NGUYEN HUYNH PHAN
KODAI MATH. J.
17 (1994), 650—668

TOPOLOGIE DE L'ESPACE DES SYSTEMES LINEAIRES HAMILTONIENS ANTISYMETRIQUES ACCESSIBLES ET OBSERVABLES

BY NGUYEN HUYNH PHAN

Résumé

Nous calculons dans cet article des groupes d'homotopies et des groupes d'homologies de l'espace $\mathrm{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ des systèmes linéaires Hamiltoniens antisymétriques accessibles et observables. En particulier, en utilisant des suites spectrales, dans quelque cas, nous obtenons complétement l'homologie de $\mathrm{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. Appliquant ces résultats de topologiqe algébrique, on peut donner des réponses à des questions ouvertes de la théorie des systèmes linéaires.

I. Introduction

Soient A, B et C trois matrices complexes d'ordres respectivement $n \times n$, $n \times m$ et $p \times n$. Un système linéaire à coefficients complexes est donné par l'application entrée-sortie

$$y(s) = C(sI_n - A)^{-1}Bu(s) \tag{1}$$

ou donné de façon équivalente (voir Hinrichsen e.a. [20], Kalman e.a. [23]) par des équations d'états

$$\begin{cases} dx(t)/dt = Ax(t) + Bu(t) \\ \quad y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbf{C}^n$, $u(t) \in \mathbf{C}^p$, sont, respectivement, l'etat et le contrôle au temps $t \geq 0$. Un tel système est dit:

(i) Hamiltonien antisymetrique si A est une matrice antihermitienne, i.e. $A = -A^*$.
(ii) accessible si $\mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$.
(iii) observable si $\mathrm{rang}[C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T] = n$, où A^T est la transposée de A.

Nous allons désigner par $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ l'espace des systèmes linéaire Hamiltoniens antisymétriques accessibles et observables. On va expliquer brièvement la terminologie (i): Rappelons qu'une matrice X d'ordre $2n$ est dite Hamiltonienne si $(JX)^T = J^X$, J est la structure complexe standard, i.e.

$$J = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}.$$

Et alors si $\mathbf{R}^{2n}$ est la réelification de l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^n$, il est facile de constater que la matrice réelle X, qui est la réellification de la matrice complexe A, est

Received September 30, 1993.

Hamiltonienne antisymétrique quand, et seulement quand, A est antihermitienne (voir Mneimné et Testard [32]). Deux triplets (A_i, B_i, C_i) Hamiltoniens antisymétriques accessibles et observables, $i = 1, 2$, c'est-à-dire qu'ils satisfont les conditions (i), (ii), (iii), sont dits semblables s'ils sont transformés l'un en l'autre par un changement de base hermitienne dans l'espace vectoriel hermitien $\mathbf{C}^n$, i.e. s'il existe $T \in U(n, \mathbf{C})$ tel que $(A_1, B_1, C_1) = (TA_2T^{-1}, TB_2, C_2T^{-1})$. Cette relation donne une action de conjugaison du groupe unitaire $U(n, \mathbf{C})$ sur l'ensemble $\widetilde{HA}^{ao}_{n,m,p}$ de tout triplet Hamiltonien antisymétrique accessible et observable: $T.(A, B, C) = (TAT^{-1}, TB, CT^{-1})$. On constate que tout triplet conjugué détermine la même matrice de transfert $G(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B$, c'est donc la même application entrée-sortie. En raison de cela, $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est identifié à l'espace des orbites $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}/U(n, \mathbf{C})$.

Il y a des raisons qui nous commandent d'étudier la topologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. Nous allons citer trois de ces raisons.

(i) Quel est le minimum de nombre de points critiques d'une fonction objective sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$? Même question pour les fonctions de Morse?

(ii) Pouvons-nous paramètrer continuellement tous les systèmes linéaires Hamiltoniens antisymétriques accessibles et observables par une forme normale ?

(iii) Dans l'éventualité où il n'existe pas les formes normales continues sur la totalité, quelles sont les formes normales locales?

La première question a été suggéré par Delchamps [9] sur l'espace des systèmes linéaires accessibles et observables. La seconde question à laquelle on s'interesse très souvent dans la théorie des systèmes linéaires a été posée par Kalman et elle a été résolu par Hazewinkel et Kalman [17] pour le cas des systèmes linéaires accessibles.

Les types de la troisième question, qui sont envisagées dans le problème de la classification des germes à singularité isolée et de la caractérisation des champs isochores à intégrale convergente, ont été posée et ont été réglée par J. P. Françoise [12,13].

On trouve que les réponses aux questions précédentes ont un rapport avec la topologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ que nous étudions dans cet acticle.

Nous commençons par le premier résultat suivant sur la structure de variété de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ que nous pouvons prouver en utilisant le même argument que dans N.H. Phan [37,38]:

THÉORÈME. (i) $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ *est un sous-sensemble ouvert de Zariski réel et dense de l'espace vectoriel réel de tous les triplets* (A, B, C) *dans* $\mathbf{C}^{n\times n} \times \mathbf{C}^{n\times m} \times \mathbf{C}^{p\times n}$ *tels que* $A = -A^*$. *C'est donc une variété analytique de dimension* $n^2 + 2nm + 2pn$.

(ii) *Le groupe de Lie* $U(n, \mathbf{C})$ *agit librement; analytiquement sur* $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ *et en plus, le graphe de cette action, c'est-à-dire l'ensemble des paires* $(x, T\cdot x)$, $x \in \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m}$, $T \in U(n, \mathbf{C})$, *est une sous-variété analytique fermée de* $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \times \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$.

(iii) *D'aprés (ii) on a alors que (voir Dieudonné [10], Mneimné et Testard [32])* $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ *est une variété analytique de dimension* $2nm + 2pn = \dim \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} - \dim U(n, \mathbf{C})$ *et en plus, la projection canonique* $P\ \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \longrightarrow \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ *est un fibré principal de groupe structural* $U(n, \mathbf{C})$.

Cet acticle est organisé comme suit. Grâce au théorème de transversalité R. Thom, nous commençons au premier paragraphe l'examen de quelques aspects d'homotopies de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. A la suite, dans le deuxième paragraphe, en appliquant le Théorème de Whitehead, nous déterminerons quelques groupes d'homologies en utilisant ceux d'une Grassmannienne qui sont aussi ceux de l'espace des systèmes linéaires Hamiltoniens antisymétriques accessibles $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ (voir N. H. Phan [37]). Toutefois, en comparant leurs caractéristiques d'Euler, à la fin du paragraphe, nous démontrerons que la topologie de $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ est absolument différente de celle de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. Dans le troisième paragraphe nous donnerons quelques suites spectrales d'homologies associées à $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ qui nous permetteront de calculer ses groupes d'homologies dans quelques cas. Mais, en général, nous ne savons pas à quels termes ces suites spectrales s'arrêtent. Donc nous ferons une conjecture.

II. Homotopie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$

Les groupes d'homotopies $\Pi_i(X)$, définis pour tout entier non négatif d'un espace topologique X, sont des invariants topologiques importants de X. Ils nous donnent certaines informations sur X. Par exemple, $\Pi_0(X)$ est défini comme l'ensemble de toutes les composantes connexes par arcs de X. Le groupe fundamental $\Pi_1(X)$ est engendré par des lacets fermés dans X qui ne sont pas contractiles. En particulier, soit S^2 la sphère de Riemann; alors $\Pi_0(S^2) = \{0\} = \Pi_1(S^2)$. $\Pi_2(S^2) = \mathbf{Z}$ avec l'application identifie id : $S^2 \to S^2$ est un générateur. $\Pi_3(S^2) = \mathbf{Z}$ avec l'application de Hopf $h S^3 \to S^2$ est un générateur (voir Mosher et Tangora [33]). Aprés, en utilisant les suites spectrales, J. P. Serre (voir McCleary [29]) a montré que $\Pi_4(S^2) = \mathbf{Z}_2$. Ce résultat de J. P. Serre donne bien des surprises dans la topologie algébrique.

En général, le calcul des groupes d'homotopies d'un espace topologique quelconque est trés compliqué. Il est si difficile qu'on ne connait pas encore tous les $\Pi_i(S^2)$ que l'on cherche depuis plus de cinquante ans. C'est pourquoi celui de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est aussi très compliqué. Bien que, nous allons montrer dans ce paragraphe le résultat suivant

THÉORÈME II.1. *Soit* $2\max\{m,p\} \geq 2$. *Alors pour* $0 \leq i \leq 2\max\{m,p\} - 2$, *on a* $\Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \cong \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C}))$. *En particulier*

$$\Pi_0(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \cong \Pi_1(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \cong \{0\}, \quad \Pi_2(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \cong \mathbf{Z}.$$

Le Théorème sera démontré grâce au lemme:

LEMME II.1. $\Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \cong \{0\}$, *pour* $O \leq i \leq 2\max\{m,p\} - 2$.

Démonstration du Théorème II.1. Puisque la projection canonique $P\ \widetilde{HA}^{ao}_{n,m,p} \to HA^{ao}_{n,m,p}$ est un $U(n,\mathbf{C})$-fibré principal, on a la suite longue exacte d'homotopie:

$$\begin{aligned}\cdots \to \Pi_i U(n,\mathbf{C}) \to \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \to \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \\ \to \Pi_{i-1} U(n,\mathbf{C}) \to \Pi_{i-1}(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \to \Pi_{i-1}(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \to \cdots\end{aligned}$$

En vertu du Lemme II.2. on arrive à ce qu'on voulait démontrer.

Nous aurons besoin pour la démonstration du Lemme II.2. des quelques résultats algébriques géométriques suivants:

LEMME II.3. *Soit* $\tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p} = \{(A,B,C) \in \mathbf{C}^{n\times n} \times \mathbf{C}^{n\times m} \times \mathbf{C}^{p\times n}; A = -A^*\}$. *Pour chaque* $0 \leq r \leq n$, *on désigne par:*

$$\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(r) = \{(A,B,C) \in \tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p}; \mathrm{rang}[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] = r\}.$$

Alors $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(r)$ *est une sous-variété analytique de* $\tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p}$ *de dimension* $n^2+2mr+2pn$.

Démonstration du Lemme II.3. Si $r = n$, le résultat est clair car $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ est un sous-ensemble ouvert de Zariski dans $\tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p}$ (cf. N. H. Phan [37]). On va donc considérer les cas $r < n$. Soit $\tilde{\mathbf{A}}_{n,m} = \{(A,B) \in \mathbf{C}^{n\times n} \times \mathbf{C}^{n\times m}\ A = -A^*\}$. Pour $O \leq r \leq n$, on désigne: $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m}(r) = \{(A,B) \in \tilde{\mathbf{A}}_{n,m}; \mathrm{rang}[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B] = r\}$. Alors $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(r) \cong \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m}(r) \times \mathbf{C}^{p\times n}$. Soit $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)$ le sous-ensemble de tout $(A,B) \in \tilde{\mathbf{A}}_{n,m}$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où $A_2 = -A_2^*$ et $(A_1, B_1) \in \widetilde{\mathbf{HA}}_{r,m}(r)$, cest-à dire que le rang $[B_1,\ A_1B_1,\ A_1^2B_1,\ \ldots,\ A_1^{r-1}B_1] = r$. Puisque (voir N.H. Phan [37]) $\widetilde{\mathbf{HA}}_{r,m}(r)$ est une sous-variété ouverte de l'espace vectoriel réel $\tilde{\mathbf{A}}_{r,m}$, $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)$ est une sous-variété rélle de $\tilde{\mathbf{A}}_{n,m}$ de dimension $r^2+2rm + (n-r)^2$. Soit $D(r, n-r) := U(r, \mathbf{C}) \times U(n-r, \mathbf{C})$ le sous-groupe du $U(n, \mathbf{C})$ de toutes les matrices unitaires de la forme

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}, \quad (S_1, S_2) \in U(r, \mathbf{C}) \times U(n-r, \mathbf{C}).$$

Nous considérons une action du groupe de Lie $D(r, n-r)$ sur $U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)$ donnée par $P \cdot (S, (A,B)) \mapsto (SP^{-1},\ P \cdot (A,B))$, où $P \cdot (A,B) = (PAP^{-1}, PB)$. On peut verifier (cf. N.H. Phan [36, 37]) que cette action est libre, analytique et que son graphe est une sous-variété fermée de $(U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)) \times (U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r))$. On en déuit (voir Dieudonné [10], Mneimné et Testard [32]) que l'espace des orbites $U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)/D(r, n-r)$ est une variété de dimension $\dim(U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)) - \dim D(r, n-r) = n^2 + 2rm$. En suite, on trouve que $U(n, \mathbf{C}) \times \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m}(r)/D(r, n-r)$ est isomorphe analytiquement à $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m}(r)$ par l'application $[D(r, n-r) -$ orbite de $(S, (A,B))] \mapsto (SAS^{-1}, SB)$. Le Lemme est donc démontré.

COROLLAIRE II.4. *Le sous-ensemble* $X = \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n) \backslash \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ *est une réunion des sous-variété différéntiables de* $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ *dont le minimum de leurs codimensions est* $2p$.

Démonstration du Corollaire II.4. Pour $0 \leq r \leq n-1$ on désigne

$$\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r) = \{(A,B,C) \in \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n);$$
$$\mathrm{rang}[C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T] = r\}.$$

Alors $X = \bigcup\{\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r); 0 \leq r \leq n-1\}$. En vertu du Lemme II.3., $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)$ est une sous-variété différéntiable de $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ de dimension $n^2 + 2pr + 2nm$. Le codim$\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)$ est donc égal à $2p(n-r)$. Le Corollaire est démontré.

LEMME II.5. *Soit* $c : \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ *l'inclusion canonique. Alors c induit un isomorhisme* $c_i : \Pi_i \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \xrightarrow{\cong} \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$ *pour* $i \leq 2p-2$ *et* c_i *est surjectif pour* $i = 2p-1$.

Démonstration du Lemme II.5. Soit $[f] \in \Pi_i\ (\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$. D'aprés Hirsch (voir [21]) la classe d'homotopie $[f]$ contient une C^∞-application $f. S^i \to \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ où S^i est la sphère de dimension i. D'une autre façon, dans chaque voisinage $U_f \in C^\infty_W$ $(S^i,\ \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$ de f contient une C^∞-application g telle que g est homotope à f et g transverse toutes les sous-variétés $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)$ de $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$, $0 \leq r \leq n-1$, où $C^\infty_W\ (S^i,\ \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$ est l'espace topologique des C^∞-applications de S^i dans $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ avec la topologie faible. Donc d'après le Théorème de transversalité de Thom si $\dim S^i = i < \min\{\text{ codim } \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)\} = 2p$, $g^{-1}\ (\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)) = \emptyset$, c'est-à-dire que g est une application de S^i dans $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}(r)$. En plus $c_i([g]) = [c \circ g] = [f]$, c_i est donc surjectif si $i < 2p$. Soit maintenant $[g] \in \Pi_i\ (\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p})$ et $c_i[g] = [c \circ g] = [0]$, c'est-à-dire que $c \circ g$ est homotope à l'application constante $c \circ d$; $d : S^i \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$; $S^i \mapsto \{*\}$. Soit $H : S^i \times [0,1] \to \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ une homotopie joignant $c \circ g$ et $c \circ d$. On peut supposer que $H \in C^\infty_W(S^i \times [0,1], \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$ car $C^\infty_W\ (S^i \times [0,1], \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$ est dense dans $C^0_W\ (S^i \times [0,1], \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n))$. Puisque $c \circ g(S^i)$ et $c \circ d(S^i)$ appartiennent à $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$, $c \circ g$ et $c \circ d$ transversent toutes les sous-variété $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)$ de $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$, pour tout $0 \leq r \leq n-1$ (voir Arnold [0], Narashimhan [34]). Encore d'aprés le Thérème de transversalité de Thom (Guillemin et Pollack [15], Arnold [0], Narashimhan [34]), il existe une C^∞-application $\tilde{H}\ S^i \times [0,1] \to \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ telle que $\tilde{H}$ satisfait les deux conditions:

(i) $\tilde{H} \equiv H$ sur le sous-ensemble $S^i \times \{0,1\}$ de $S^i \times [0,1]$.

(ii) $\tilde{H}$ est transverse toutes les sous-variétés $\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)$.

C'est pourquoi si $\dim(S^i \times [0,1]) = i+1 < \min\{\text{codim}\widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r)\} = 2p$, on a $\tilde{H}(S^i \times [0,1]) \cap \widetilde{\mathbf{SA}}_{n,m,p}(r) = \emptyset$, pour tout $0 \leq r \leq n-1$, par le Théorème de transversalité de Thom (voir Arnold [0] ou Narashimhan [34]). Donc $\tilde{H}$ est une application de S^i dans $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ joignant $c \circ g$ et $c \circ d$. D'où c_i est injectif pour $0 \leq i \leq 2p-2$. Le Lemme est démontré.

LEMME II.6. $\Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) \cong \{0\}$ *pour* $i \leq 2m-2$.

Démonstration. Parce que $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n) = \tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p} \setminus \bigcup\{\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(r); 0 \leq r \leq n-1\}$ dont $\min\{\text{codim}\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(r)\} = 2m$, en utilisant le même argument qu'en II.5, on constate que $\Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) \xrightarrow{\cong} \Pi_i(\tilde{A}_{n,m,p})$ pour $i \leq 2m-2$. Le Lemme est donc démontré car $\Pi_i(\tilde{A}_{n,m,p}) = \{0\}$ pour tout i.

Supposons maintenant que $U(n, \mathbf{C})$ agit sur $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ par $S\cdot(A,B,C) = (SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$. L'espace des orbites associé est $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n) = \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)/U(n,\mathbf{C})$. Dans [37] nous avons démontré que la projection canonique $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n) \to \mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ est un fibré principal de groupe structural $U(n, \mathbf{C})$. On a alors une suite exacte longue d'homotopie

$$\cdots \to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) \to \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) \to \Pi_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)) \to$$
$$\Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C})) \to \Pi_{i-1}(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) \to \Pi_{i-1}(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)) \to \cdots$$

En vertu du Lemme II.6. on obtient bien:

COROLLAIRE II.7. $\Pi_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)) \xrightarrow{\cong} \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C}))$ *pour* $i \leq 2m-2$.

Nous allons retourner maintenant au Lemme II.2.

Démonstration du Lemme II.2. Soit $\mathcal{T} : \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ donné par $(A,B,C) \mapsto (A^T, C^T, B^T)$. Alors $\mathcal{T}$ est un isomorphisme de fibré principal. Par Lemme II.5 on a le schéma

$$\begin{array}{ll} c_i : \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p};\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) & \text{pour } i \leq 2p-2 \\ \cong \Big\downarrow \mathcal{T}_i & \\ c_i : \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m};\mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} \Pi_i \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,p,m}(n)) & \text{pour } i \leq 2m-2. \end{array}$$

D'après Lemme II.6 on obtient ce qu'on devait démontrer.

III. Variantes du Théorème II.1 et Corollaires

Le but de ce paragraphe est de donner quelques applications du Théorème II.1. pour obtenir des groupes d'homologies de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. Soit $(GL(n,\mathbf{C}), V_{n,nm}(\mathbf{C}), G_{n,nm}(\mathbf{C}))$ le $GL(n,\mathbf{C})$-fibré principal universel où $V_{n,nm}(\mathbf{C})$ est la variété de Stiefel de toutes les matrices complexes d'ordre $n \times nm$ ayant le rang n, $G_{n,nm}(\mathbf{C})$ est la Grassmannienne et la projection

$$P : V_{n,nm}(\mathbf{C}) \longrightarrow G_{n,nm}(\mathbf{C})$$

transforme $X \in V_{n,nm}(\mathbf{C})$ en le sous-espace vectoriel complexe de dimension n de $\mathbf{C}^{nm}$ engendré par n rangées de X. Chaque $(A,B,C) \in \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ nous désignons par $X(A,B)$ le sous-espace vectoriel de dimension n engendré par n rangées de la matrice $[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$. Il est clair que l'application $R : \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to G_{n,nm}(\mathbf{C})$ définie par

$$[U(n,\mathbf{C}) - \text{orbite de } (A,B,C)] \longmapsto X(A,B)$$

est une application classifiante (c'est-à-dire qu'elle est un homomorhisme de fibré principal). D'aprés la terminologie dans Hazewinkel [16], cette application est dite l'immersion de Kalman.

THÉORÈME III.1. *Suppose* $n > 1$. *Nous désignons:* $d = \max\{m,p\}$ *et*

$$R[(A,B,C)] = \begin{cases} X(A,B) & si \ \ d = m \\ X(A^T, C^T) & si \ \ d = p. \end{cases}$$

On a alors que l'application $R : \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to G_{n,nd}(\mathbf{C})$ *induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopies* $R_i : \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \xrightarrow{\cong} \Pi_i(G_{n,nd}(\mathbf{C}))$ *pour* $0 \leq i \leq 2d-2 =$

$2\max\{m,p\}-2$ *et* R_i *est surjectif pour* $i=2d-1$.

Démonstration. On a d'abord le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccccc} U(n,\mathbf{C}) & \longrightarrow & \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} & \xrightarrow{p} & \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \\ \big\downarrow \mathrm{inc} & & \big\downarrow \tilde{R} & & \big\downarrow R \\ GL(n,\mathbf{C}) & \longrightarrow & V_{n,nm}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{p} & G_{n,nm}(\mathbf{C}) \end{array}$$

où les p sont des projections canoniques, inc est l'inclusion naturelle et

$$\tilde{R}\,(A,B,C)\longmapsto [B,AB,A^2B,\ldots,A^{n-1}B].$$

En prenant les suites exactes longues de chaque fibré principal, nous obtenons:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots\to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) & \to & \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) & \to & \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) & \to & \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C}))\to\cdots \\ \cong\big\downarrow \mathrm{inc}_i & & \big\downarrow \tilde{R}_i & & \big\downarrow R_i & & \cong\big\downarrow \mathrm{inc}_i \\ \cdots\to \Pi_i(GL(n,\mathbf{C})) & \to & \Pi_i(V_{n,nm}(\mathbf{C})) & \to & \Pi_i(G_{n,nm}(\mathbf{C})) & \to & \Pi_{i-1}(GL(n,\mathbf{C}))\to\cdots \end{array}$$

où inc_i sont des isomorphismes pour tout i car inc $U(n,\mathbf{C})\to GL(n,\mathbf{C})$ est une équivalence d'homotopie. En utilisant le même argument que dans la démonstration des Lemmes II.5 et II.6, on trouve que $\Pi_i(V_{n,nm}(\mathbf{C}))=\{O\}$ pour $i\le 2n(m-1)$ (cf. McCleary [29], Switzer [41]). Donc en vertu du Lemme II.2 on déduit $R_i:\Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p})\xrightarrow{\cong}\Pi_i(G_{n,nm}(\mathbf{C}))$ est un isomorphisme pour $0\le i\le \min\{2\max\{m,p\}-2,2n(m-1)\}$ est surjectif pour $i=\min\{2\max\{m,p\}-1,2n(m-1)\}$. Nous considérons maintenant l'application de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ dans $G_{n,np}(\mathbf{C})$ définie par $(A,B,C)\mapsto R(A^T,C^T)$ et remplaçont m par p dans l'argument précédent, on va obtenir ce qu'on devait démontrer car $2\max\{m,p\}-2<2n(m-1)$ et $2\max\{p,m\}<2n(p-1)$ quand $n>1$. Le Théorème est démontré.

D'aprés le Théorème de Whitehead (voir McCleary [29], Spanier [40]), nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

COROLLAIRE III.2. $R_i:H_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p};F)\xrightarrow{\cong}H_i(G_{n,nd}(\mathbf{C});F))$ *pour* $0\le i\le 2d-2=2\max\{m,p\}-2$ *et* R_i *est surjectif pour* $i=2d-1$ *où* F *est un anneau quelconque.*

Rappelons qu'on a désigné dans le paragraphe II par

$$\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)=\{(A,B,C)\in\tilde{\mathbf{A}}_{n,m,p};\ \mathrm{rang}[B,AB,A^2B,\cdots,A^{n-1}B]=n\}.$$

$\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est alors une sous-variété ouverte de $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$. Soit $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)=\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)\ /\ U(n,\mathbf{C})$ où $U(n,\mathbf{C})$ agit sur $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ par $S\cdot(A,B,C)=(SAS^{-1}, SB, CS^{-1})$.

Dans [37] nous avons démontré Théorème suivant:

THÉORÈME III.3. (voir N.H. Phan [37]).

$$H_q(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n);\mathbf{Z})\cong H_q(G_{n,n+m-1}(\mathbf{C});\mathbf{Z})$$

pour tout q. *On a donc que la caractéristique d'Euler* $\chi(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n))$ *de* $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$, *le nombre est défini par*

$$\chi(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n))=\sum_{i=1}^{\dim\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)}(-1)^i\dim H_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n);\mathbf{Z}),$$

est égal à $(n+m-1)!/n!m!$.

Le résultat suivant nous permet de déterminer quelques groupes d'homotopies de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ par ceux de $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$.

THÉORÈME III.4. *L'inclusion naturelle*

$$(\mathrm{inc})_i : \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) \xrightarrow{\cong} \Pi_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n))$$

est isomorphe pour $i \leq 2p-2$ *et* $(\mathrm{inc})_i$ *est surjectif pour* $i = 2p-1$. *Donc on a, par le Théorême de Whitehead, le même résultat pour* $(\mathrm{inc})_i : Hi(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}(n)) \to Hi(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n))$.

Démonstration. Parce que l'inclusion naturelle inc $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)$ est un homomorphisme de fibré principal, on a le schèma commutatif où deux lignes sont des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) & \to & \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) & \to & \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) & \to & \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C})) \to \cdots \\
\cong \downarrow \mathrm{inc}_i & & \downarrow \mathrm{inc}_i & & \downarrow \mathrm{inc}_i & & \cong \downarrow \mathrm{inc}_i \\
\cdots \to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) & \to & \Pi_i(\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n)) & \to & \Pi_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)) & \to & \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C})) \to \cdots .
\end{array}$$

D'après le Lemme II.2 et le Lemme II.6 on a pour $i \leq 2m-2$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) & \to O \to & \Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}) & \to O \to & \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C})) \to \cdots \\
\cong \downarrow \mathrm{inc}_i & \downarrow & \cong \downarrow \mathrm{inc}_i & \downarrow & \cong \downarrow \mathrm{inc}_i \\
\cdots \to \Pi_i(U(n,\mathbf{C})) & \to O \to & \Pi_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)) & \to O \to & \Pi_{i-1}(U(n,\mathbf{C})) \to \cdots
\end{array}$$

Le Théorème est démontré.

COROLLAIRE III.5. $H_q(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,mp}\ ; \mathbf{Z}) \cong H_q(G_{n,n+\max\{m,p\}-1}\ (\mathbf{C}); \mathbf{Z})$ *pour* $q \leq 2\max\{m,p\} - 2$.

Démonstration. En vertu du Théorème III.4 et du Théorème de Whitehead, on a le schéma

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{inc})_i\ H_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathbf{HA}_{n,m,p}(n); Z) & \text{pour } i \leq 2p-2 \\
\qquad \cong \downarrow \mathcal{T}_i & \\
(\mathrm{inc})_i\ H_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H_i(\mathbf{HA}_{n,p,m}(n); \mathbf{Z}) & \text{pour } i \leq 2m-2.
\end{array}$$

Parce que $\mathcal{T}_i$ qui est induite par l'application $(A,B,C) \mapsto (A^T, C^T, B^T)$ est un isomorphisme pour tout i, d'après le Théorème III.3 (ii) on déduit ce que l'on voulait démontrer.

Avant de donner la réponse au la question sur l'existence des formes normales continues, on rappelle la dfinition suivante

DÉFINITION III.6 (voir Birkhoff et Maclane [2]). *Une application* $\tilde{N} : \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m} \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ *est dite une forme normale pour l'action de conjugaison de* $U(n,\mathbf{C})$ *si elle satisfait aux deux conditions suivantes:*

(i) (A,B,C) *et* $\tilde{N}(A,B,C)$ *sont dans une même orbite.*
(ii) $\tilde{N}(A',B',C') = \tilde{N}(A,B,C)$ *quand et seulement quand* (A',B',C') *et* (A,B,C) *sont dans une même orbite.*

Si $\tilde{N}$ *est une application continue, on dit qu'elle est une forme normale continue.*

COROLLAIRE III.7. *Si* $\min\{m,p\} > 1$, *alors il n'existe pas des formes normales continues sur la totalité* $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$.

Démonstration. Soit $\tilde{N} : \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m} \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ une forme normale continue. On va montrer que $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ est isomorphe à $U(n,\mathbf{C}) \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$. En effet, soit $(A,B,C) = S\cdot(A',B',C')$, alors $SR(A',B') = R(A,B)$ où $R(A,B) = [B\ AB\ A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B]$. Donc que

$$S = R(A,B)R^*(A',B')[R(A',B')R^*(A',B')]^{-1}$$

où $R^*(A,B)$ est l'adjointe de $R(A,B)$. Cette égalité donne une C^∞- application f du graphe de l'action du groupe $U(n,\mathbf{C})$ dans $U(n,\mathbf{C})$;

$$f : ((A,B,C),(A',B',C')) \mapsto R(A,B)R^*(A',B')[R(A',B')R^*(A',B')]^{-1}.$$

Soit $N : \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m} \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ une application donnée par $[(A,B,C)] \mapsto \tilde{N}(A,B,C)$ où $[(A,B,C)]$ est la $U(n,\mathbf{C})$-orbite de (A,B,C). Ainsi, l'application $g\ U(n,\mathbf{C}) \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m} \to \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$ donné par

$$(S,[(A,B,C)]) \mapsto S\cdot N([(A,B,C)]) = S\cdot \tilde{N}((A,B,C))$$

est une bijection continue dont l'inverse est

$$(A,B,C) \mapsto (f(\tilde{N}((A,B,C)),(A,B,C)),[(A,B,C)]).$$

Donc $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n) \cong U(n,\mathbf{C}) \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n)$. Il en résulte:

$$\Pi_j(\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n)) \cong \Pi_j(U(n,\mathbf{C}) \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n)) \cong \Pi_j(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n)) \times \Pi_j(U(n,\mathbf{C}))$$

pour tout j. C'est pourquoi $\Pi_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}(n))\times\Pi_i(U(n,\mathbf{C})) = \{0\}$ pour $i \leq 2\max\{p,m\}-2$ par Lemme II.2. Mais par le Thórème II.1 et par les rśultats connus sur $\Pi_i(U(n,\mathbf{C}))$ (voir McCleary [29]) c'est une contradiction si $\min\{m,p\} > 1$. Le Corollaire est démontré.

Nous allons examiner maintenant des fonctions objectives sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,p,m}$. D'après la terminologie de Delchamps [9], une fonction réelle différentiable $f\,\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to \mathbf{R}$ est dite une fonction objective si pour tout $a \in \mathbf{R}$, le sous-ensemble $f^{-1}((-\infty,a])$ de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est compact.

L'existence des fonctions objectives sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est très possible. Par exemple, les fonctions objectives sont apparues dans le problème d'identification des systèmes (voir Delchamps [9]). En particulier, des fonctions de Morse sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ sont des fonctions objectives. Donc l'ensemble de tous les fonctions objectives forme un sous-ensemble dense dans l'espace de tous les applications continues de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ dans $\mathbf{R}$.

Nous désignons par $c(f)$ le cardinal du sous-ensemble des points critiques de la fonction objective f. Soit $P\cdot \tilde{M} \to M$ un fibré principal. Désignons par $b(M)$ le cardinal d'un recouvrement ouvert plus fin $\{U_i\}$ de M telle que pour chaque U_i, $P_i : P^{-1}(U_i)$

$\to U_i$ est un fibré principal trivial. Dans [22] James montre que $c(f) \geq b(M)$ où f est une fonction objective sur M. Soit $g : M \to G_{n,k}(\mathbf{C})$ une application classifiante, où $G_{n,k}(\mathbf{C})$ est une Grassmannienne. Eilenberg montre dans [11] (cf. aussi Delchamps [10]) que $b(M) \geq r_0 + 1$ où

$$r_0 = \max\{r; w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \cdots \cdot w_r \neq O; w_j \in g^*(H^*(G_{n,k}(\mathbf{C}); F)\}$$

et $H^*(X; F)$ est le groupe de cohomologie de l'espace topologique X à coefficients dans un corps F. Donc en vertu du Corollaire III.2 on a:

THÉORÈME III.8. *Toute fonction objective sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ a au moins $2\max\{m,p\} - 2$ points critiques.*

Soit $\beta_i(M; F)$ le $i^{\text{ième}}$-nombre de Betti d'une variété M, i.e. $\beta_i\ (M; F) = \dim H_i\ (M; F)$ où F est un corps. Le polynôme de Poincaré à indéterminé t de M est défini par

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\dim M} \beta_i(M; F) t^i.$$

Le polynôme de Morse d'une fonction de Morse f sur M avec c_i noté le nombre des points critiques d'indice i est défini par

$$m(t) = \sum_{i=0}^{\dim M} c_i t^i.$$

Un résultat central de la théorème de Morse est:

THÉORÈME III.9 (l'inéqualitie de Morse, voir Milnor [30]). *Supposons que f est une fonction de Morse sur la variété M. Alors il existe des réels $a_i \geq O$ tels que $m(t) - p(t) = (1+t)(a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)$*

Voir Milnor [30]. D'après le Théorème III.9 et le Corollaire III.2 on a

COROLLAIRE III.10. *Soit $\beta_q = \dim Hq\ (G_{n,n+\max\{m,p\}-1}(\mathbf{C})\ ;\ \mathbf{Z}_2)$. Alors toute fonction de Morse sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ a au moins*

$$2 \sum_{i=0}^{\max\{m,p\}-2} \beta_q$$

points critiques.

Dans résultats III.4. nous avons déterminé quelques groupes d'homologies de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ en utilisant ceux de $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ que nous avons bien connu. Mais la détermination du groupe d'homologie complète $H_*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p})$ de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est encore un problème ouvert. Toutefois, par le résultat suivant, on peut dire sûrement que la topologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ et celle de $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ sont absolument différentes.

THÉORÈME III.11. *La caractéristique d'Euler de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est toujours zéro, (mais celle de $\mathbf{HA}_{n,m,p}(n)$ est toujours différente de zéro par le Théorème III.3).*

Démonstration. Nous identifions $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ à l'espace de toutes les matrices de transferts $G(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B$ où $\lambda \in \mathbf{C}$ et $(A,B,C) \in \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ (Dans [27] C. Martin et R. Hermann prouvent que chaque matrice de transfert $G(\lambda)$, avec (A,B,C) est accessible et observable, est une matrice aux coefficients de fonctions rationnelles strictes).

Nous considérons maintenant une action du cercle $S^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ sur $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ donnée par $\mathbf{d} : S^1 \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \to \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$, $(z, C(\lambda I_n - A)^{-1}B) \mapsto C(z\lambda I_n - A)^{-1}B$. On peut constater que l'ensemble $(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p})^{\mathbf{d}}$ des points fixes de cette action est vide car si une matrice aux coefficients fonctions rationnelles est constante sur S^1, alors elle est constante partout. Donc en appliquant les résultats connus de la théorie de Smith sur l'action du cercle sur une variété (voir Bredon [1] Th. VII; 1.6.), on déduit que la caractéristique d'Euler de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ est gal à celle de l'ensemble $(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p})^{\mathbf{d}}$. Elle est donc nulle. Le Théorème est démontré.

IV. Quelques applications des suites spectrales

Des suites spectrales ont été utilisées dans N. H. Phan [35] et dans B. M. Mann et R. J. Milgram [26] pour calculer l'homologie des espaces des systèmes linaires accessibles et observables. On sait que ce sont des instruments si forts qu'on les utile pour obtenir beaucoup de résultats très profondes en topologie algébrique (voir McCleary [29], Spanier [40], Switzer [41], Mosher et Tangora [33]). Toutefois, le calcul des suites spectrales, en général, n'est aussi pas simple.

On va répéter brièvement quelques notations qu'on trouvera en détail dans les livres de McCleary [29], Spanier [40], Switzer [41] .

IV.1. Préliminaires sur des suites spectrales

Supposons qu'on veut calculer H^*. L'espace H^* est un R-module gradué ou une K-algèbre gradué ou etc.... . Cet H^* peut être l'homologie ou la cohomologie de quelque espace etc. .... Dans tout les cas, c'est difficile de trouver complètement H^*. Donc on introduit quelques conditions supplémentaires: Supposons que H^* est filtré, i.e. H^* muni d'une filtration (décroissante): $H^* \supseteq F^nH^* \supseteq F^{n+1}H^* \cdots \supseteq \cdots \supseteq \{0\}$. Par exemple, on suppose encore que H^* est un espace vectoriel gradué: $H^* = \{H_n\}$; $H^n = \{O\}$ si $n < 0$. Dans ce cas il existe une filtration donnée par $F^*H^* = \{F^*\}$; $F^pH^* = \oplus_{n\geq p}H^n$. La filtration de H^* peut dégénérer en un autre espace vectoriel gradué qui est dit l'espace vectoriel associé gradué et défini par $E_0^p(H^*) = F^pH^*/F^{p+1}H^*$. Nous trouvons que si $\dim H^n < \infty$ pour tout n, on peut calculer H^* de $\{E_0^p\}$ en prenant la somme directe des E_0^p: $H^* = \oplus_{p=0}E_0^p(H^*)$. En général, on ne peut pas calculer complètement H^*, mais on peut espérer que H^* sera déduit de $E_0^*(H^*)$. La théorie des suites spectrales, ou bien comme on dit, le but des suites spectrales, consiste essentiellement à utiliser des filtrations pour construire par "approximations successives" H^*.

On appelle module différentiel bigradué sur un anneau R toute collection de R-modules $\{E_r^{p,q}\}$, où p,q sont des entiers, r sont des entiers non negatifs, avec une application R-linéaire, $d_r : E_r^{**} \to E_r^{**}$, la différentielle, de bidegré $(s, s-1)$ ou bien

$(-s, -s+1)$, qui satisfait $d_r^2 = 0$. Soit

$$H_r^{p,q}(E_r^{**}, d_r) = \frac{\mathrm{Ker} d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+s,q-s+1}}{\mathrm{Im} d_r : E_r^{p-s,q+s-1} \longrightarrow E_r^{p,q}}$$

le module d'homologie du complexe $(\{E_r^{**}\}, d_r)$.

DÉFINITION IV.1.1 (voir McCleary [29], Switzer [41]). Nous appelons suite spectrale toute collection de modules différentiels bigradué; $(\{E_r^{p,q}, d_r\})$, où $r = 1, 2, \cdots$, les bigrades différentielles d_r sont ou bien $(-r, -r+1)$ (pour une suite spectrale de type d'homologie) ou bien $(r, r-1)$ (pour une suite spectrale de type de cohomologie) et $\mathbf{E}_{\mathbf{r+1}}^{\mathbf{p,q}}$ est isomorphe à $\mathbf{H}_{\mathbf{r}}^{\mathbf{p,q}}(\mathbf{E}_{\mathbf{r}}^{**}, \mathbf{d}_{\mathbf{r}})$.

DÉFINITION IV.1.2 (voir McCleary[29], Switzer [41]). Une suite spectrale est dite dégénére au $N^{\text{ième}}$ - terme E_N^{**} si les différentielles $d_r = 0$ pour tout $r \leq N$.

DÉFINTION IV.1.3 (voir McCleary [29], Switzer[41]). Une suite spectrale (E_r^{**}, d_r) des R-module est dite convergence à R-module H^* si H^* a une filtration F^* telle que $E_\infty^{p,q} \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q} = E_0^{p,q}(H^*)$ où E_∞^{**} est le terme limite de la suite spectrale.

Si la suite spectrale est dégénérée au terme E_N^{**}, on déduit que

$$E_N^{**} \cong E_{N+1}^{**} \cong \cdots \cong E_\infty^{**}.$$

Nous allons citer deux suites spectrales importantes.

THÉORÈME IV.1.4 (Les suites spectrales d'homologie de Leray - Serre, voir McCleary [29]). *Soit G un groupe abélien. Etant donnée une fibration, de fibre F, $F \to E \to B$ où B est connexe par arcs. Alors il existe une suite spectrale de type d'homologie $\{E_r, d_r\}$ qui converge vers $H_*(E; G)$ avec $E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G))$, où $H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G))$ est l'homologie de B avec des coefficients locaux dans l'homologie de F.*

THÉORÈME IV.1.5 (Les suites spectrales de cohomologie de Leray - Serre, voir McCleary [29]). *Soit R un anneau commutatif avec unité. Etant donnée une fibration, de fibre F, $F \to E \to B$ où B est connexe par arcs. Alors il existe une suite spectrale de type de cohomologie d'algèbres $\{E_r^{**}, d_r\}$ qui converge vers $H^*(E; R)$ avec $E_2^{p,q} \cong H_p(B; \mathcal{H}^q(F; R))$ où $H^p(B; \mathcal{H}^q(F; G))$ est la cohomologie de B avec des coefficients locaux dans la cohomologie de F.*

Remarquons. que (voir McCleary [29] Proposion 5.4) si B est un espace simplement connexe, on a: $E_2^{p,q} \cong H_p(B; Hq(F; G))$,où G est un groupe abélien et $E_2^{p,q} \cong H^p(B; K) \otimes_K H^q(F; K)$, où K est un corps.

IV.2. Sur l'homologie de $\mathbf{HA}_{n,m,p}^{\mathbf{ao}}$

Rappelons que $\mathbf{HA}_{n,m,p}^{\mathbf{ao}} = \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}^{\mathbf{ao}} \, / \, U(n, \mathbf{C})$, $\widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}^{\mathbf{ao}} = \{(A, B, C) \in \tilde{A}_{n,m,p};$ $\mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] = n$ et $\mathrm{rang}[C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}C^T] = n\}$.
Soit b_i la $i^{\text{ième}}$-colonne de la matrice B. Puisque le $\mathrm{rang}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B] =$

n, dans le système des nm vecteurs

$$\{b_1, Ab_1, A^2b_1, \ldots, A^{n-1}b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2, \ldots, A^{n-1}b_2, \ldots\ldots,$$
$$b_m, Ab_m, A^2b_m, \ldots, A^{n-1}b_m\}$$

contient n vecteurs linéairement indépendants qu'on peut tirer par la méthode suivante (voir N.H. Phan [36], D. Hinrichsen [19]).

Nous allons de gauche à droite dans le système précédent et effaçons tous les vecteurs qui dépendent linéairement des vecteurs qui les précédent. Les vecteurs restant qui forment une base de $\mathbf{C}^n$ sont ordonné comme suit:

$$H(A,B) = [b_1, Ab_1, \ldots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{k_2-1}b_2, \ldots, b_m, Ab_m, \ldots, A^{k_m-1}b_m].$$

De plus, les k_j sont des nombres entiers non-negatifs et $\sum_{j=1}^{m} k_j = n$. Si $k_j = 0$, le bloc correspondant $\{b_j, Ab_j, \ldots, A^{k_j-1}b_j\}$ n'apparaît pas à $H(A,B)$. Il est clair que les nombres k_1, $k_2, \ldots$, k_m sont des invariants de la relation de conjugaison car

$$H(SAS^{-1}, SB) = S[b_1, Ab_1, \ldots, A^{k_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \ldots, A^{k_2-1}b_2, \ldots, Ab_m, \ldots, A^{k_m-1}b_m]$$

pour tout S appartenant à $U(n,\mathbf{C})$. On note la collection de ces nombres entiers par $k(A,B) = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$. On désigne par $K_{n,m} = \{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \mathbf{Z}^m;\ k_j \geq 0$ et $\sum_{j=1}^{m} k_j = n\}$. Alors, $k(A,B) \in K_{n,m}$ Maintenant, pour chaque $k \in K_{n,m}$, on pose:

$$\tilde{H}^{ao}(k) = \{(A,B,C) \in \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p};\ \text{tel que } k(A,B) = k\}.$$

Soit $\mathcal{G}(A,B)$ une matrice unitaire obtenue de la matrice $H(A,B)$ ci-dessus par le procédé d'ortho- normalisation de Gram-Schmidt de matrice $H(A,B)$. On désigne par $(A_k, B_k, C_k) = (\mathcal{G}(A,B)^{-1}A\mathcal{G}(A,B),\ \mathcal{G}(A,B)^{-1}B,\ \mathcal{G}(A,B))$. On peut démontrer avec le même argument dans Nguyen. H.P. [38] que:

THÉORÈME IV.2.1. *L'application $(A,B,C) \mapsto (A_k, B_k, C_k)$ est une forme normale (pour l'action semblable de $U(n,\mathbf{C})$) continue sur chaque sous-ensemble $\tilde{H}^{ao}(k)$. En plus, A_k, B_k et C_k ont les formes spéciales suivantes:*

$$(A_k, B_k, C_k^T) =$$
$$\left(\begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \cdot \\ & & & N_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdot & * & \cdots & * \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & a_{21} & \cdot & * & \cdots & * \\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdots & a_{m1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ \cdot \\ C_m \end{pmatrix} \right)$$

où

$$N_j = \begin{pmatrix} x_{j1} & -a_{j2} & & & \\ a_{j2} & \cdot & \cdots & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & & & \cdot & -a_{jk_j} \\ & & & a_{jk_j} & x_{jk_j} \end{pmatrix};\quad b_j^k = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ a_{j1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < k_1 + \cdots + k_{j-1} + 1;$$

$B_k = [b_1^k, b_2^k, \cdots, b_m^k]$; $j = 1, 2, \ldots .m$; $a_{j2}, \cdots, a_{jk_j}$ *sont des nombres réels positifs*, a_{j1} *est un nombre positif si* $kj > 0$ *et* $a_{j1} = 0$ *si* $kj = 0$; $x_{j1}, \cdots, x_{jk_j}$ *sont des nombres imaginaires (leurs parties réelles sont nulles). Les éléments noté* $*$ *dans* b_j^k *qui est la* $j^{\text{ième}}$*-colonne de* B_k *sont des complexes. La matrice* C_k *est définie par les conditions:* $\operatorname{rang}[C_j N_j^T C_j, \ldots, (N_j^T)^{k_j} C_j] = k_j$ *pour* $0 \leq j \leq m$.

On pose, pour chaque $k \in K_{n,m}$, $H^{ao}(k) = \tilde{H}^{ao}(k)/U(n, \mathbf{C})$. La collection $\{H^{ao}(k); k \in K_{n,m}\}$ a une propriété speciale que nous allons démontrer ci-dessous après avoir rappeler la définition suivante:

DÉFINITION IV.2.2 (voir Whitney [42], Le Dung Trang et Tessier [25]). Soit X un ensemble sous-analytique. Soit $\{X_i; i \in I\}$ une famille localement finie de sous-ensembles sous-analytiques non singuliers connexes de X. On dit que la famille $\{X_i; i \in I\}$ est une stratification sous-analytique de X si

(i) Famille $\{X_i; i \in I\}$ est une partition de X.
(ii) La fermeture $\bar{X}_i$ de X_i dans X et le bord $\bar{X}_i \backslash X_i$ de X_i sont des sous-ensembles sous-analytiques de X. Les sous-ensembles X_i sont appellés strates de la stratification.
(iii) On dit qu'une stratification de X satisfait à la propriété de la frontière si $X_i \cap \bar{X}_j \neq \emptyset$, on a $\bar{X}_j \supseteq X_j$. Remarquons que dans ce cas $\bar{X}_i$ et $\bar{X}_i \backslash X_i$, pour tout $i \in I$, sont unions des strates qui ont des dimensions moindres que celle de X_i.

THÉORÈME IV.2.3. *La collection* $\{H^{ao}(k); k \in K_{n,m}\}$ *est une stratification qui satisfait la propriété de la frontière de* $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$.

Démonstration. Etant donné

$$\widetilde{HA}_{n,m} = \{(A, B) \in \mathbf{C}^{n \times n} \times \mathbf{C}^{n \times n}; \operatorname{rang}[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] = n \text{ et } A = -A^*\}$$

$U(n, \mathbf{C})$ agit semblablement sur $\widetilde{HA}_{n,m}$ par $S \cdot (A, B) = (SAS^{-1}, SB)$. L'espace des orbites associé est $HA_{n,m} = \widetilde{HA}_{n,m}/U(n, \mathbf{C})$. Pour chaque $k \in K_{n,m}$, on pose: $\tilde{H}(k) = \{(A, B) \in \widetilde{HA}_{n,m}; \text{tel que } k(A, B) = k\}$ et pose $H(k) = \tilde{H}(k)/U(n, \mathbf{C})$. Dans [38] nous avons démontré que la collection $\{H(k); k \in K_{n,m}\}$ forme une décomposition cellulaire analytique de l'espace des orbites $HA_{n,m}$ c'est-à-dire qu'elle est une stratification qui satisfait à la propriété de la frontière dont les strates sont isomorphes analytiquement à des ouverts de $\mathbf{R}^p$. Nous considérons maintenant le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} & \xrightarrow{P} & \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p} \\ (A,B,C) & & & \\ \downarrow \tilde{h} & \Big\downarrow \tilde{h} & & \Big\downarrow h \\ (A,B) & & & \\ & \tilde{H}A_{n,m} & \xrightarrow{P} & HA_{n,m}. \end{array}$$

où P sont deux projections canoniques des fibré principaux respectivement et h est induit par $\tilde{h}$. Il est clair que h est une fibration et que $h^{-1}(H(k)) = H^{ao}(k)$ pour tout $k \in K_{n,m}$. Donc $\{H^{ao}(k); k \in K_{n,m}\}$ est une stratification qui satisfait à la propriété de la frontiŕe. Le Théorème est démontré.

Pour chaque $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in K_{n,m}$ on définit l'application

$$P_{k_1} : H^{ao}((k_1, k_2, \ldots, k_m)) \longrightarrow H^{ao}((k_2, \ldots, k_m))$$

donnée par: $(A_k, B_k, C_k^T) \mapsto (\bar{A}_k,\ \bar{B}_k,\ \bar{C}_k^T) =$ c'est-à-dire qu'on obtient $\bar{A}_k$, $\bar{B}_k$, $\bar{C}_k^T$ en jetant k_1 premières rangées dans A_k, B_k, C_k^T respectivement. Et puis on définit P_{k_2}: $H^{ao}((k_2, \ldots, k_m)) \to H^{ao}((k_3, \ldots, k_m))$, etc. D'où l'on déduit le résultat clair suivant:

PROPOSITION IV.2.4. *Pour $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in K_{n,m}$. Il existe une suite de fibrations*

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}^{(m-1)k_1} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_1,p,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_1, k_2, \ldots, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_1} \\
\mathbf{C}^{(m-1)k_2} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_2,p,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_2, k_3, \ldots, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_2} \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow P_{k_{m-1}} \\
\mathbf{C}^{k_{m-1}} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_{m-1},p,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_{m-1}, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_m} \\
\{*\} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_m,p,1} & = & H^{ao}((k_m)).
\end{array}$$

Maintenant on filtre $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ en posant, pour chaque $q \geq 0$, $L_q = \cup\{H^{ao}(k);\ \dim H^{ao}(k) \geq q\}$. Rappelons du fait que $\widetilde{H}^{ao}(k)$ est un sous-ensemble ouvert de l'ensemble $\tilde{H}(k) = \{(A, B, C) \in \widetilde{\mathbf{HA}}_{n,m,p}(n);$ tel que $k(A, B) = k\}$, par un résultat de N.H. Phan [37], $H^{ao}(k)$ est une sous-variété de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$ de dimension $2n + 2N(k) + 2np$ où $N(k) = k_1 + (k_1 + k_2) + \cdots + (k_1 + k_2 + \ldots k_{m-1})$. Les L_q forment une filtration décroissante de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$, i.e. $L_q \supseteq L_{q+1}$. En plus, on trouve que l'espace quotient Lq/L_{q+1} est isomorphe à $\sum^{N_q(k)}(Lq\ L_{q+1}) \cong \sum^{N_q(k)} H^{ao}(k)$ où $\sum X$ est la notation de la suspension de l'espace topologique X; $\sum X := X \times [0,1]/(X \times \{0\} \cup X \times \{1\})$ et $\sum^2 X := \sum(\sum X)$, et où $N_q(k) = \dim H^{ao}(k)$. Donc d'après le Théorème de Atiyah-Hirzebruch-Whitehead (voir R.M. Switzer [41], Th.15.6 et 15.7) il existe une suit spectral d'homologie associé à la filtration $\{L_q\}$ dont le terme E^2_{**} est donné par $E^2_{**} \cong H_*(\sum^{N(k)} H^{ao}(k); F)$ où F est un corps. Alors en vertu de la Proposition IV.2.5. et du Théorême de Leray-Serre IV.1.4. on a:

THÉORÈME IV.2.5. *Soit F un corps, alors il existe une suite spectrale d'homologie $\{E^2_{**}\}$ qui converge à $H_*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}; F)$ dont le terme E_{**} contient*

$$\oplus_k H_*(\sum^{N(k)}(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_1,p,1} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}} k_2, p, 1 \times \cdots \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_m,p,1}; F))$$

où k passent par tous les partitions $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m) \in K_{n,m}$ et $Nq(k) = 2n + 2N(k) + 2np$, $N(k) = k_1 + (k_1 + k_2) + \cdots + (k_1 + k_2 + \cdots + k_{m-1})$.

Nous conjecturons que cette suite spectrale **s'arrête au terme** E^2_{**} c'est-à-dire que

$$H_*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}; F) \cong \oplus_k H * (\sum^{N_(k)}(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_1,p,1} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_2,p,1} \times \cdots \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{km,p,1}; F)).$$

Si $p = 1$, dans le même esprit que précédemment au Théorème IV.2.3. et à la Proposition IV.2.4. on a, pour chaque $k = (k_1, k_2, \cdots, k_m) \in K_{n,m}$, une suite de fibrations

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C}^{(m-1)k_1} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_1,1,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_1, k_2, \ldots, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_1} \\
\mathbf{C}^{(m-1)k_2} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_2,1,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_2, k_3, \ldots, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_2} \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow P_{k_{m-1}} \\
\mathbf{C}^{k_{m-1}} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_{m-1},1,1} & \hookrightarrow & H^{ao}((k_{m-1}, k_m)) \\
 & & \downarrow P_{k_m} \\
\{*\} \times \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{k_m,1,1} & = & H^{ao}((k_m)).
\end{array}$$

Donc en vertu du Théorè IV.2.5. $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{\mathbf{k}_j,p,1}$ a un rôle important pour déterminer l'homologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,m,p}$. Ci-dessous nous allons l'examiner.

IV.3. Sur l'homologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1}$. Rappelons que

$$\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1} = \{(A, b, c) \in \mathbf{C}^{n\times n} \times \mathbf{C}^{n\times 1} \times \mathbf{C}^{1\times n}; A = -A^*, \mathrm{rang}[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b] = n,$$
$$\text{et } \mathrm{rang}[c^T, A^Tc^T, (A^T)^2c^T, \ldots, (A^T)^2c^T] = n\}.$$

Soit S une matrice unitaire telle que $SA^{S^{-1}} = \mathrm{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \hat{A}$. On pose $Sb = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T = \hat{b}$, $cS^{-1} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = \hat{c}$. On sait que

$$0 \neq \det[\hat{b}, \hat{A}\hat{b}, \ldots, \hat{A}^{n-1}\hat{b}] = \det \begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le premièr facteur de cette formule est un déterminant de Vandermonde, on obtient donc que (A, b, c) appartient à $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1}$ si et seulement si $a_i \neq a_j$, a_i sont des imaginaires pures, $b_i \neq 0$ et $c_i \neq 0$ pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$. On pose $b_0 = \hat{b}$, $c_0 = \hat{c}$ et $A_0 = \mathrm{diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ tel que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Alors l'application $(A, b, c) \mapsto (A_0, b_0, c_0)$ est une forme normale sur $\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1}$ pour l'action de conjugaison du $U(n, \mathbf{C})$. $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1}$ est donc identifié à l'espace

$$\big\{((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n)) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n; a_1 < \cdots < a_n; b_i \neq 0, c_i \neq O\big\}.$$

Soit $F(R, n)$ un espace de configuration défini par

$$F(R, n) = \big\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}_n; a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\big\}.$$

Le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ de toutes les bijections d'ensemble contenant n éléments dans lui-mème agit librement sur $F(R, n)$ par correspondance des coordonnées. L'espace des orbites associé est désigné par $DP^n(R) = F(R, n)/\mathcal{S}_n$. On en conclut que:

THÉORÈME IV.3.1. *Soit F un anneau arbitraire avec unité, on a*

$$H_*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1}; F) \cong H_*(DP^n(R) \times (S^1)^{2n}; F)$$

$$\cong H_*(DP^n(R);F) \otimes_F H_*((S^1)^{2n};F);$$
$$H_i(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{n,1,1};F) \cong \oplus_{t+d=i}\left[H_t(DP^n(R);F) \otimes_F H_d((S^1)^{2n};F)\right],$$

où S^1 est le cercle unité. Il vient donc que

$$H_i(S^1;F) = \begin{cases} F, & si\ i=0\ ou\ i=1 \\ 0, & si\ i \neq 0\ et\ i \neq 1. \end{cases}$$

Enfin nous considérons le cas $n = 1$.

IV.4. Sur l'homologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p}$. Rappelons que

$$\widetilde{\mathbf{HA}}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p} = \{(a,b,c) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^p; a \text{ est un imaginaire pur, } b \neq 0 \text{ et } c \neq 0\}.$$

Dans ce cas, la fibration mentionné dans la démonstration du Théorème IV.2.3., est de la forme:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^p\backslash\{0\} & \longrightarrow & \mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p} \\ & & \downarrow \\ & & HA_{1,m}. \end{array}$$

On peut constater que $HA_{1,m}$ équivaut homotopiquement à l'espace projectif complexe $P_{m-1}(\mathbf{C})$.

En appliquant le Théorème de Leray-Serre IV.1.5. et en utilisant le même argument qu'en N. H. Phan [35], nous obtenons:

THÉORÈME IV.4. *Soient F un corps arbitraire, $H^*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p};F)$ l'algèbre de cohomologie de $\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p}$ et soit $\{E_r^{**}\}$ la suite spectrale de cohomologie associée avec la fibration $(\mathbf{C}^p\backslash\{O\}, \mathbf{H}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p}, HA_{1,m})$ précédente. Alors on a: $\{E_r^{**}\}$ s'arrète au terme E_2^{**}, et en plus,*

$$E_2^{**} \cong H^*(\mathbf{HA}^{\mathbf{ao}}_{1,m,p};F) \cong H^*(P_{m-1}(\mathbf{C});F) \otimes_F$$
$$H^*(\mathbf{C}^p\backslash\{O\};F) \cong F[x_2]/\{x_2^m\} \otimes_F E[y_{2p-1}]$$

où $F[x_2]$ est l'agèbre de polynôme engendré par x_2 de degré 2, $\{x_2^m\}$ est l'idéal engendré par $(x_2)^m$ et$E[y_{2p-1}]$ est l'algèbre extérieure engendrée par y_{2p-1} de degré $2p-1$.

Remerciements. Je remercie très vivement le Professeur Jean-Pierre Françoise (Université de Paris VI) et le Professeur Lê Dung Trang (Université de Paris VII) pour leurs conseils et leurs discussions sur le contenu et la représentation de cet article. je remercie chaleureusement le Professeur Huynh Mui (Université de Ha Nôi) pour ses conseils et pour m'avoir donné les réfences qui m'ont conduits à étudier ce probleme.

REFERENCE

[1] V.I. Arnold, *Les chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, Moscou, 1971. (en russe).

[2] G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Vol. 46, Academic Press, New-York, 1972.

[3] G. Birkhoff and Maclane, *A survey of modern algebra*, Macmillan, New-York, 1977.

[4] R.W. Brockett, *Some geometric questions in the theory of linear systems*, IEEE Trans. Autom. Control **AC,21** (1976), 449–455.

[5] P. Brunovsky, *A classification of linear controllable systemes*, Kybernetica **3** (1970), 173–18.

[6] C.I. Byrnes and N.E. Hurt, *On the moduli of linear dynamical systems* , Adv. in Mathematics, studies in Analysis **4** (1979), 83–122.

[7] C.I. Byrnes and T.C. Duncan, *A note on the topology of space of Hamiltonian transfer functions*, Lectures in App. Math. Vol. 18, American, Mathematical Society, Harvard Univ. Cambridge (1980), 7–26.

[8] C.I. Byrnes and T.C. Duncan, *On certain topological invariants arising in system theory*, From New directions in applied Mathamatics (P. Hilton, G. Young), Springer-Verlag, New-York (1981), 29–71.

[9] F.R. Cohen and R.L. Cohen and B.M. Mann and R.J. Milgram, *The topology of rational functions and divisors of surfaces*, Acta Math **166** (1991), 163–221.

[10] F. Delchamps, *The geometry of space of linear systems with application to the identification problem*, Ph.D. Thesis, Harvard University, 1982.

[11] J. Dieudonné, *Foundations of modern analysis*, Vol. 3, Academic Press, 1972.

[12] S. Eilenberg, *Sur un Théorème topologique de M.L.Schninelmann*, Math. Sb. **2** (1936), 557–559.

[13] J-P. Françoise, *Singularités de champs isochores*, Duke Mathematical Journal **47** no. 3, 465–485.

[14] J-P. Françoise, *Modèle local simultané d'une fonction et d'une forme de volume*, S.M.F. Astérique Journées singulire de Dijon **59-60** (1978), 119–130.

[15] M. Guest, *Some relationships between homotopy theory and differential geometry*, Ph.D. Thesis, Wolfson college, University of Oxford, 1981.

[16] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ, 1974.

[17] M. Hazewinkel, *Moduli and canonical forms for linear dynamical systems II: The topological case*, Math. Systems theory **10** (1973), 363–385.

[18] M. Hazewinkel and R. Kalmann, *Moduli and canonical forms for linear dynamical systems*, Report 7504, Econometric Institute, Erasmus University, Rotterdam, 1974.

[19] U. Helmke, *Zur topologie des Raumes linearer Kontrollsysteme*, Ph.D.Thesis, University Bremen, 1982.

[20] D. Hinrichsen, *Metrical and topological aspects of linear control theory. Syst.*, Anal. Model. Simul. **4** (1987) no. 1, 3–36.

[21] D. Hinrichen and D. Salomon and A.J. Pritchard and E.P. Crouch and a.e., *Introduction to Mathematical system theory*, Lecture notes for a joint course at the Universities of Warwick and Bremen, 1983.

[22] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 33, Springer-Verlag, New-York, 1976.

[23] I.M. James, *On the category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 341–348.

[24] R.E. Kalman and P.L. Arbib and P.L. Falb, *Topics in Mathematical system theory*, McGraw-Hill, 1969.

[25] Lê Dung Trang, *Sur un critère d'équisingularité, fonctions de plusieurs variables complexes*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New-York **409** (1974), 124–160.

[26] Lê D.T. et B. Tessier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. II*, Proccedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 40, 1983, pp. 65–103.

[27] B.M. Mann and R.J. Milgram, *Some space of holomorphic maps to complex Grassmann manifolds*, J. Differential Geometry **33** (1991), 301–324.

[28] C. Martin and R. Hermann, *Applications of algebraic geometry to systems theory: The McMillan degree and Kronecker indices of transfer functions as topological and holomorphic systems invariants*, SIAM J. Control and Optimization **16** (1978), no. 5.

[29] W.S. Massey, *Homology and homotopy theory*, Marcel Dekker, New York, 1978.

[30] J. McCleary, *User's guide to spectral sequence*, Mathematics lecture Series 12, 1985.

[31] J.W. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[32] W. Milnor and J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University press, Princeton-New Jersey, 1974.

[33] R. Mneimné et F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, Paris, 1986.

[34] R.E. Mosher and M.C. Tangora, *Cohomology operations and applications to homotopy theory*, New York, Evanston, London, 1968.

[35] R. Narashimhan, *Analysis on real and complex manifold*, Amsterdam, 1968.

[36] Nguyen Huynh Phan, *The cohomology algebra of the manifold of controllable and observable linear systems of dimension I*, Differential geometry and its applications, Proc. of the In. Conf. Aug. 27-Sep.2, 1989, Brno, Czechoslovakia, World Scientifics, Singapore, 1990, pp. 140–143.

[37] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable symmetric linear systems*, Lecture Notes in Mathamatics vol 1474 (by S. Jackowski, B. Oliver, K. Pawalowski, eds.), Proceedings of the International Conference on Algebraic Topology, Poznan, Poland, June 22–27, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, New York, 1991, pp. 235–253.

[38] Nguyen Huynh Phan, *On the topology of the space of reachable skew-symmetric Hamiltonian linear systems*, Rendiconti di Matematica, Serie VII **11** (1991), Roma, 541–558.

[39] Nguyen Huynh Phan, *La relation d'homotopie entre l'espace des systèmes linéaires Hamiltoniens antisymétri- ques accessibles et l'espace des systèmes linéaires accessibles*, le Bulletin des sciences Mathématiques, N° 118, (1994), (France).

[40] V.M. Popov, *Invariant description of linear time-invariant controllable systems*, SIAM, J. Control **10** (1972), 252–264.

[41] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[42] R.M. Switzer, *Algebraic topology-homotopy and homology*, Springer-Verlage, Berlin, Heidelberg, New-York, 1875.

[43] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. **81** (1965), no. 2, 496–54.

[44] J.C. Wonham, *Linear multivariable control : A geometric approach*, Lecture notes, Economical and Mathematical systems, vol. 101, Springer, 1974.

Université Pierre Marie-Curie
Paris de VI
Laboratoire 213 du CNRS
URF 920, France