ÜBER EINE ÜBERTRAGUNG ZWISCHEN RANDWERTAUFGABEN

FÜR EINEN KREISRING

Von Yûsaku KOMATU

1. Einleitung.

Die Integralformeln, um die Dirichletsche Randwertaufgabe für einen Kreisring zu lösen, wurden schon früher von verschiedenen Verfassern expliziterweise aufgestellt.[1] Davon anschließend hat der Verfasser der vorliegenden Note eine explizite Integralformel hergeleitet, welche die Lösung der Neumannschen Randwertaufgabe für einen Kreisring darstellt.[2] In einer anderen Note[3] hat er ferner die Übertragung zwischen diesen zwei Arten der Randwertaufgaben für einige einfach zusammenhängende kanonische Grundgebiete behandelt.

Nun wird sich zeigen, daß sich die in der letztgenannten Note benutzte Methode auch auf den Fall des Kreisrings wohl anwenden läßt und zwar der Umstand dabei der ganzen Glattheit des Randes gemäß mehr einfach ist. Von diesem Standpunkte aus soll in der vorliegenden Note das in der genannten Note[2] behandelte Problem wieder erörtert werden.

2. Einige Vorbereitungssätze.

Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der eine formale Identität enthält.

Hilfssatz **1.** Es sei $u(re^{i\theta})$ eine im auf der $z=re^{i\theta}$ -Ebene gelegenen Kreisring R: $q<r<1$ eindeutige Funktion, die bezüglich r und θ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann ist, für ein beliebig festes r_0 mit $q<r_0<1$, die durch die Gleichung

$$w(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt$$

definierte Funktion auch dort eindeutig und sogar genügt sie der Beziehung

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}t\Delta u(te^{i\theta})dt+\gamma(\theta),$$

worin Δ den Laplaceschen Operator bedeutet und ferner gesetzt ist:

$$\gamma(\theta)=r_0 u_r(r_0e^{i\theta}).$$

Beweis. Die Eindeutigkeit von $w(re^{i\theta})$ ist unmittelbar ersichtlich. Ferner gewinnt man durch direkte Berechnung

$$\begin{aligned}
r^2\Delta w(re^{i\theta})
&=r^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt\\
&=r\frac{\partial}{\partial r}u(re^{i\theta})+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt\\
&=\int_{r_0}^{r}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)+\frac{1}{t}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}u(te^{i\theta})dt+r_0u_r(r_0e^{i\theta})\\
&=\int_{r_0}^{r}t\Delta u(te^{i\theta})dt+\gamma(\theta).
\end{aligned}$$

Von nun an wollen wir unsere Überlegung hauptsächlich auf harmonische Funktionen beschränken. In diesem Falle zieht der Hilfssatz 1 sofort nach sich den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz **2.** Wenn $u(re^{i\theta})$ in R eindeutig und harmonisch ist und $w(re^{i\theta})$ wieder wie im Hilfssatz definiert wird, dann stellt der Ausdruck

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})\equiv r^2\Delta\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt$$

eine in R eindeutige Funktion dar, welche von r unabhängig ist. Es besteht sogar

$$r^2\Delta w(re^{i\theta})=r_0u_r(r_0e^{i\theta}).$$

Der soeben hergeleitete Hilfssatz 2 kann auch mittels der Reihenentwicklung bestätigt werden. In der Tat sei die Entwicklung der harmonischen Funktion $u(re^{i\theta})$ dargestellt durch

$$u(re^{i\theta}) = a\lg r + a_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' r^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta),$$

wobei $\sum'$ die Weglassung des Summanden mit $n=0$ bedeutet. Daraus gewinnt man

$$w(re^{i\theta}) = \Big[\frac{a}{2}\lg^2 t + a_0\lg t + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{t^n}{n}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)\Big]_{r_0}^{r}$$

und somit ferner die gewünschte Beziehung

$$r^2\Delta w(re^{i\theta}) = a + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' n r_0^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta) = r_0 u_r(r_0e^{i\theta}).$$

Nun sei $u(re^{i\theta})$ wieder eine in R eindeutige und harmonische Funktion. Ihre konjugiert harmonische Funktion bezeichne man mit $\tilde{u}(re^{i\theta})$, die bekanntlich bis auf eine additive Konstante bestimmt wird. Der oben genannten Entwicklung von $u(re^{i\theta})$ gemäß läßt sich die analytische Funktion $f(z) = u + i\tilde{u}$ in der Form

$$f(z) = a\lg z + a_0 + ib + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_n z^n,$$

$$c_n = a_n - ib_n \quad (n=\pm1, \pm2, \ldots),$$

darstellen. Hierbei bedeutet b eine reelle Konstante, welche bestimmt wird durch

$$b = \mathfrak{J}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r_0}\frac{f(\zeta)-a\lg\zeta}{\zeta}d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{J}f(r_0e^{i\psi})d\psi - \pi a.$$

Die harmonische Funktion $\tilde{u}(re^{i\theta})$ und also zugleich auch die analytische Funktion $f(z)$ sind eindeutig dann und nur dann, wenn $a=0$ ist. Im allgemeinen ist der Mittelwert von $u(re^{i\theta})$ längs einer Kreisperipherie um den Ursprung gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta = a\lg r + a_0 \quad (q<r<1).$$

Es sei nun $q<r_1<r_2<1$. Dann wird

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u(r_2e^{i\theta}) - u(r_1e^{i\theta}))d\theta = a\lg\frac{r_2}{r_1}.$$

Die Bedingung $a=0$ dafür, daß $\tilde{u}(re^{i\theta})$ als auch $f(z)$ in R eindeutig sind, ist daher äquivalent mit dem Bestehen von

$$\int_0^{2\pi}(u(r_2e^{i\theta}) - u(r_1e^{i\theta}))d\theta = 0$$

für irgendsolches Paar von r_1 und r_2. Wenn $u(re^{i\theta})$ insbesondere im abgeschlossenen Kreisring stetig bleibt, so läßt sich die Bedingung in der Form

$$\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})d\theta = \int_0^{2\pi}u(qe^{i\theta})d\theta$$

darstellen, welche üblich als die Monodromiebedingung bekannt ist.

Andereseits erhält man aus der Gleichung

$$\gamma(\theta) \equiv r_0u_r(r_0e^{i\theta}) = a + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' n r_0^n(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$$

die Beziehung

$$a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\theta)d\theta$$

oder

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_r(r_0e^{i\theta})d\theta = \frac{a}{r_0}.$$

Folglich läßt sich die Monodromiebedingung auch in der Form

$$\int_0^{2\pi}u_r(re^{i\theta})d\theta = 0$$

darstellen mit irgendeinem beliebigen r. Aber diese Tatsache ist auch unmittelbar ersichtlich. In der Tat liefert die Cauchy-Riemannsche Gleichung $ru_r = \tilde{u}_\theta$ die Beziehung

$$a = \frac{1}{2\pi}r\int_0^{2\pi}u_r(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}d\tilde{u}(re^{i\theta});$$

nämlich stellt $2\pi a$ nichts anders als den Periodizitätsmodul von $\tilde{u}$ dar.

Wir können nun einen Satz erwähnen, der unserer späteren Überlegung zugrunde liegt.

Satz **1**. Es sei $f(z)$ eine in R regulär analytische Funktion, deren reeller Teil $u(re^{i\theta})=\Re f(re^{i\theta})$ dort eindeutig ist. Dann besitzt die durch

$$g(z)=\int_{r_0}^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{a}{2}\lg^2 z-ib\lg z$$

$$(q<r_0<1)$$

definierte Funktion auch dort den eindeutigen reellen Teil $v(re^{i\theta}) = \Re g(re^{i\theta})$, worin beide Konstanten a und b die durch 2π dividierten Periodizitätsmodul von

$$\Im f(z) \text{ bzw. } \Im\left(\int^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{a}{2}\lg^2 z\right)$$

bedeuten.

Beweis. Da angenommen ist, daß $\Re f(z)$ eindeutig ist, stellt die reelle Konstante a den durch $2\pi i$ dividierten Periodizitätsmodul von $f(z)$ dar, woraus die Eindeutigkeit von $\Re g(z)$ folgt.

Die Entwicklung von $f(z)$ sei

$$f(z)=a\lg z+a_0+ib+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' c_n z^n,$$

$$c_n=a_n-ib_n \quad (n=\pm1,\pm2,\dots).$$

Durch Integrieren in bezug auf ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} g(z)&=\int_{r_0}^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{a}{2}\lg^2 z-ib\lg z\\ &=a_0\lg z-\Big(\frac{a}{2}\lg^2 r_0+(a_0+ib)\lg r_0\\ &\quad+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{n}r_0^n\Big)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{c_n}{n}z^n, \end{aligned}$$

woraus sich wieder die Eindeutigkeit von $\Re g(z)$ schließen läßt.

Durch Trennung des reellen Teils der im Satz 1 erwähnten Beziehung erhält man den folgenden Satz.

Satz **2**. Es sei $u(re^{i\theta})$ eine in R eindeutige und harmonische Funktion. Dann ist die durch

$$v(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt-\int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi$$

$$-(\tilde{u}(r_0)-b)\theta-\frac{a}{2}(\lg^2 r-\theta^2)$$

definierte Funktion auch dort eindeutig und harmonisch, worin gesetzt sind:

$$\gamma(\theta)=r_0 u_r(r_0e^{i\theta}),$$

$$a=\frac{1}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\gamma(\theta)d\theta,$$

$$b=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(r_0e^{i\theta})d\theta-\pi a.$$

Hierbei bedeutet $\tilde{u}$ eine zu u konjugiert harmonische Funktion, deren willkürlich gebliebene additive Konstante ersichtlich auf den Wert von $\tilde{u}(r_0)-b$ keinen Einfluß ausübt.

Beweis. Zuerst ergibt sich für die in Satz 2 eingeführte analytische Funktion $g(z)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} &\Re g(re^{i\theta})\\ &=-\int_0^{\theta}\tilde{u}(r_0e^{i\theta})d\theta+\int_{r_0}^{r}\frac{u(re^{i\theta})}{r}dr\\ &\quad-\frac{a}{2}(\lg^2 r-\theta^2)+b\theta. \end{aligned}$$

Auf Grund der Cauchy-Riemannschen Gleichung läßt sich das erste Integral der rechten Seite umformen in die Form

$$\begin{aligned} &\int_0^{\theta}\tilde{u}(r_0e^{i\theta})d\theta\\ &=\int_0^{\theta}\left(\int_0^{\theta}\tilde{u}_\theta(r_0e^{i\theta})d\theta+\tilde{u}(r_0)\right)d\theta\\ &=\int_0^{\theta}\left(\int_0^{\theta}r_0u_r(r_0e^{i\theta})d\theta+\tilde{u}(r_0)\right)d\theta\\ &=\int_0^{\theta}d\theta\int_0^{\theta}\gamma(\theta)d\theta+\tilde{u}(r_0)\theta\\ &=\int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi+\tilde{u}(r_0)\theta, \end{aligned}$$

womit sich ergibt

$$\Re g(re^{i\theta})=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt-\int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi$$

$$-(\tilde{u}(r_0)-b)\theta-\frac{a}{2}(\lg^2 r-\theta^2)=v(re^{i\theta}),$$

was nach Satz 2 ersichtlich die Eindeutigkeit und die Harmonizität von $v(re^{i\theta})$ zeigt.

Ferner ist nebenbei zu bemerken, daß sich die Funktion

$$\mathcal{R}\left\{\int_{r_0}^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{a}{2}\lg^2 z - iB\lg z\right\}$$
$$=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt - \int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi$$
$$-(\tilde{u}(r_0)-B)\theta - \frac{a}{2}(\lg^2 r-\theta^2)$$

mit einer reellen Konstante B dann und nur dann in R eindeutig verhält, wenn B mit eben genanntem b, nämlich mit dem Periodizitätsmodul von

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{r_0}^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - \frac{a}{2}\lg^2 z\right)$$

zusammenfällt, welcher auch als den imaginären Teil des konstanten Gliedes der Laurentschen Entwicklung von $f(z)-a\lg z$ um den Ursprung erklärt werden kann.

Wenn insbesondere $f(z)=u+i\tilde{u}$ selbst eindeutig ist, dann gilt $a=0$ und somit

$$g(z)=\int_{r_0}^{z} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta} - ib\lg z,$$
$$v(z)=\mathcal{R}g(z)$$
$$=\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt - \int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi$$
$$-(\tilde{u}(r_0)-b)\theta.$$

Zum Schluß bemerke man weiter, daß die Harmonizität der im Satz 2 genannten Funktion $v(re^{i\theta})$ auch aus Hilfssatz 2 unmittelbar folgt. In der Tat erhält man

$$r^2\Delta v(re^{i\theta})$$
$$=r^2\Delta\int_{r_0}^{r}\frac{u(te^{i\theta})}{t}dt - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\int_0^{\theta}(\theta-\psi)\gamma(\psi)d\psi$$
$$=r_0 u_r(r_0e^{i\theta}) - \gamma(\theta)=0.$$

3. Übertragung zwischen Randwertaufgaben.

Durch Differenzieren der im Satz 2 angegebene Gleichung in bezug auf r ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\partial v(re^{i\theta})}{\partial r}=\frac{1}{r}(u(re^{i\theta})-a\lg r),$$

worin die Konstante a durch

$$a=-\frac{1}{2\pi\lg q}\int_0^{2\pi}(u(e^{i\theta})-u(qe^{i\theta}))d\theta$$

geliefert wird, insofern $u(re^{i\theta})$ auf $q\leq|z|\leq 1$ stetig bleibt. Diese Beziehung deutet eine Möglichkeit der Übertragung zwischen den Dirichletschen sowie Neumannschen Randwertaufgaben an, welche die verwandten Randbedingungen tragen:

$$u=\begin{cases}M(\theta),\\ N(\theta);\end{cases}\quad \frac{\partial v}{\partial \nu}=\begin{cases}-M(\theta),\\ \frac{1}{q}(N(\theta)-a\lg q)\end{cases}$$

für

$$r=\begin{cases}1,\\ q\end{cases}$$

oder

$$u=\begin{cases}-P(\theta),\\ qQ(\theta)+a\lg q;\end{cases}\quad \frac{\partial v}{\partial \nu}=\begin{cases}P(\theta),\\ Q(\theta)\end{cases}$$

für

$$r=\begin{cases}1,\\ q.\end{cases}$$

Im folgenden sollen wir diese Möglichkeit ausführlicherweise feststellen.

Satz 3. Es seien $v(z)=\mathcal{R}g(z)$ und $u(z)=\mathcal{R}f(z)$, wo $g(z)$ und $f(z)$ beide analytisch sind, die Lösungen der Neumannschen sowie Dirichletschen Randwertaufgaben mit den Randbedingungen

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}=\begin{cases}P(\theta),\\ Q(\theta);\end{cases}\quad u=\begin{cases}-P(\theta),\\ qQ(\theta)\end{cases}$$

für

$$z=\begin{cases}e^{i\theta},\\ qe^{i\theta},\end{cases}$$

worin $\partial/\partial\nu$ die Differentiation längs innerhalb gerichteter Normale bedeutet. Dann gilt die Beziehung

$$f(z)=zg'(z)+ib,$$

wo b eine reelle Konstante ist.

Beweis. Die Bedingung für die Auflösbarkeit der Neumannschen Aufgaben lautet bekanntlich

$$\int_0^{2\pi}(P(\theta)+q Q(\theta))d\theta=0.$$

Sogar stellt sie zugleich auch die Monodromiebedingung für $f(z)$ dar. Andererseits ist $zg'(z)$ auch in R eindeutig. Die eindeutige regulär analytische Funktion $f(z)-zg'(z)$ besitzt den reellen Teil $u-r\partial v/\partial r$, welcher längs des ganzen Randes überall verschwindet. Deshalb muß sie mit einer rein imaginären Konstante zusammenfallen, die mit $i b$ bezeichnet werden mag.

Die Übertragung zwischen den beiden Randwertaufgaben läßt sich nun durchführen wie in den folgenden Sätzen erwähnt wird.

Satz 4. Gestellt sei eine Dirichletsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\theta})=M(\theta),$$
$$u(qe^{i\theta})=N(\theta).$$

Man löse zuerst durch $v(z)=\mathcal{R}g(z)$ mit analytischem $g(z)$ eine assozierte Neumannsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(e^{i\theta})=-M(\theta),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(qe^{i\theta})=\frac{1}{q}(N(\theta)-a\lg q),$$

worin gesetzt ist

$$a=-\frac{1}{2\pi\lg q}\int_0^{2\pi}(M(\theta)-N(\theta))\,d\theta.$$

Die Lösung $u(z)=\mathcal{R}f(z)$ der ursprünglichen Dirichletschen Aufgabe wird dann geliefert durch

$$f(z)=zg'(z)+a\lg z.$$

Beweis. Die Auflösbarkeitsbedingung für die Neumannsche Aufgabe ist gewiß erfüllt; nämlich gilt

$$\int_0^{2\pi}\left\{-M(\theta)+q\cdot\frac{1}{q}(N(\theta)-a\lg q)\right\}d\theta=0.$$

Da die Mehrdeutigkeit von $g(z)$ sich nur auf einen Periodizitätsmodul des imaginären Teils bezieht, so ist $g'(z)$ eindeutig. Daher ist $u(z)=\mathcal{R}zg'(z)+a\lg|z|$ auch eindeutig. Ferner genügt u der Randbedingung

$$u(e^{i\theta})=M(\theta),$$
$$u(qe^{i\theta})=q\cdot\frac{1}{q}(N(\theta)-a\lg q)+a\lg q=N(\theta).$$

Satz 5. Gestellt sei eine Neumannsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(e^{i\theta})=P(\theta),$$
$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(qe^{i\theta})=Q(\theta);$$
$$\int_0^{2\pi}(P(\theta)+qQ(\theta))\,d\theta=0.$$

Man löse zuerst durch $u(z)=\mathcal{R}f(z)$ mit analytischem $f(z)$ eine assozierte Dirichletsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\theta})=-P(\theta),$$
$$u(qe^{i\theta})=qQ(\theta).$$

Die Lösung $v(z)=\mathcal{R}g(z)$ der ursprünglichen Neumannschen Aufgabe wird dann geliefert durch

$$g(z)=c+\int_{r_0}^{z}f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}-ib\lg z,$$

wo c eine beliebige Konstante ist und b eine reelle Konstante:

$$b=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{J}f(r_0e^{i\psi})\,d\psi$$

bedeutet; hierbei mag r_0 eine beliebige positive Zahl sein, sofern $q<r_0<1$ ist.

Beweis. Die die Auflösbarkeit der Neumannschen Aufgabe sicherstellende Nebenbedingung zieht nach sich die Eindeutigkeit von $f(z)$, woraus weiter die von $g(z)$ folgt. Aus der Beziehung $zg'(z)=f(z)-ib$ ergibt sich, daß $v(z)=\mathcal{R}g(z)$ die gestellts Randbedingung erfüllt:

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(e^{i\theta})=\Big[-\mathcal{R}zg'(z)\Big]^{z=e^{i\theta}}=P(\theta),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(qe^{i\theta})=\Big[\frac{1}{q}\mathcal{R}zg'(z)\Big]^{z=qe^{i\theta}}=Q(\theta).$$

4. Übertragung der expliziten Integralformeln.

Auf Grund der Sätze 4 und 5 lassen sich die expliziten Integraldarstellungen für die Lösungen der Dirichletschen und Neumannschen Aufgaben im Kreisring $q<|z|<1$ untereinander übertragen. Nämlich, sobald eine Darstellung bezüglich einer Aufgabe gewonnen wird, dann läßt sie sich in die entsprechende Darstellung bezüglich anderer übertragen. Im folgenden soll zuerst die Übertragung aus der Villatschen Formel bezüglich der Dirichletschen Aufgabe in diejenige Formel bezüglich der Neumannschen Aufgabe durchgeführt werden, welche früher[2)] auf einem etwas anderen Wege hergeleitet worden ist.

Es sei eine Neumannsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(e^{i\theta})=P(\theta),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(qe^{i\theta})=Q(\theta);$$

$$\int_0^{2\pi}(P(\theta)+qQ(\theta))\,d\theta=0,$$

gestellt. Die assozierte Dirichletsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\theta})=-P(\theta),$$

$$u(qe^{i\theta})=qQ(\theta)$$

besitzt die Lösung $u(z)$, die mit dem reellen Teil einer eindeutigen analytischen Funktion $f(z)$ zusammenfällt. Die Villatsche Formel liefert dann die Darstellung

$$f(z)=\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}(-P(\varphi))\zeta\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}qQ(\varphi)\zeta_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi;$$

hier und im folgenden beziehen sich die Bezeichungen auf die Weierstraßische Theorie der elliptischen Funktionen mit den primitiven Perioden $2\omega_1$ (reell) und $2\omega_3$ (rein imaginär), die der einzigen Beziehung genügen:

$$\omega_3/\omega_1=-i\lg q/\pi.$$

Der Satz 5 besagt, daß die Lösung $v(z)=\mathcal{R}g(z)$ der ursprünglichen Neumannschen Aufgabe durch

$$g(z)=c+\int_{\xi=r_0}^{z}f(\xi)\,d\lg\xi-i\ell\lg z$$

geliefert wird. Durch Einsetzen der Darstellung für $f(\xi)$ erhält man nach Integration in bezug auf $\lg\xi$ den expliziten Ausdruck

$$g(z)=c+\Big[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi)\lg\sigma\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg\xi+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}qQ(\varphi)\lg\sigma_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg\xi+\varphi)\Big)d\varphi\Big]_{\xi=r_0}^{z}$$
$$-i\ell\lg z.$$

Die reelle Konstante ℓ wird, wie schon bemerkt wurde, bestimmt durch

$$\ell=\mathcal{J}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r_0e^{i\psi})\,d\psi$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\int_{\xi=r_0}^{r_0e^{2\pi i}}f(\xi)\,d\lg\xi$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\Big[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi)\lg\sigma\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg\xi+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}qQ(\varphi)\lg\sigma_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg\xi+\varphi)\Big)d\varphi\Big]_{\xi=r_0}^{r_0e^{2\pi i}}$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\mathcal{R}\Big\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi)\Big(-2\eta_1\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg r_0-2\pi+\varphi)+\omega_1\Big)+i\pi\Big)d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}qQ(\varphi)\Big(-2\eta_1\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg r_0-2\pi+\varphi)+\omega_1\Big)\Big)d\varphi\Big\}$$
$$=\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi(P(\varphi)+qQ(\varphi))\,d\varphi;$$

hierbei ist die Nebenbedingung der ursprünglichen Aufgabe in Betracht gezogen worden. Somit erhält man schließlich die gewünschte Formel in der Gestalt

$$g(z)=c^*$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}P(\varphi)\lg\sigma\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}qQ(\varphi)\lg\sigma_3\Big(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\Big)d\varphi$$
$$-i\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\lg z\int_0^{2\pi}\varphi(P(\varphi)+qQ(\varphi))\,d\varphi,$$

worin c^* wieder eine willkürlich wählbare Konstante bedeutet. Die letzte Formel fällt natürlich mit der in der früheren Note[2] hergeleiteten völlig zusammen.

Zum Schluß sollen wir gelegentlich noch zeigen, daß sich die Villatsche Formel auf umgekehrtem Wege aus der letzten herleiten läßt. Nun werde eine Dirichletsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$u(e^{i\theta})=M(\theta), \qquad u(qe^{i\theta})=N(\theta)$$

gestellt. Nach dem Satz 4 geht man dann von einer analytischen Funktion

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(-M(\varphi))\lg\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(N(\varphi)-a\lg q)\lg\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &-i\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\lg z\int_0^{2\pi}\varphi(-M(\varphi)+N(\varphi)-a\lg q)d\varphi \end{aligned}$$

aus, deren reeller Teil $v(z)=\Re g(z)$ die Neumannsche Aufgabe mit der Randbedingung

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(e^{i\theta})=-M(\theta),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(qe^{i\theta})=\frac{1}{q}(N(\theta)-a\lg q);$$

$$a=-\frac{1}{2\pi\lg q}\int_0^{2\pi}(M(\theta)-N(\theta))d\theta,$$

löst. Dementsprechend ergibt sich nun für die Lösung $u(z)=\Re f(z)$ der ursprünglichen Dirichletschen Aufgabe die Darstellung

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{dg(z)}{d\lg z}+a\lg z \\ &= \frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &+\frac{2\eta_1}{\pi i}a\lg q\left(\frac{\omega_1}{\pi}i\lg z+\omega_1\right) \\ &+\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3 i}\int_0^{2\pi}\varphi(-M(\varphi)+N(\varphi)-a\lg q)d\varphi \\ &+a\lg z \\ &= \frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}M(\varphi)\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\int_0^{2\pi}N(\varphi)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}(i\lg z+\varphi)\right)d\varphi \\ &-\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\lg z\int_0^{2\pi}(M(\varphi)-N(\varphi))d\varphi \\ &+i\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^3}\int_0^{2\pi}\varphi(M(\varphi)-N(\varphi))d\varphi. \end{aligned}$$

Da das letzte Glied offenbar eine rein imaginäre Größe ist, so liefert die letzte Darstellung wesentlich gerade die Villatsche Formel. Bei der oben durchgeführten umgekehrten Übertragung ist tatsächlich derjenige Fall der soeben hergeleiteten Formel benutzt worden, worin die Monodromie-bedingung erfüllt ist.

LITERATURVERZEICHNIS

1) H. Villat, Le problème de Dirichlet dans un aire annulaire. Rend. del Circ. Mat. di Palermo 33 (1912), 134-175; D. Dini, Il problema di Dirichlet in un'area anulare, e nello spazio compreso fra due sfere concentriche. Ibid. **36** (1913), 1-28; B. Demtchenko, Sur la formule de M. H. Villat résolvant le problème de Dirichlet dans un annueau circulaire. Journ. de Math. Pures et Appl. **10** (1931), 201-211; Y. Komatu, Sur la représentation de Villat pour les fonctions analytiques définies dans un anneau circulaire concentrique. Proc. Imp. Acad. Tokyo **21** (1945), 94-96.

2) Y. Komatu, Integralformel betreffend Neumannsche Randwertaufgabe für einen Kreisring. Kōdai Math. Sem. Rep. (1953), 37-40.

3) Y. Komatu, On transference of boundary value problems. Kōdai Math. Sem. Rep. (1954), 71-80; A supplement to "On transference of boundary value problems". Ibid. (1954), 97-100.

Mathematisches Seminar,
Institut für Technologie zu Tokyo.

(*) Eingegangen am 8. Oktober, 1954.