_k} = b_{\alpha\varepsilon_k}$ pour $h(\alpha) \leq t+1$, et en vertu de l'hypothèse 2°, $a''_{\alpha\mu} = b_{\alpha\mu}$ pour $h(\alpha) \leq t+1$ et $h(\mu) \leq t+1$, ce qui achève de démontrer le lemme.

Proposition 1. *Soient G un groupe algébrique de dimension m contenu dans $GL(n)$, (Z_α) une base structurale de son hyperalgèbre, correspondant à une loi de groupe pseudo-canonique, et supposons les Z_α donnés par* (1). *Pour tout entier $t \geq 0$, soit H_t l'ensemble (fini) des $\lambda \in L$ tels que tous les $a_{\alpha\mu}$ pour lesquels $h(\alpha) \leq t$ et $h(\mu) \leq t$ soient des $\mathfrak{p}_\lambda$-entiers pour $\lambda \notin H_t$, et soit $a_{\alpha\mu}^{(\lambda)}$ l'image de $a_{\alpha\mu}$ dans κ_λ pour $\lambda \notin H_t$, $h(\alpha) \leq t$, $h(\mu) \leq t$. Alors il existe une partie finie $H_t' \supset H_t$ de L, telle que pour tout $\lambda \notin H_t'$, il existe une base structurale $(Z_\alpha^{(\lambda)})$ de l'hyperalgèbre du groupe "réduit" $G^{(\lambda)}$ telle que, si on pose $Z_\alpha^{(\lambda)} = \sum_\mu c_{\alpha\mu}^{(\lambda)} T_\mu$, on ait $c_{\alpha\mu}^{(\lambda)} = a_{\alpha\mu}^{(\lambda)}$ pour $h(\alpha) \leq t$ et $h(\mu) \leq t$.*

La matrice (a_{jk}) est évidemment de rang m, donc un au moins de ses mineurs d'ordre m est $\neq 0$. Prenons $H_t' \supset H_t$ tel que, pour $\lambda \notin H'_t$, ce mineur soit une $\mathfrak{p}_\lambda$-unité, que les coefficients de tous les F_ρ soient des $\mathfrak{p}_\lambda$-entiers, et que la composante connexe de e dans $G^{(\lambda)}$ soit égale à la composante connexe de e dans l'ensemble algébrique défini par les équations $F_\rho^{(\lambda)} = 0$ (lemme 1). La matrice $(a_{jk}^{(\lambda)})$ est de rang m; la famille $(a_{\alpha\mu}^{(\lambda)})$ $(h(\alpha) \leq t,\ h(\mu) \leq t)$ vérifie donc les conditions 2°, 3° et 4° du lemme 2 pour tout $\lambda \notin H'_t$. En outre, on a par hypothèse $Z_\alpha = \Phi_\alpha((X_{hj}))$ pour tout indice α; si on pose $Y_\alpha^{(\lambda)} = \sum_\mu a_{\alpha\mu}^{(\lambda)} T_\mu$ pour $h(\alpha) \leq t$, $h(\mu) \leq t$, on a donc $Y_\alpha^{(\lambda)} = \Phi_\alpha((X_{hj}^{(\lambda)}))$ pour $h(\alpha) \leq t$, puisque les coefficients de Φ_α sont des $\mathfrak{p}_\lambda$-entiers pour tout $\lambda \in L$ et appartiennent à $\boldsymbol{F}_p$; la condition 1° du lemme 2 est donc aussi vérifiée, et l'application de ce lemme aux familles $(a_{\alpha\mu}^{(\lambda)})$ démontre la proposition.

3. Nous pouvons maintenant étendre les théorèmes de T. Ono lorsque K est un corps parfait de caractéristique $p>0$.

Proposition 2. *Soient G_1, G_2 deux sous-groupes algébriques connexes de $GL(n)$. Si, pour presque tout λ, les groupes $G_1^{(\lambda)}$ et $G_2^{(\lambda)}$ se centralisent mutuellement, alors G_1 et G_2 se centralisent mutuellement.*

Il suffit de montrer que G_2 est contenu dans la composante connexe du centralisateur de G_1, et pour cela il suffit de prouver que G_1 et G_2 commutent en tant que groupes formels [3, p. 374, cor. 2 to prop. 28]. Supposons le contraire ; il existerait alors un élément X dans l'hyperalgèbre de G_1 et un élément Y dans l'hyperalgèbre de G_2, tels que $[X, Y]\neq 0$ [3, p. 356, prop. 12]. Soient $X=\sum_\mu a_\mu T_\mu$, $Y=\sum_\mu b_\mu T_\mu$, $[X, Y]=\sum_\mu c_\mu T_\mu$; pour presque tout λ, les a_μ, b_μ et c_μ sont des $\mathfrak{p}_\lambda$-entiers, et les éléments $X^{(\lambda)}=\sum_\mu a_\mu^{(\lambda)} T_\mu$, $Y^{(\lambda)}=\sum_\mu b_\mu^{(\lambda)} T_\mu$ appartiennent aux hyperalgèbres de $G_1^{(\lambda)}$ et $G_2^{(\lambda)}$ respectivement, en vertu de la prop. 1 ; en outre, on a $[X^{(\lambda)}, Y^{(\lambda)}] =\sum_\mu c_\mu^{(\lambda)} T_\mu$ puisque les coefficients de la table de multiplication des T_μ sont dans $\boldsymbol{F}_p$; mais pour presque tout λ, ceux des c_μ qui sont $\neq 0$ sont des $\mathfrak{p}_\lambda$-unités, par suite un au moins des $c_\mu^{(\lambda)}$ est $\neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse [3, p. 356, prop. 12] et établit la proposition.

Corollaire. *Si un sous-groupe connexe H d'un groupe algébrique connexe G est tel que, pour presque tout λ, $H^{(\lambda)}$ soit contenu dans le centre de $G^{(\lambda)}$, alors H est contenu dans le centre de G. En particulier, si $G^{(\lambda)}$ est commutatif pour presque tout λ, alors G est commutatif* (cf. [4, prop. 2.16]).

Proposition 3. *Soient G un groupe algébrique connexe, Q un sous-groupe algébrique connexe de G. Si $Q^{(\lambda)}$ est un tore* (resp. *un tore maximal*) *de $G^{(\lambda)}$ pour presque tout λ, Q est un tore* (resp. *un tore maximal*) *de G.*

Compte tenu du cor. de la prop. 2, les démonstrations sont les mêmes que celles des prop. 2.18 et 2.19 de [4], et nous pouvons donc les omettre.

Proposition 4. *Soit G un groupe algébrique connexe. Si $G^{(\lambda)}$ est nilpotent pour presque tout λ, alors G est nilpotent.*

En effet, on sait que G est résoluble [4, prop. 2.11] ; soit Q un tore maximal de G, que l'on peut supposer défini sur K, en remplaçant au besoin K par une extension de degré fini. Alors $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ pour presque tout λ [4, prop. 2.15], donc centralise $G^{(\lambda)}$ [1, prop. 11.4]. On en déduit (cor. de la prop. 2) que Q centralise G et par suite [1, th. 12.2] que G est nilpotent.

Proposition 5. *Soit G un groupe algébrique connexe. Si $G^{(\lambda)}$ est semi-simple* (resp. *simple*) *pour presque tout λ, alors G est semi-simple* (resp. *simple*).

En effet, dans le cas contraire, G contiendrait un sous-groupe distingué connexe nilpotent (resp. un sous-groupe distingué connexe) N de dimension >0 (resp. de dimension >0 et distinct de G) ; par suite, pour presque tout λ, $N^{(\lambda)}$ serait un sous-groupe de même nature dans $G^{(\lambda)}$ [4, cor. 1.5 et 1.8], contrairement à l'hypothèse.

4. Pour aller plus loin, nous allons d'abord donner, pour le centralisateur d'un sous-groupe de $GL(n)$, une description légèrement différente de celle indiquée dans [3, pp. 371-373].

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal dans l'anneau des séries formelles $\boldsymbol{F}_p[[s_1, \cdots, s_{n^2}]]$, et pour tout $r>0$, soit $\mathfrak{n}_r$ l'idéal de cet anneau engendré par les puissances $s_k^{p^r}$ $(1\leq k\leq n^2)$. Pour toute matrice $x\in GL(n)$ de coordonnées x_k, et toute série formelle $f\in\mathfrak{m}$, on peut écrire $f(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}^{-1})=\sum_\mu R_\mu(x)\boldsymbol{s}^\mu$, où les R_μ sont des fractions rationnelles par rapport aux x_k, à coefficients dans $\boldsymbol{F}_p$. En particulier, pour tout indice $\mu=(\mu_k)$ de hauteur $h(\mu)<r$, on peut écrire.

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}^{-1})^\mu\equiv\sum_{h(\nu)<r}c_{\mu\nu}(x)\boldsymbol{s}^\nu \qquad (\text{mod. } \mathfrak{n}_r)$$

où les $c_{\mu\nu}(x)$ sont rationnelles, et si on désigne par $w_r(x)$ la matrice $(c_{\mu\nu}(x))$ d'ordre n^{2p^r}, w_r est un homomorphisme rationnel de $GL(n)$ dans $GL(n^{2p^r})$, défini sur $\boldsymbol{F}_p$. Les formules précédentes entraînent, pour l'automorphisme a'_x de l'hyperalgèbre $\mathfrak{U}$, dérivé de l'automorphisme intérieur a_x: $s\rightarrow xsx^{-1}$ de $GL(n)$, les formules

$$(8) \qquad a'_x(T_\mu)=\sum_\nu c_{\nu\mu}(x)T_\nu \qquad (h(\mu)<r,\ h(\nu)<r)\ ;$$

on observera que ces formules définissent un automorphisme de la sous-algèbre $\mathfrak{S}_{r-1}\subset\mathfrak{U}$ des semi-dérivations spéciales invariantes de hauteur r.

Cela étant, soient G un sous-groupe algébrique connexe de $GL(n)$, défini sur K, $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{U}$ son hyperalgèbre. Si G' est le centralisateur de G dans $GL(n)$, il existe un entier r assez grand, tel que G' soit l'ensemble des matrices x ayant la propriété que la restriction de ${}^tw_r(x)$ à $\mathfrak{S}_{r-1}\cap\mathfrak{G}$ soit l'identité [3, pp. 371-373].

Proposition 6. *Soient G un sous-groupe algébrique connexe de $GL(n)$, défini sur K, G'_0 son centralisateur connexe dans $GL(n)$. Pour presque tout $\lambda\in L$, $G_0'^{(\lambda)}$ est le centralisateur connexe de $G^{(\lambda)}$ dans $GL(n, \Omega_\lambda)$.*

En effet, il y a une base structurale (Z_α) de $\mathfrak{S}_{r-1}\cap\mathfrak{G}$, donnée par

$Z_\alpha = \sum_\mu b_{\alpha\mu} T_\mu$, telle que, pour presque tout λ, les $Z_\alpha^{(\lambda)} = \sum_\mu b_{\alpha\mu}^{(\lambda)} T_\mu$ forment une base structurale de $\mathfrak{s}_{r-1} \cap \mathfrak{G}^{(\lambda)}$ (prop. 1). Le centralisateur G' de G est défini en écrivant que ${}^t w_r(x)$ laisse invariants les Z_α $(h(\alpha) < r)$, donc par les conditions

$$\sum_\nu b_{\alpha\nu} c_{\mu\nu}(x) = b_{\alpha\mu} \qquad (h(\alpha) < r,\ h(\mu) < r)\,. \tag{9}$$

Comme les $c_{\mu\nu}(x)$ sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\boldsymbol{F}_p$, et que $G_0'^{(\lambda)}$ est connexe pour presque tout λ [5, th. 26], il résulte du lemme 1 que pour presque tout $\lambda \in L$, $G_0'^{(\lambda)}$ est la composante connexe de e dans l'ensemble algébrique défini (dans $GL(n, \Omega_\lambda)$) par les équations

$$\sum_\nu b_{\alpha\nu}^{(\lambda)} c_{\mu\nu}(x) = b_{\alpha\mu}^{(\lambda)} \qquad (h(\alpha) < r,\ h(\mu) < r)\,. \tag{10}$$

Cela montre que $G_0'^{(\lambda)}$ contient le centralisateur connexe de $G^{(\lambda)}$ pour presque tout λ; mais il est d'autre part contenu dans ce centralisateur connexe pour presque tout λ [4, prop. 1.2], d'où la proposition.

Corollaire. *Soient H un sous-groupe connexe de G, C son centralisateur connexe dans G. Pour presque tout λ, $C^{(\lambda)}$ est le centralisateur connexe de $H^{(\lambda)}$ dans $G^{(\lambda)}$.*

En effet, C est la composante connexe de e dans $G \cap H_0'$ (H_0' centralisateur connexe de H dans $GL(n)$) ; le corollaire résulte donc de la prop. 6 et du corollaire du lemme 1.

Proposition 7. *Soient H un sous-groupe connexe de G, N son normalisateur connexe dans G. Pour presque tout λ, $N^{(\lambda)}$ est le normalisateur connexe de $H^{(\lambda)}$ dans $G^{(\lambda)}$.*

Nous omettons la démonstration de cette proposition, qui est tout à fait analogue à celle de la prop. 6 et de son corollaire.

Proposition 8. *Soient G un sous-groupe algébrique connexe de $GL(n)$, C un sous-groupe algébrique connexe de G. Pour que C soit un sous-groupe de Cartan de G, il faut et il suffit que, pour presque tout $\lambda \in L$, $C^{(\lambda)}$ soit un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$* (cf. [4, th. 2.30] pour la caractéristique 0).

Si C est un sous-groupe de Cartan de G, c'est par définition le centralisateur connexe d'un tore maximal Q de G; pour presque tout $\lambda \in L$, $Q^{(\lambda)}$ est un tore maximal de $G^{(\lambda)}$ [4, prop. 2.15], et $C^{(\lambda)}$ est son centralisateur connexe (cor. de la prop. 6), donc un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$. Inversement, si $C^{(\lambda)}$ est un sous-groupe de Cartan de $G^{(\lambda)}$ pour presque tout $\lambda \in L$, C est un sous-groupe nilpotent maximal de G (prop. 4) ; il suffit de démontrer que le normalisateur connexe N de C est égal à C

[1, 20.2]. Or $N^{(\lambda)}$ est pour presque tout $\lambda \in L$, le normalisateur connexe de $C^{(\lambda)}$ (prop. 7), donc égal à $C^{(\lambda)}$ par hypothèse, et par suite les dimensions de N et de C sont égales [5, prop. 19], d'où la conclusion.

Northwestern University

(Reçu le 27 Février 1958)

Bibliographie

[1] A. Borel: Groupes linéaires algébriques, Ann. of Math. **64** (1956), 20–82.

[2] J. Dieudonné: Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p>0$ (V), Bull. Soc. Math. France, **84** (1956), 207–239.

[3] J. Dieudonné: Lie groups and Lie hyperalgebras over a field of characteristic $p>0$ (VI), Amer. J. Math. **79** (1957), 331–388.

[4] T. Ono: Sur la réduction modulo $\mathfrak{p}$ des groupes linéaires algébriques, Osaka Math. J. **10** (1958), 57–73.

[5] G. Shimura: Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field, Amer. J. Math. **77** (1955), 134–176.