MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES, A
Vol. XXVI, Mathematics No. 2, 1950.

Sur l'équation fonctionnelle: $f(x+y)=R\{f(x), f(y)\}$

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu 17 Juin 1950)

Nous allons démontrer ici les résultats complets que nous avons obtenus dans la recherche des solutions continues et des formes de l'équation fonctionnelle: $f(x+y)=R\{f(x), f(y)\}$, où $f(x)$ est une fonction inconnue et où $R(u, v)$ est une fonction rationnelle. Comme ce problème est un cas particulier de la détermination des fonctions qui ont la formule de l'addition algébrique, la forme de $f(x)$ peut être prévue, et puis, quand on regarde la variable y comme un paramètre, et dans le cas où $f(x)$ est différentiable, on peut aussi obtenir immédiatement ces résultats par la théorie des groupes continus de transformation à un paramètre. Mais aux cas où la fonction $f(x)$ est seulement continue et où on doit déterminer la forme de la fonction $R(u, v)$, on peut résoudre ces problèmes par un nouveau moyen comme ceci.

I. Symétrie associative

Soit $F(u, v)$ une fonction de deux variables remplissant les conditions suivantes:

$$1^\circ.\quad F(u, v)\equiv F(v, u)$$

$$2^\circ.\quad F\{F(u,v), w\}\equiv F\{u, F(v, w)\}$$

(Il est clair que les deux côtés de 2° sont symétriques par rapport á u, v et w.) Pour la commodité, nous appellerons cette fonction F la fonction symétrique et associative.

Théorème 1. La fonction rationnelle $R(u, v)$ qui est irréductible, symétrique et associative, est toujours une costante ou une fonction de la forme suivante:

$$R(u, v)\equiv\frac{auv+b(u+v)+c}{puv+q(u+v)+r} \tag{A}$$

où a, b, c, p, q et r sont constantes, $a:b:c \neq p:q:r$ et le rang du tableau $\begin{pmatrix} b & a-q & p \\ c & b-r & q \end{pmatrix}$ est un.

Démonstration. Nous avons l'identité $R\{R(u, v), w\} \equiv R\{u, R(v, w)\}$ d'après les hypothèses ci-dessus. Soit μ le degré de la fraction irréductible R par rapport à u, alors celle du côté gauche de cette identité sera μ^2 tandis que celle du côté droit de la même identité sera μ, par rapport à u, d'où l'on a

$$\mu^2 = \mu,$$

et par conséquent, $\mu = 0$ ou 1.

De même, par rapport à v, le degré de la fraction R est 0 ou 1, donc d'après la symétrie de R, $R(u, v)$ peut être écrit comme suivant:

$$R(u, v) = \frac{auv + b(u+v) + c}{puv + q(u+v) + r} \tag{1}$$

où $a : b : c \neq p : q : r$

Dans $R(t, w)$, posons $t = R(u, v)$ alors on a

$$R\{R(u, v), w\}$$
$$= \frac{(aw+b)\{(au+b)v + (bu+c)\} + (bw+c)\{(pu+q)v + (qu+r)\}}{(pw+q)\{(au+b)v + (bu+c)\} + (qw+r)\{(pu+q)v + (qu+r)\}}$$

Puisque la partie droite de (1) est irréductible, cette fraction est aussi irréductible, et elle est symétrique par rapport à u, v et w. D'après la symétrie d'u et w, dans le numérateur, à cause de la symétrie du coefficient de v, par rapport à u et w, on a:

$$\begin{vmatrix} b & p \\ c & q \end{vmatrix} = 0$$

Du terme sans v, on a:

$$\begin{vmatrix} a-q & b \\ b-r & c \end{vmatrix} = 0$$

De même, dans le dénominateur, on a:

$$\begin{vmatrix} a-q & p \\ b-r & q \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} p & b \\ q & c \end{vmatrix} = 0$$

Si on réunit ces quatre équations, on sait que

$$\text{le rang de } \begin{pmatrix} b & a-q & p \\ c & b-r & q \end{pmatrix} \leqq 1$$

Le rang, n'étant pas zéro, est un. C. q. f. d.

Exemple. Les fonctions $u+v$, $\dfrac{uv}{u+v}$ et $\dfrac{u+v}{1-uv}$ sont symétriques et associatives par rapport à u et v.

II. La formule de l'addtion rationnelle

Théorème 2. Si l'équation fonctionnelle:

$$f(x+y)=R\{f(x),\, f(y)\} \tag{B}$$

(où $R(u, v)$ est une fonction rationnelle) a une solution continue et uniforme dans l'intervalle donné, qui n'est pas constante, la fonction $R(u, v)$ est symétrique et associative.

Démonstration. Dans les deux identités suivantes:

$$f(x+y)\equiv f(y+x)$$

et
$$f\{(x+y)+z\}\equiv f\{x+(y+z)\}$$

posons $f(x)=u$, $f(y)=v$ et $f(z)=w$. Puisque la fonction f n'est pas constante, on en conclut immédiatement.

C. q. f. d.

Théorème 3. $R(u, v)$ étant symétrique et associative, on peut transformer $w=R(u, v)$, par la transformation linèaire $t\rightarrow t^*$, ou bien à $w^*=u^*v^*$, ou bien à $w^*=u^*+v^*$.

Démonstration. La fonction $R(u, v)$ peut être exprimée par l'équation (1).

Or, les équations simultanéés par rapport à (ξ, η):

$$\left.\begin{aligned} a\xi+p\eta&=\xi^2 \\ b\xi+q\eta&=\xi\eta \\ c\xi+r\eta&=\eta^2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ont certainement d'autres solutions (ξ, η) que $(0, 0)$. Car, par suite de la première et la deuxième des équations (2), on a

$$\begin{vmatrix} a\xi+p\eta & \xi \\ b\xi+q\eta & \eta \end{vmatrix}=0$$

Et aussi par suite de la deuxième et la troisième, on a

$$\begin{vmatrix} b\xi+q\eta & \xi \\ c\xi+r\eta & \eta \end{vmatrix}=0$$

C'est-à-dire,

$$b\xi^2+(q-a)\xi\eta-p\eta^2=0$$

et

$$c\xi^2+(r-b)\xi\eta-q\eta^2=0.$$

Ces deux équations sont équivalentes, par l'hypothèse que le rang de $\begin{pmatrix} b & a-q & p \\ c & b-r & q \end{pmatrix}$ est un. Donc les équations (2) ont deux solutions autres que $(0, 0)$.

Or, entre ces deux solutions, nous distinguons deux rapports suivants.

1°. Le cas où les équations (2) ont deux solutions différentes: (ξ_1, η_1) et (ξ_2, η_2).

$$\frac{\xi_1 w+\eta_1}{\xi_2 w+\eta_2}=\frac{\xi_1\{auv+b(u+v)+c\}+\eta_1\{puv+q(u+v)+r\}}{\xi_2\{auv+b(u+q)+c\}+\eta_2\{puv+q(u+v)+r\}}$$

$$=\frac{\xi_1^2 uv+\xi_1\eta_1(u+v)+\eta_1^2}{\xi_2^2 uv+\xi_2\eta_2(u+v)+\eta_2^2}=\frac{\xi_1 u+\eta_1}{\xi_2 u+\eta_2}\cdot\frac{\xi_1 v+\eta_1}{\xi_2 v+\eta_2}$$

Dans cette équation, quand on emploie la transformation:

$$t^*=\frac{\xi_1 t+\eta_1}{\xi_2 t+\eta_2}$$

la relation $w=R(u, v)$ peut être transformée à $w^*=u^*v^*$.

2°. Le cas où les équations (2) ont une solution double (ξ, η).

Dans ce cas, nous supposons, en plus, les équations simultanées homogènes par rapport à (ξ', η') comme ceci:

$$\left.\begin{aligned} a\xi'+p\eta'&=2\xi\xi' \\ b\xi'+q\eta'&=\xi\eta'+\eta\xi' \\ c\xi'+r\eta'&=2\eta\eta' \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Comme les trois courbes planes (les coniques) sur le plane de (ξ, η):

$$f_1\equiv a\xi+p\eta-\xi^2=0,$$

$$f_2\equiv b\xi+q\eta-\xi\eta=0,$$

et

$$f_3\equiv c\xi+r\eta-\eta^2=0$$

ont une tangente commune au point (ξ, η), leurs paramètres directeurs ξ', η' sont les solutions des équations simultanées suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial f_1}{\partial \eta}\eta' = 0,\\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial f_2}{\partial \eta}\eta' = 0\\ \frac{\partial f_3}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial f_3}{\partial \eta}\eta' = 0\end{aligned}\right\}$$

(Ces équations sont équivalentes aux équations (3).) Ce sont les solutions des équivalentes (3). Donc, les équations (3) peuvent avoir d'autres solutions (ξ', η') que (0, 0).

Par le même calcul de 1°, en écrivant (ξ, η) et (ξ', η') au lieu de (ξ_2, η_2) et (ξ_1, η_1) respectivement, on a

$$\begin{aligned}\frac{\xi' w + \eta'}{\xi w + \eta} &= \frac{2\xi\xi' uv + (\xi\eta' + \eta\xi')(u+v) + 2\eta\eta'}{\xi^2 uv + \xi\eta(u+v) + \eta^2}\\ &= \frac{(\xi v + \eta)(\xi' u + \eta') + (\xi u + \eta)(\xi' v + \eta')}{(\xi u + \eta)(\xi v + \eta)}\\ &= \frac{\xi' u + \eta'}{\xi u + \eta} + \frac{\xi' v + \eta'}{\xi v + \eta}\end{aligned}$$

Ces éqations montrent que la relation $w = R(u, v)$ est transformée à $w^* = u^* + v^*$, par la transformation linéaire:

$$t^* = \frac{\xi' t + \eta'}{\xi t + \eta}$$

C. q. f. d.

Par la transformation linéaire $t \to t^*$, c'est-à-dire, par $t = f(s) \to t^* = f^*(s)$, l'équation fonctionnelle $f(x+y) = R\{f(x), f(y)\}$ est conduite à

$$f^*(x+y) = f^*(x) f^*(y)$$

ou à

$$f^*(x+y) = f^*(x) + f^*(y).$$

Comme les solutions contiunes ou les solutions mesurables de ces équations fonctionnelles sont déjà bien connues, elles sont

$$f^*(x) = e^{\lambda x} \quad \text{ou} \quad f^*(x) = \lambda x$$

(λ est une constante arbitraire).

Par conséquent, nous obtiendrons facilement $f(x)$. En même temps, nous nous procurons le théorème principal suivant.

Théorème 4. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation fonctionnelle:

$$f(x+y)=R\{f(x),\ f(y)\} \tag{B}$$

a une solution continue autre qu'une constante, sont que la fonction $R(u,v)$ est de la forme (A) du Théorème 1. En ce cas, la solution de (B) est donnée comme ceci:

$$f(x)=\frac{\eta_2 e^{\lambda x}-\eta_1}{-\xi_2 e^{\lambda x}+\xi_1} \quad \text{ou} \quad f(x)=\frac{\lambda\eta x-\eta'}{-\lambda\xi x+\xi'}$$

où λ est une constante arbitraire et où $\xi_1, \eta_1, \xi_2 \ldots$etc. sont les racines des équations (3) et (4).

III. Equation fonctionnelle plus générale

Soient $R_1(u,v)$ et $R_2(u,v)$ fonctions rationnelles, symétriques et associatives, alors l'équation suivante est plus générale que les équations précédentes

$$f\{R_1(x,\ y)\}=R_2\{f(x),\ f(y)\} \tag{C}$$

De même, $t \to t^*$ (où $f(t)=f_1(t^*)$), ce sera transformé à

$$f_1(x^*y^*)=R_2\{f_1(x^*),\ f_1(y^*)\}$$

ou à

$$f_1(x^*+y^*)=R_2\{f_1(x^*),\ f_1(y^*)\}.$$

La première équation sera conduite à la deuxième par la transformation des variables: $t^* \to t_1=\log t^*$.

Donc l'équation (C) peut être résolue par le Théorème 4.

En terminant ce mémoire, l'auteur veut exprimer ses respects et remerciements à M. le Professeur T. Matsumoto et au feu Professeur H. Okamura pour leurs conseils précieux qu'ils lui ont donnés pendant la recherche.