J.-P BRASSELET
KODAI MATH. J.
17 (1994), 361—373

CYCLES ALGÉBRIQUES ET HOMOMORPHISMES EN HOMOLOGIE D'INTERSECTION

BY JEAN - PAUL BRASSELET

Les trois chapîtres qui suivent ont pour but d'introduire les résultats récents dûs à Gottfried Barthel, Karl-Heinz Fieseler, Ofer Gabber, Ludger Kaup et l'auteur ([2]).

Premier chapître

1. Faisceau des chaînes singulières. ([3;I,1,2],[5])

DÉFINITION. On dit qu'un espace topologique X est muni d'une structure PL si on s'est donné une classe de triangulations localement finies de X (triangulations admissibles) satisfaisant :

1) toute subdivision (barycentrique ou linéaire) d'une triangulation admissible est admissible.
2) Deux triangulations admissibles K_1 et K_2 admettent une subdivision (admissible) commune.

Tout ouvert U de X admet une structure PL induite : Pour toutes triangulations admissibles K de X et K_U de U, il existe une subdivision linéaire K'_U de K_U telle que tout simplexe de K'_U est contenu (linéairement) dans un simplexe de K.

Chaînes et supports.

Soit K une triangulation de X, on note $C_i^F(K)$ le groupe des i-chaînes à supports fermés, i.e. les combinaisons linéaires localement finies à coefficients rationnels $\xi = \sum \xi_\sigma \sigma$ (chaînes de deuxième espèce chez Cartan). Le support de la chaîne $\xi \in C_i^F(K)$, est $|\xi| = \bigcup_{\xi_\sigma \neq 0} |\sigma|$. C'est un fermé de X. De même, $C_i(K)$ désigne le groupe des i-chaînes à supports compacts, i.e. les combinaisons linéaires $\xi = \sum \xi_\sigma \sigma$ pour lesquelles tous les ξ_σ sont nuls sauf un nombre fini.

Le groupe des i-chaînes PL à supports fermés de X, noté $C_i^F(X)$, est défini comme la limite directe des $C_i^F(K)$ pour toutes les triangulations de X, c'est-à-dire la réunion des groupes $C_i^F(K)$ pour toutes les triangulations admissibles K modulo l'identification de deux chaînes $\xi \in C_i^F(K)$ et $\xi' \in C_i^F(K')$ s'il existe une subdivision commune K'' de K et K' telle que les images canoniques de ξ et ξ' dans $C_i^F(K'')$ coïncident.

On définit de même $C_i(X)$.

Les groupes d'homologie de X à support fermé sont les groupes d'homologie du complexe $C_*^F(X)$, on les note $H_i^F(X)$. Les groupes d'homologie à support compact sont les groupes d'homologie du complexe $C_*(X)$, on les note $H_i(X)$.

Received July 1, 1993.

Si U est ouvert dans X, l'inclusion de U dans X induit des morphismes

$$\rho_{UX} : C_i^F(X) \to C_i^F(U) \tag{1}$$

de la façon suivante : Soit $\xi \in C_i^F(X)$, il existe une triangulation K de X telle que ξ s'écrit $\sum_{\sigma\in K}\xi_\sigma\sigma$. Etant donnée une triangulation de U, elle admet une subdivision K_U telle que tout simplexe τ de K_U soit contenu dans un simplexe de même dimension $\sigma(\tau)$ d'une subdivision de K. A la chaîne ξ, on fait correspondre la chaîne :

$$\rho_{UX}(\xi) = \sum_{\tau\in K_U} [\tau : \sigma(\tau)]\xi_{\sigma(\tau)}\tau$$

où

$$[\tau : \sigma] = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \not\subset \sigma \\ +1 & \text{si } \tau \subset \sigma \text{ avec même orientation} \\ -1 & \text{si } \tau \subset \sigma \text{ avec orientation opposée.} \end{cases}$$

Les morphismes (1) commutent au bord et induisent des morphismes en homologie :

$$H_i^F(X) \to H_i^F(U)$$

Si $U \subset V$ sont deux ouverts de X, on définit comme en (1) une application naturelle $\rho_{UV} : C_i^F(V) \to C_i^F(U)$. Si $\xi \in C_i^F(V)$ s'écrit $\xi = \sum_{\sigma\in K_V}\xi_\sigma\sigma$ pour une triangulation localement finie K_V de V, il existe comme précédemment une triangulation K_U de U telle que tout simplexe τ de K_U soit contenu dans un simplexe $\sigma(\tau)$ d'une subdivision de K_V. A la chaîne ξ on fait correspondre la chaîne $\rho_{VU}(\xi) \in C_i^F(U)$ définie par

$$\rho_{UV}(\xi) = \sum_{\tau\in K_U} [\tau : \sigma(\tau)]\xi_{\sigma(\tau)}\tau$$

et $|\rho_{UV}(\xi)| = |\xi| \cap U$. La correspondance $U \mapsto C_i^F(U)$ définit un préfaisceau, qui est un faisceau. Si $\dim X = 2m$, nous notons ce faisceau $\mathcal{C}^\bullet = \mathcal{C}^F_{2m-\bullet}$ et plus précisément $\mathcal{C}^\bullet_X$ lorsqu'il sera nécessaire de préciser l'espace X. On a $\mathcal{C}^\bullet(U) = \mathcal{C}^F_{2m-\bullet}(U)$.

Lemme. Les faisceaux $\mathcal{C}^q$ sont fins ([6],[8;II,3.7]). On a donc, pour tout q :

$$H^p(X; \mathcal{C}^q_X) = 0 \qquad \forall p > 0$$

2. Hypercohomologie. ([3; II.5; V,1.4] et [8; II.5.2-3])

Etant donné un complexe de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet$ sur X, et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert localement fini de X, on note $C^p(\mathcal{U};\mathcal{A}^q)$ l'ensemble des p-cochaînes de Čech sur $\mathcal{U}$ à coefficients dans $\mathcal{A}^q$,

$$\delta_1 : C^p(\mathcal{U};\mathcal{A}^q) \to C^{p+1}(\mathcal{U};\mathcal{A}^q)$$

la différentielle induite par celle de Čech et

$$\delta_2 : C^p(\mathcal{U};\mathcal{A}^q) \to C^p(\mathcal{U};\mathcal{A}^{q+1})$$

la différentielle induite par celle du complexe différentiel $d : \mathcal{A}^q \to \mathcal{A}^{q+1}$. On a $\delta_2^2 = \delta_1^2 = 0$ et $\delta_1\delta_2 = \delta_2\delta_1$. Notons

$$C^{p,q} = \varinjlim_{\mathcal{U}} C^p(\mathcal{U};\mathcal{A}^q)$$

et $\delta_1 : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$, $\delta_2 : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$ les différentielles induites. Le complexe total est noté

$$K^i = \oplus_{p+q=i} C^{p,q} \qquad d = \delta_1 + (-1)^p \delta_2$$

DÉFINITION. L'hypercohomologie du complexe de faisceaux $\mathcal{A}^\bullet$ est la cohomologie du complexe simple $(K^\bullet, d)$. On note

$$\mathbb{H}^i(X; \mathcal{A}^\bullet) = H^i(K^\bullet)$$

Si $\mathcal{A}^\bullet$ est un complexe non nul seulement en degré k (concentré en degré k), on a :

$$\mathbb{H}^i(X; \mathcal{A}^\bullet) = H^{i-k}(X; \mathcal{A}^k)$$

La théorie (classique) des suites spectrales nous montre que si les faisceaux $\mathcal{A}^q$ sont acycliques, i.e. si on a pour tout q

$$H^p(X; \mathcal{A}^q) = 0 \qquad \forall p > 0$$

alors $\mathbb{H}^i(X; \mathcal{A}^\bullet)$ est le i-ème groupe de cohomologie du complexe $\Gamma(X; \mathcal{A}^\bullet)$.

Des exemples de complexes de faisceaux acycliques sont donnés par les faisceaux injectifs, flasques et, si X est paracompact, par les faisceaux fins ou mous. (voir [8; II, respectivement 7,1; 3.1; 3.7; 3.4], et [8; II, Théorème 5.2.3]). On peut donc donner comme définition alternative des groupes d'hypercohomologie, ce qui est souvent donné comme définition :

$$\mathbb{H}^i(X; \mathcal{A}^\bullet) = H^i(\Gamma(X; \mathcal{I}^\bullet))$$

où $\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective (par exemple) du complexe $\mathcal{A}^\bullet$ (isomorphisme j''^* de [8; II.5.3]).

Remarque. Pour toute famille de supports Φ, i.e. ensemble de fermés de X tel que tout sous-fermé d'un élément de Φ et toute réunion finie d'éléments de Φ soient dans Φ, on peut définir l'hypercohomologie à supports dans la famille Φ : $\mathbb{H}^i_\Phi(X; \mathcal{A}^\bullet)$. C'est le cas des familles de supports paracompactifiantes, i.e. telles que tout élément de Φ est paracompact et tout élément de Φ admet, dans X, un voisinage fermé appartenant à Φ.

On donne quelques cas particuliers de groupes d'hypercohomologie, pour X variété algébrique complexe de dimension (réelle) $2m$.

a) Considérons le complexe de faisceaux dualisant(*) $\mathcal{D}^\bullet_X = \mathcal{C}^F_{-\bullet}$ (si X est lisse, $\mathcal{D}^\bullet_X$ est le faisceau d'orientation $\mathcal{O}_X$). On a, en prenant pour $\mathcal{A}^\bullet$ le complexe décalé $\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X = \mathcal{D}^\bullet_X[-2m] = \mathcal{D}^{\bullet-2m}_X = \mathcal{C}^F_{2m-\bullet} = \mathcal{C}^\bullet$:

$$\mathbb{H}^i(X; \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X) \cong H^i(\Gamma(X; \mathcal{C}^\bullet)) = H^i(\mathcal{C}^F_{2m-\bullet}(X)) = H^F_{2m-i}(X),$$

et, pour la famile des compacts c, :

$$\mathbb{H}^i_c(X; \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X) = H_{2m-i}(X)$$

(*)En fait, on a un quasi-isomorphisme entre le complexe dualisant $\mathcal{D}^\bullet$, dont on trouvera une définition intrinsèque dans [3;V,7.1], et le complexe $\mathcal{C}^F_{-\bullet}$; voir [3;V,7.2].

c'est-à-dire l'homologie ordinaire et plus généralement,

$$\mathbb{H}^i_\Phi(X;\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X) = H^\Phi_{2m-i}(X)$$

pour toute famille de supports Φ ([3;V,7.1-2-3]).

b) Si $\mathcal{A}^\bullet$ est le faisceau constant $\mathbb{Q}_X$ sur X, considéré comme complexe concentré en degré 0.

$$\mathbb{H}^i(X;\mathbb{Q}_X) = H^i(X)$$

cohomologie de X à supports fermés et

$$\mathbb{H}^i_\Phi(X;\mathbb{Q}_X) = H^i_\Phi(X)$$

cohomologie de X à supports dans une famille Φ.

c) Si $\mathcal{A}^\bullet$ est le complexe de faisceaux des chaînes d'intersection, à coefficients rationnels et pour la perversité moitié $\mathbf{m}$, noté $\mathcal{IC}^\bullet_X$, il vient :

$$\mathbb{H}^i_c(X;\mathcal{IC}^\bullet_X) = IH_{2m-i}(X)$$

homologie d'intersection à supports compacts, et plus généralement

$$\mathbb{H}^i_\Phi(X;\mathcal{IC}^\bullet_X) = IH^\Phi_{2m-i}(X)$$

pour une famille de supports Φ ([3;II,5]).

3. Dualité de Poincaré.

3.1. Sur une variété lisse.

Si X est une variété lisse, on a un isomorphisme de complexes : $\mathbb{Q}_X \cong \mathcal{C}^\bullet_X = \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X$ d'où les isomorphismes

$$\mathbb{H}^i_\Phi(X;\mathbb{Q}_X) \cong \mathbb{H}^i_\Phi(X;\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X)$$

c'est-à-dire

$$H^i_\Phi(X) \cong H^\Phi_{2m-i}(X)$$

En particulier, on a

$$H^i(X) \cong H^F_{2m-i}(X) \qquad \text{et} \qquad H^i_c(X) \cong H_{2m-i}(X).$$

3.2. Sur une variété algébrique complexe de dimension (réelle) pure $2m$.

Les identifications $\mathbb{Q}_W \cong \mathcal{C}^\bullet_W$ et $\mathcal{C}^\bullet_W \cong \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_W$ sur un ouvert dense lisse $W \subset X$ induisent des morphismes $\alpha_X : \mathbb{Q}_X \to \mathcal{IC}^\bullet_X$ et $\omega_X : \mathcal{IC}^\bullet_X \to \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X$ lesquels fournissent les morphismes classiques (de comparaison)

$$H^\bullet_c(X) \xrightarrow{\alpha_X} IH_{2m-\bullet}(X) \qquad \text{et} \qquad IH_{2m-\bullet}(X) \xrightarrow{\omega_X} H_{2m-\bullet}(X)$$

Leur composé $\delta_X := \omega_X \circ \alpha_X : \mathbb{Q}_X \to \widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X$ induit au niveau global l'homomorphisme de dualité de Poincaré "classique" $H^\bullet_c(X) \to H_{2m-\bullet}(X)$.

4. Homologie à supports dans une sous-variété fermée. (voir [2])

Soit X fermé de Y, on veut expliciter $IH^{(X)}_\bullet(Y)$ où (X) désigne la famille des fermés de Y qui sont contenus dans X. On a vu que, pour Y de dimension $2n$, on a

$$IH^\Phi_\bullet(Y) \cong H^{2n-\bullet}(\Gamma_\Phi(Y,\mathcal{A}^\bullet))$$

pour une famille de supports Φ et un complexe $\mathcal{A}^\bullet \cong \mathcal{IC}_Y^\bullet$ tel que les faisceaux $\mathcal{A}^q$ soient Γ_Φ-acycliques. Or les faisceaux $\mathcal{IC}_Y^q$ des chaînes d'intersection sont mous [3 ; II,5.1] et donc Γ_Φ-acycliques si la famille Φ est paracompacifiante, comme c'est le cas pour les familles des fermés et des compacts de Y. Mais la famille des fermés d'une sous-variété propre n'est pas paracompactifiante dans la variété ambiante. On ne peut donc pas calculer le groupe d'homologie d'intersection $IH_\bullet^{(X)}(Y)$ directement par passage à la cohomologie à partir du complexe $\Gamma_{(X)}(Y, \mathcal{IC}_Y^\bullet)$ des sections à support dans le fermé X. Nous avons cependant le résultat suivant donnant une l'interprétation géométrique de $IH_\bullet^{(X)}(Y)$, même à coefficients dans un anneau arbitraire :

PROPOSITION. (2.3 de [2]) : *Soit $X \hookrightarrow Y$ un plongement fermé, on a un isomorphisme*

$$IH_\bullet^{(X)}(Y) \cong \varprojlim_{X \subset V \Subset Y} IH_\bullet^{F(Y)|V}(V) \,.$$

Si de plus le plongement est normalement non-singulier ([9; 5.4.1]), *alors ces deux groupes sont isomorphes à $IH_\bullet^F(X)$.*

Deuxième chapître

Les foncteurs image directe et image réciproque.

On désigne par $Fai(X)$ la catégorie abélienne des faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur X. La référence générale de cet exposé est [3;VI].

Pour un morphisme $f : X \to Y$, on définit deux foncteurs adjoints f_* et f^* de la façon suivante :

On pose, pour tout ouvert V de Y et tout faisceau $\mathcal{A}$ sur X,

$$f_*\mathcal{A}(V) = \Gamma(f^{-1}(V); \mathcal{A})$$

et on définit ainsi un foncteur, image directe $f_* : Fai(X) \to Fai(Y)$. Il est exact à gauche et transforme faisceaux injectifs en injectifs. Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion fermée, alors $j_*\mathcal{A} = \mathcal{A}^Y$ est l'extension de $\mathcal{A}$ par zéro.

Le foncteur image inverse (ou réciproque) $f^* : Fai(Y) \to Fai(X)$ est défini comme suit : soit $\pi : \mathrm{E}(\mathcal{B}) \to Y$ l'espace étalé associé au faisceau $\mathcal{B}$, par définition $f^*(\mathcal{B})$ est le faisceau associé à l'espace étalé $X \times_Y \mathrm{E}(\mathcal{B}) \to X$ obtenu en prenant le produit fibré de f par π. Pour tout point x de X on a un isomorphisme au niveau des fibres

$$(f^*\mathcal{B})_x = \mathcal{B}_{f(x)}$$

Le foncteur f^* est exact, il est adjoint du foncteur f_*. On a

$$Hom(f^*\mathcal{B}, \mathcal{A}) \cong Hom(\mathcal{B}, f_*\mathcal{A})$$

Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion alors $j^*\mathcal{B} = \mathcal{B}|_X$ est la restriction de $\mathcal{B}$ à X.

En notant $p : X \to \{\mathrm{pt}\}$ l'application constante, on a $\mathbb{Q}_X = p^*\mathbb{Q}_{\mathrm{pt}}$, d'où il résulte un isomorphisme canonique $\mathbb{Q}_X \cong f^*\mathbb{Q}_Y$ en utilisant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & \mathrm{pt} & \end{tikzcd}$$

Le foncteurs $f_!$.

On définit alors, pour une application continue entre espaces localement compacts, le foncteurs $f_! : Fai(X) \to Fai(Y)$ (image directe à supports propres) comme suit:

Si V est un ouvert de Y, on note Φ_V la famille des fermés E de $f^{-1}(V)$ tels que l'application $f|_E : E \to V$ soit propre. On définit alors un faisceau $f_!\mathcal{A}$ par

$$f_!\mathcal{A}(V) = \Gamma_{\Phi_V}(f^{-1}(V); \mathcal{A}) .$$

On obtient ainsi un faisceau sur Y. Le foncteur $f_!$ est exact à gauche et on a un morphisme canonique de foncteurs $0 \longrightarrow f_! \longrightarrow f_*$ qui, pour une application propre $f : X \to Y$ est un isomorphisme. Si Y est un point, alors $f_!\mathcal{A} = \Gamma_c(X;\mathcal{A})$, où c désigne la famille des compacts de X. Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion ouverte ou fermée, alors $j_!\mathcal{A} = \mathcal{A}^Y$ et le foncteur $j_!$ est exact. Enfin, le foncteur $f_!$ est exact sur la catégorie des faisceaux injectifs sur X.

Le foncteurs $f^!$.

Contrairement aux autres foncteurs, ce dernier ne provient pas d'un foncteur au niveau des faisceaux, il n'est défini que dans la catégorie dérivée. On définit d'abord la catégorie $K(X)$ dont les objets sont les complexes de faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels sur l'espace X et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes de complexes. $K^+(X)$ désigne la sous-catégorie des complexes bornés inférieurement.

La catégorie dérivée $D(X)$ ([3; V,5.12]) a les mêmes objets que $K(X)$ mais un morphisme (dans $D(X)$) de $\mathcal{A}^\bullet$ dans $\mathcal{B}^\bullet$ est une classe d'équivalence de diagrammes de morphismes dans $K(X)$:

$$\mathcal{A}^\bullet \xleftarrow{\cong} \mathcal{C}^\bullet \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet$$

où $\cong$ signifie un quasi-isomorphisme. Ce diagramme est équivalent à

$$\mathcal{A}^\bullet \xleftarrow{\cong} \mathcal{C}'^\bullet \longrightarrow \mathcal{B}^\bullet$$

si il existe $\mathcal{A}^\bullet \xleftarrow{\cong} \mathcal{D}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ et des morphismes $\mathcal{C}^\bullet \leftarrow \mathcal{D}^\bullet \to \mathcal{C}'^\bullet$ tels que l'on ait un diagramme commutatif dans $K(X)$ (i.e. commutatif à homotopie près) :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}^\bullet \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{A}^\bullet & \mathcal{D}^\bullet \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{B}^\bullet \\ & \mathcal{C}'^\bullet \arrow[ul, "\cong"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Deux morphismes de $D(X)$ se composent de la façon suivante : étant donné un diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{D}^\bullet \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr] & & \mathcal{E}^\bullet \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{A}^\bullet & & \mathcal{B}^\bullet & & \mathcal{C}^\bullet \end{tikzcd}$$

on peut le compléter de manière à obtenir un diagramme commutatif à homotopie près :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{F}^\bullet \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr] & \\ \mathcal{D}^\bullet \arrow[dr] & & \mathcal{E}^\bullet \arrow[dl, "\cong"'] \\ & \mathcal{B}^\bullet & \end{tikzcd}$$

alors $\mathcal{A}^\bullet \xleftarrow{\cong} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet$ est la composition des morphismes donnés.

On définit de même la catégorie dérivée $D^+(X)$ des complexes bornés inférieurement.

Etant données une application continue d'espaces localement compacts, et une "bonne" résolution du faisceau constant $\mathbb{Q}$ sur $X : 0 \to \mathbb{Q} \to \mathcal{R}^\bullet$, on définit d'abord un foncteur

$$f^!_{\mathcal{R}^\bullet} : K^+(Y) \longrightarrow K^+(X)$$

par

$$f^!_{\mathcal{R}^\bullet}(\mathcal{G}^\bullet)(U) = Hom^\bullet(f_!(\mathcal{R}^\bullet_U); \mathcal{G}^\bullet_U)$$

La correspondance $\mathcal{G}^\bullet \mapsto f^!_{\mathcal{R}^\bullet}(\mathcal{G}^\bullet)$ définit un foncteur $f^!_{\mathcal{R}^\bullet} : K^+(Y) \to K^+(X)$. Si $\mathcal{R}^\bullet$ et $\mathcal{S}^\bullet$ sont deux "bonnes" résolutions du faisceau $\mathbb{Q}$, alors les complexes de faisceaux $f^!_{\mathcal{R}^\bullet}(\mathcal{G}^\bullet)$ et $f^!_{\mathcal{S}^\bullet}(\mathcal{G}^\bullet)$ sont quasi-isomorphes. On en déduit que le foncteur

$$f^! : D^+(Y) \longrightarrow D^+(X)$$

induit sur les catégories dérivées par le foncteur $f^!_{\mathcal{R}^\bullet}$ est indépendant, à isomorphisme près, du choix de la résolution $\mathcal{R}^\bullet$.

Remarque : La dualité entre les foncteurs $f_!$ et $f^!$ s'exprime dans la catégorie dérivée, au moyen de foncteurs dérivés, de la façon suivante (voir [3;V,7.17]) :

$$RHom^\bullet(Rf_!\mathcal{A}^\bullet, \mathcal{B}^\bullet) = Rf_* RHom^\bullet(\mathcal{A}^\bullet, f^!\mathcal{B}^\bullet)$$

Si $j : X \hookrightarrow Y$ est une inclusion ouverte, on a $j^! = j^*$; si c'est une inclusion fermée, alors on a

$$j^!(\mathcal{G}^\bullet)(U) = \Gamma_{(X)}(V; \mathcal{G}^\bullet)$$

où V est un ouvert de Y tel que $U = V \cap X$. Si Y est un point et $p : X \to \{\mathrm{pt}\}$ l'application constante et $\mathcal{B}^\bullet = \mathbb{Q}_{\mathrm{pt}}$, il vient ([3; V,7.18])

$$\mathcal{D}^\bullet_X \cong p^!\mathbb{Q}_{\mathrm{pt}}$$

d'où pour tout $f : X \to Y$ un isomorphisme canonique $\mathcal{D}^\bullet_X \cong f^!\mathcal{D}^\bullet_Y$.

Morphismes associés en homologie et cohomologie.

Soient $\mathcal{A}^\bullet$ et $\mathcal{B}^\bullet$ des complexes bornés de faisceaux de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, et Φ et Ψ des familles de supports sur les variétés X et Y respectivement. Notons $f^{-1}(\Psi)$ la famille des fermés de X qui s'écrivent $f^{-1}(E)$ avec $E \in \Psi$ et notons Λ_f la famille des fermés F de X qui sont propres sur Y par rapport à f, i.e. tels que la restriction $f|_F\ : F \to Y$ soit une application propre. Alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION. (Lemme du §4 de [2]) : a) *Si la famille* $f^{-1}(\Psi)$ *est contenue dans* Φ, *alors tout morphisme de complexes de faisceaux* $f^*\mathcal{B}^\bullet \to \mathcal{A}^\bullet$ *sur* X *induit un homomorphisme naturel en hypercohomologie*

$$\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y;\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X;\mathcal{A}^\bullet)\ .$$

b) *Si la famille* Φ *est contenue dans* $\Lambda_f \cap f^{-1}(\Psi)$, *alors tout morphisme de complexes de faisceaux* $\mathcal{A}^\bullet \to f^!\mathcal{B}^\bullet$ *sur* X *induit un homomorphisme naturel en hypercohomologie*

$$\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{B}^\bullet)\ .$$

Démonstration. On obtient le premier résultat en composant les homomorphismes naturels évidents

$$\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y;\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{f^{-1}(\Psi)}(X;f^*\mathcal{B}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{f^{-1}(\Psi)}(X;\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X;\mathcal{A}^\bullet)\ .$$

Pour le deuxième énoncé, on compose les homomorphismes canoniques

$$\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_{\Lambda_f\cap f^{-1}(\Psi)}(X,\mathcal{A}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,f_!\mathcal{A}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{B}^\bullet)\ .$$

L'existence de l'isomorphisme du milieu est montrée par une généralisation de la formule [3; V, 7.11 (2)]; pour la dernière flèche, on applique le foncteur $\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,-)$ au morphisme $f_!\mathcal{A}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ sur Y obtenu par adjonction du morphisme donné $\mathcal{A}^\bullet \to f^!\mathcal{B}^\bullet$ d'après la dualité de Verdier (dans la catégorie dérivée [3; V,7.17]).

Notons respectivement $c(X)$ et $F(X)$ les familles des compacts et des fermés de X, on remarque que $f : X \to Y$ est propre si et seulement si $f^{-1}(c(Y)) = c(X)$ ou $F(X) \subset \Lambda_f = \Lambda_f \cap f^{-1}(F(Y))$. Notons $\dim X = 2m$, $\dim Y = 2n$ et $2s = 2(n-m)$.

COROLLAIRE.
1) L'isomorphisme $f^*(\mathbb{Q}_Y) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Q}_X$ induit $\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathbb{Q}_Y) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathbb{Q}_X)$ donc pour Φ et Ψ les familles des fermés de X et Y, $H^\bullet(Y) \xrightarrow{f^*} H^\bullet(X)$ et, si f est propre, pour les familles de compacts, $H^\bullet_c(Y) \xrightarrow{f^*} H^\bullet_c(X)$.
2) Tout morphisme $\mu : f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y) \longrightarrow \mathcal{IC}^\bullet_X$ induit $\mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{IC}^\bullet_Y) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{IC}^\bullet_X)$ donc pour Φ et Ψ les familles des fermés de X et Y, $IH^F_{2n-\bullet}(Y) \xrightarrow{\mu} IH^F_{2m-\bullet}(X)$ et, si f est propre, pour les familles de compacts, $IH_{2n-\bullet}(Y) \xrightarrow{\mu} IH_{2m-\bullet}(X)$.
3) L'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X \xrightarrow{\cong} f^!(\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Y)[2s]$ induit $\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_X) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\widetilde{\mathcal{D}}^\bullet_Y[2s])$ donc pour Φ et Ψ les familles des compacts de X et Y, $H_{2m-\bullet}(X) \xrightarrow{f_*} H_{2m-\bullet}(Y)$ et, si f est propre, pour les familles de fermés, $H^F_{2m-\bullet}(X) \xrightarrow{f_*} H^F_{2m-\bullet}(Y)$.
4) Tout morphisme $\nu : \mathcal{IC}^\bullet_X \longrightarrow f^!(\mathcal{IC}^\bullet_Y)[2s]$ induit $\mathbb{H}^\bullet_\Phi(X,\mathcal{IC}^\bullet_X) \longrightarrow \mathbb{H}^\bullet_\Psi(Y,\mathcal{IC}^\bullet_Y[2s])$ donc pour Φ et Ψ les familles des compacts de X et Y, $IH_{2m-\bullet}(X) \xrightarrow{\nu} IH_{2m-\bullet}(Y)$ et, si f est propre, pour les familles de fermés, $IH^F_{2m-\bullet}(X) \xrightarrow{\nu} IH^F_{2m-\bullet}(Y)$.

Troisième chapître

La référence générale de cet exposé est [2], les parenthèses renvoient à cette référence.

1. Motivation.

A titre de motivation, on développe, sans démonstration, une idée de construction géométrique de morphismes associés en homologie d'intersection en supposant l'existence d'un relèvement de la classe du graphe de f en homologie d'intersection à coefficients rationnels et à supports convenables.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques complexes, connexes et de dimensions pures respectives m et n, nous notons Γ_f le graphe de f, cycle algébrique de $X \times Y$. La formule ensembliste $f(A) = \mathrm{pr}_Y((A \times Y) \cap \Gamma_f)$, pour un sous-ensemble A de X, suggère de considérer l'application suivante : Etant donné un cycle d'intersection γ dans $X \times Y$, qui relève Γ_f, nous faisons correspondre à tout cycle d'intersection ξ de X le cycle d'intersection $\mathrm{pr}_Y((\xi \times [Y]) \cap \gamma)$ de Y.

Afin de préciser cette idée, nous introduisons, pour deux perversités $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ données, l'homologie d'intersection "produit" (voir [3; V,6.2(3)] pour la définition de $\overset{L}{\otimes}$)

$$I_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}H_\bullet(X \times Y) := \mathbb{H}_c^{2m+2n-\bullet}(X \times Y\ ,\ p_1^*\mathcal{I}_{\mathbf{p}}\mathcal{C}_X^\bullet \overset{L}{\otimes} p_2^*\mathcal{I}_{\mathbf{q}}\mathcal{C}_Y^\bullet)$$

par rapport à la "biperversité" $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ et avec pour p_i les projections canoniques. On a toujours l'isomorphisme

$$I_{(\mathbf{p},\mathbf{q})}H_\bullet(X \times Y) \cong I_{\mathbf{p}}H_\bullet(X) \otimes I_{\mathbf{q}}H_\bullet(Y)$$

valable pour des perversités arbitraires (cf. [3; V, 10.19]). Le produit d'intersection usuel induit un produit d'intersection

$$I_{(\mathbf{p},\mathbf{p}')}H_i(X \times Y) \times I_{(\mathbf{q},\mathbf{q}')}H_j(X \times Y) \xrightarrow{\cap} I_{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}H_{i+j-2(m+n)}(X \times Y)$$

pour $\mathbf{r} \geq \mathbf{p}+\mathbf{q}$ et $\mathbf{r}' \geq \mathbf{p}'+\mathbf{q}'$.

Pour l'homologie d'intersection du produit, on a un isomorphisme "de Künneth" :

$$I_{\mathbf{p}}H_\bullet(X \times Y) \cong I_{(\mathbf{p},\mathbf{p})}H_\bullet(X \times Y)$$

valable pour toutes les perversités $\mathbf{p}$ satisfaisant à la condition

$$\mathbf{p}(2k) + \mathbf{p}(2l) \leq \mathbf{p}(2k+2l) \leq \mathbf{p}(2k) + \mathbf{p}(2l) + 2.$$

et provenant, pour ces perversités, d'une autre formule de Künneth

$$\mathcal{I}_{\mathbf{p}}\mathcal{C}_{X\times Y}^\bullet \cong p_1^*\mathcal{I}_{\mathbf{p}}\mathcal{C}_X^\bullet \overset{L}{\otimes} p_2^*\mathcal{I}_{\mathbf{q}}\mathcal{C}_Y^\bullet$$

au niveau des complexes de faisceaux (voir [7]). La condition précédente est vérifiée dans les cas particuliers les plus importants $\mathbf{p} = \mathbf{o}$, $\mathbf{m}$ (cf. [9; 6.3]) et $\mathbf{t}$. Supposons que les variétés X et Y soient compactes et faisons l'hypothèse que la classe d'homologie $[\Gamma_f] \in H_{2m}(X \times Y)$ se relève en une classe γ dans $I_{\mathbf{m}}H_{2m}(X \times Y) \cong I_{(\mathbf{m},\mathbf{m})}H_{2m}(X \times Y)$. Comme la classe fondamentale $[Y]$ appartient d'une manière naturelle à $I_{\mathbf{o}}H_{2n}(Y)$, on peut définir un homomorphisme $\nu_\gamma : IH_\bullet(X) \to IH_\bullet(Y)$ par la composition :

$$\begin{array}{ccccccc} I_{\mathbf{m}}H_\bullet(X) & \to & I_{(\mathbf{m},\mathbf{o})}H_{\bullet+2n}(X \times Y) & \to & I_{(\mathbf{t},\mathbf{m})}H_\bullet(X \times Y) & \to & I_{\mathbf{m}}H_\bullet(Y) \\ \xi & \mapsto & \xi \times [Y] & \mapsto & (\xi \times [Y]) \cap \gamma & \mapsto & q_\bullet((\xi \times [Y]) \cap \gamma) \end{array}$$

où $q_\bullet$ désigne la projection canonique

$$I_{(\mathbf{t},\mathbf{m})}H_\bullet(X\times Y)\cong I_{\mathbf{t}}H_\bullet(X)\otimes I_{\mathbf{m}}H_\bullet(Y)\twoheadrightarrow I_{\mathbf{t}}H_0(X)\otimes I_{\mathbf{m}}H_\bullet(Y)\cong I_{\mathbf{m}}H_\bullet(Y)\ ,$$

en utilisant l'isomorphisme $I_{\mathbf{t}}H_0(X)\cong H_0(X)\cong\mathbb{Q}$ dû au fait que X est connexe. Un tel morphisme ν_γ est un bon candidat pour un morphisme associé ν_f. Pour passer au cas où les variétés ne sont pas nécessairement compactes, on a en fait besoin d'un relèvement de la classe $[\Gamma_f]$, vue comme élément de $H_{2m}^{(\Gamma_f)}(X\times Y)$, homologie à supports dans la famille des fermés contenus dans Γ_f, admet un relèvement γ dans $IH_{2m}^{(\Gamma_f)}(X\times Y)$.

2. Le théorème d'existence local.

Dans toute la suite, nous considérerons tous les complexes et groupes d'homologie d'intersection par rapport à la perversité moitié. Le théorème d'existence de morphismes associés s'exprime dans le langage des faisceaux :

THÉORÈME PRINCIPAL (2.1). *Soit $f : X\to Y$ un morphisme entre variétés algébriques complexes de dimensions pures m et n respectivement. Alors, il existe des morphismes contravariants $\mu^f : f^*(\mathcal{IC}_Y^\bullet)\to\mathcal{IC}_X^\bullet$ et covariants $\nu_f : \mathcal{IC}_X^\bullet\to f^!(\mathcal{IC}_Y^\bullet)[2s]$ (où nous posons $s:=n-m$) de complexes de faisceaux de chaînes d'intersection à coefficients rationnels qui sont associés à f, c'est-à-dire qu'ils sont compatibles avec les morphismes de comparaison α et ω au sens de la commutativité des diagrammes suivants :*

$$(D^\mu)\quad \begin{array}{ccc} f^*(\mathcal{IC}_Y^\bullet) & \xrightarrow{\mu^f} & \mathcal{IC}_X^\bullet \\ \uparrow{\scriptstyle f^*(\alpha_Y)} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_X} \\ f^*(\mathbb{Q}_Y) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Q}_X \end{array} \quad \text{et } (D_\nu)\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{IC}_X^\bullet & \xrightarrow{\nu_f} & f^!(\mathcal{IC}_Y^\bullet)[2s] \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_X} & & \downarrow{\scriptstyle f^!(\omega_Y)[2s]} \\ \widetilde{\mathcal{D}}_X^\bullet & \xrightarrow{\cong} & f^!(\widetilde{\mathcal{D}}_Y^\bullet)[2s] \end{array}$$

Les morphismes contravariants μ^f et covariants ν_f sont en correspondance biunivoque, par dualité de Poincaré-Verdier.

REMARQUE SUR L'UNICITÉ. Les morphismes associés μ^f et ν_f sont determinés de façon unique par f dans certains cas particuliers, par exemple :

a) si Y est lisse (alors μ^f est déterminé par α_X puisque α_Y, et donc $f^*(\alpha_Y)$, sont des isomorphismes),
b) si f est un morphisme dominant équidimensionnel,
c) si f est le plongement d'une sous-variété fermée X de codimension 1 dans Y telle que Y soit localement analytiquement irréductible le long de X,
d) si f est une application "petite" dans le sens de [9; 6.2].

Dans les cas a), b) et d), le morphisme μ^f existe même à coefficients entiers.

3. Le théorème d'existence global :

La première conséquence du Théorème principal est l'existence d'homomorphismes globaux associés à f dont nous énonçons les cas particuliers les plus intéressants :

THÉORÈME (2.2). *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, nous avons les résultats suivants :*

1) *Il existe des homomorphismes contravariants* $\mu^f = \mu^f_F : IH^F_{2n-\bullet}(Y) \to IH^F_{2m-\bullet}(X)$ *à supports fermés, et covariants* $\nu_f = \nu^c_f : IH_\bullet(X) \to IH_\bullet(Y)$ *à supports compacts qui sont associés au morphisme* f, *i.e. qui rendent commutatifs les diagrammes suivants :*

$$(D^\mu_F) \quad \begin{array}{ccc} IH^F_{2n-\bullet}(Y) & \xrightarrow{\mu^f} & IH^F_{2m-\bullet}(X) \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha_Y} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_X} \\ H^\bullet(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^\bullet(X) \end{array} \quad et\ (D^c_\nu) \quad \begin{array}{ccc} IH_\bullet(X) & \xrightarrow{\nu_f} & IH_\bullet(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_X} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_Y} \\ H_\bullet(X) & \xrightarrow{f_*} & H_\bullet(Y) \end{array}$$

2) *Si l'application* $f : X \to Y$ *est propre, alors il existe des homomorphismes associés contravariants à supports compacts* $\mu^f = \mu^f_c : IH_{2n-\bullet}(Y) \to IH_{2m-\bullet}(X)$ *et covariants à supports fermés* $\nu_f = \nu^F_f : IH^F_\bullet(X) \to IH^F_\bullet(Y)$ *qui rendent commutatifs les diagrammes analogues :*

$$(D^\mu_c) \quad \begin{array}{ccc} IH_{2n-\bullet}(Y) & \xrightarrow{\mu^f} & IH_{2m-\bullet}(X) \\ \uparrow{\scriptstyle \alpha_Y} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha_X} \\ H^\bullet_c(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^\bullet_c(X) \end{array} \quad et\ (D^F_\nu) \quad \begin{array}{ccc} IH^F_\bullet(X) & \xrightarrow{\nu_f} & IH^F_\bullet(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \omega_X} & & \downarrow{\scriptstyle \omega_Y} \\ H^F_\bullet(X) & \xrightarrow{f_*} & H^F_\bullet(Y) \end{array}$$

4. Le théorème de relèvement :

La deuxième conséquence du théorème principal concerne le relèvement des cycles algébriques en homologie d'intersection. Pour l'énoncer, nous utilisons la notion d'homologie d'intersection $IH^{(X)}_\bullet(Y)$ de Y à supports dans une sous-variété fermée X de Y, c'est-à-dire l'homologie d'intersection relative $IH^F_\bullet(Y, Y \setminus X)$ (voir ci-dessus) :

THÉORÈME (2.3). *Si* X *est une sous-variété fermée de* Y, *de dimension pure* m, *alors la classe d'homologie* $[X]$ *(à coefficients rationnels) est dans l'image de l'homomorphisme de comparaison :*

$$IH^{(X)}_{2m}(Y) \longrightarrow H^{(X)}_{2m}(Y) .$$

En particulier, la classe d'homologie dans $H^F_{2m}(Y)$ de tout cycle algébrique X dans Y, contient un cycle d'intersection ξ arbitrairement proche de X, i.e. étant donné un voisinage V de X dans Y, on peut supposer $|\xi| \subset V$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3. Notons d'abord que la classe d'homologie $[X]$ d'un cycle algébrique $X \subset Y$ peut être interprétée comme élément de $H^{(X)}_{2m}(Y) \cong H^F_{2m}(X)$. L'existence d'un relèvement de cette classe en homologie d'intersection résulte immédiatement du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
IH^F_{2m}(X) & \longrightarrow & IH^{(X)}_{2m}(Y) & \longrightarrow & IH^F_{2m}(Y) \\
\downarrow\cong & & \downarrow & & \downarrow \\
H^F_{2m}(X) & \xrightarrow{\cong} & H^{(X)}_{2m}(Y) & \longrightarrow & H^F_{2m}(Y)
\end{array}$$

Puisque les classes de Chern (au sens de Schwartz [11] et MacPherson [10]) d'une variété algébrique, en homologie, sont représentables par des cycles algébriques, le Théorème de relèvement nous permet de répondre positivement à la conjecture bien connue (voir [3; IX, H] et [1;§ 3]) concernant le relèvement de ces classes :

COROLLAIRE. *Les classes de Chern-Schwartz-MacPherson d'une variété algébrique, en homologie, se relèvent en homologie d'intersection, pour la perversité moitié et à coefficients rationnels.*

Malheureusement il n'y a pas, en général, de relèvement canonique comme le montre l'exemple donné dans [4]. D'autre part, les résultats précédents, valables pour la perversité moitié (et les perversités supérieures) ne permettent pas (directement) de multiplier plus de deux classes d'homologie, ce qui est un obstacle à la définition de nombres caractéristiques généraux pour les variétés algébriques complexes singulières.

5. Le théorème de classification :

Nous avons déjà remarqué que les morphismes μ^f ne sont pas uniquement déterminés par le morphisme f. Le résultat suivant permet de déterminer le degré de liberté de cette ambigüité. En même temps, il précise le raisonnement géométrique de la motivation et complète le théorème principal :

THÉORÈME (2.4). *Il y a une correspondance biunivoque entre les morphismes μ^f, resp. ν_f, rendant commutatif le diagramme (D^μ), resp. (D_ν), du théorème principal, et les classes $\gamma \in IH^{(\Gamma_f)}_{2m}(X \times Y)$ qui relèvent la classe d'homologie $[\Gamma_f] \in H^{(\Gamma_f)}_{2m}(X \times Y)$.*

De manière plus précise :

Remarque. Les trois énoncés suivants sont équivalents (même à coefficients dans un corps quelconque) :

1) *Tout cycle algébrique C d'une variété algébrique Z est homologue à un cycle d'intersection ξ arbitrairement proche de C dans Z.*
2) *Pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques, il existe un homomorphisme associé $\mu^f : f^*(\mathcal{IC}^\bullet_Y) \to \mathcal{IC}^\bullet_X$.*
3) *Pour tout morphisme $f : X \to Y$ entre variétés algébriques, il existe un homomorphisme associé $\nu_f : \mathcal{IC}^\bullet_X \to f^!(\mathcal{IC}^\bullet_Y)[2s]$.*

REFERENCE

[1] Gottfried Barthel, Jean-Paul Brasselet et Karl-Heinz Fieseler : Classes de Chern des variétés

toriques singulières. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 187–192, 1992.

[2] Gottfried Barthel, Jean-Paul Brasselet, Karl-Heinz Fieseler, Ofer Gabber et Ludger Kaup : Relèvement des cycles algébriques et homomorphismes associés en homologie d'intersection, Annals of Maths 139 (1994), 1–33.

[3] Armand Borel *et al.* : *Intersection Cohomology*. Progress in Math. vol. 50, Birkhäuser 1984, Boston etc. (Borel-Seminar).

[4] Jean-Paul Brasselet et Gerardo Gonzalez-Sprinberg : Sur l'homologie d'intersection et les classes de Chern des variétés singulières. Travaux en cours n°23, Hermann 1987, 5–11.

[5] Séminaire Cartan, 1948/49, Exposé 5 de Dixmier.

[6] Séminaire Cartan, 1950/51 Exposé 15 de Cartan.

[7] Dan Cohen, Mark Goresky and Lizhen Ji : On the Künneth Formula for Intersection Cohomology. Preprint Northeastern University, Dec. 1989.

[8] Roger Godement : Théorie des faisceaux. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, Paris, 1964.

[9] Mark Goresky and Robert MacPherson :, Intersection homology theory II. Inv. Math. 71 (1983), 77–129.

[10] Robert MacPherson : Chern Classes for Singular Algebraic Varieties. Annals of Math. 100 (1974), 423–432.

[11] Marie-Hélène Schwartz : Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 260, Série I, p. 3262–3264 et 3535–3537, 1965.

CIRM LUMINY
CASE 916
13288 MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE