MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVI, Mathematics No. 2, 1950.

Über die Homöomorphien der offenen Flächen (II)

Von

Ken-iti KOSEKI

(Eingegangen am 14 Juli, 1949)

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung meines vorigen Mitteilung mit demselben Titel[1].

Satz XI. Es seien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die beiden Simplizialzerlegungen einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. B_1' bez. B_1'' sei die B_1-Gruppe bei der Simplizialzerlegung $\varDelta_1$ bez. $\varDelta_2$, so besteht ein Isomorphismus zwischen B_1' und B_1''.

Beweis. Wir können aus $\varDelta_1$ durch interne Transformationen zu $\varDelta_2$ übergehen. Wir können nämlich eine gemeinsame Unterteilung von $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ haben oder eine dritte Simplizialzerlegung $\varDelta_3$ nehmen derart, dass sowohl $\varDelta_1$ und $\varDelta_3$ als auch $\varDelta_2$ und $\varDelta_3$ eine gemeinsame Unterteilung haben.

Wenn $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ eine gemeinsame Unterteilung haben, so ist B_1' offenbar isomorph mit B_1''.

Wenn wir die B_1-Gruppe bei der simplizialzerlegung $\varDelta_3$ mit B_1''' bezeichnen, dann ist B_1' mit B_1''' isomorph und ebenso ist B_1'' mit B_1''' isomorph. Daher müssen B_1' und B_1'' miteinander isomorph sein. W. z. b. w.

Bemerkung. b_1' sei ein Element von B_1' und b_1'' sei das durch das obige Isomorphismus dem b_1' entsprechende Element von B_1''. Wenn L_1 ein zu b_1' gehörender Zyklus und L_2 ein zu b_1'' gehörender Zyklus ist, und wenn L_1 und L_2 zueinander punktfremd sind, so bildet nach dem Hilfssatze des Satzes IX L_1+L_2 die Begrenzung einer kompakten Menge auf $\mathfrak{G}$.

Im folgenden werden wir b_1' und b_1'' mit einem und demselben Buchstaben schreiben.

Satz XII. Es sei eine orientierbare offene Fläche $\mathfrak{G}$ gegeben.

---

1. K. Koseki. Über die Homöomorphien der offenen Flächen. KYOTO MATHEMATICAL MEMOIRS; Vol. XXVI. No. 1, July, 1950.

Wenn die B_1-Gruppe ein von Null verschiedenes Element hat, so hat sie eine Basis von der Art, dass, wenn wir beliebige endlich viele Elemente $b_1, b_2, \cdots, b_n$ von der Basis auswählen, wir ein zu b_i gehörendes einfach-geschlossenes Polvgon P_i derart konstruieren können, dass $P_1, P_2, \cdots, P_n$ zueinahder punktfremd sind.

Beweis. Es sei Δ_1 die vorgelegte simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{A}$ sei ein 2-dimensionales Simplex von $\mathfrak{G}$. Wir konstruieren eine berandete Fläche $\mathfrak{P}_1$ auf $\mathfrak{G}$ derart, dass $\mathfrak{P}_1$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. $\mathfrak{P}_1$ enthält alle mit $\mathfrak{A}$ die gemeinsamen Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_1.

2. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{P}_1$ mit $R^1_1, R^1_2, \cdots, R^1_n$. $R^1_i (i=1, 2, \cdots, n)$ besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen von Δ_1.

3. $R^1_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null.

$R^1_i (i=1, 2, \cdots, n)$ bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}'_i$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{P}_1$ mit $\mathfrak{G}_i$ keine Punkte gemein hat. Wir konstruieren auf $\mathfrak{G}_i + R'_i$ eine berandete Fläche $\mathfrak{L}_i$ derart, dass $\mathfrak{L}_i$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{L}_i$ mit $R^1_i, R^2_{i2}, R^2_{i2}, \cdots, R^2_{in_i}$. $R^2_{ij} (j=1, 2, \cdots, n_i)$ hat mit einem mit $\mathfrak{P}_1$ die gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_1 keine Punkte gemeinsam.

2. R^2_{ij} besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von den sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen von Δ_1.

Wir bezeichnen $\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \cdots + \mathfrak{L}_n$ wit $\mathfrak{P}_2$. Das obige Verfahren wiederholen wir, so bekommen wir die sogennante approximierende Folge $\{\mathfrak{P}_n\}$ von $\mathfrak{G}$.

Wir stellen nun die folgenden Tabellen her.

$$\left.\begin{array}{ccccc} \overbrace{R^2_{12}\,R^2_{12}\cdots(R^2_{1n_1})}^{R^1_1} & & \overbrace{R^2_{21}\,R^2_{22}\cdots(R^2_{2n_2})}^{R^1_2} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \overbrace{R^2_{n1}\,R^2_{n2}\cdots(R^2_{nn_n})}^{(R^1_n)} \\ \underbrace{\qquad}\quad\underbrace{\qquad} & & \underbrace{\qquad}\quad\underbrace{\qquad} & & \underbrace{\qquad}\quad\underbrace{\qquad} \end{array}\right\}\text{—}(1)$$

$$\left.\begin{array}{cccc} \overbrace{a^2_{11}\ \ a^2_{12}\cdots(a^2_{1n_1})}^{a^1_1} & \overbrace{a^2_{21}\ \ a^2_{22}\cdots(a^2_{2n_2})}^{a^1_2} & \cdots\cdots\cdots & \overbrace{a^2_{n1}\ a^2_{n2}\cdots(a^2_{nn_n})}^{(a^1_n)} \\ \underbrace{\qquad\quad}\ \ \underbrace{\qquad\quad} & \underbrace{\qquad\quad}\ \ \underbrace{\qquad\quad} & & \underbrace{\qquad\quad}\ \ \underbrace{\qquad\quad} \\ & & & \end{array}\right\}\text{—(2)}$$

Dabei bedeutet a^i_{jk} das den R^i_{jk} enthaltende Element von B_1.

Wir wollen zunächst zeigen, dass die endlich viele, mit keine Klammern, Elemente aus (2) linear unabhängig sind. Angenommen in der Tat, dass $c_1, c_2, \cdots, c_p$ die Elemente mit keine Klammern aus (2) sind, und dass $c_1, c_2, \cdots, c_p$ linear abhängig sind. Dann entsteht die Cleichung $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_p c_p$, wo $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$ die ganze Zahle 0 oder 1 bedeuten, die nicht sämtlich gleich 0 sind. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass jede $\lambda_i (i=1, 2, \cdots, p)$ nicht gleich 0 ist.

Wir wählen aus $c_i (i=1, 2, \cdots, p)$ ein zu c_i gehörendes einfach-geschlossenes Polygon S_i. Wir können dabei als S_i das in Tabelle (1) geschriebene einfach-geschlossene Polygon nehmen. $S_1 + S_2 + \cdots + S_p$ bildet dann den Rand einer 2-dimensionalen Kette $\mathfrak{K}$.

c_q sei das Element von der Art, dass unter $c_1, c_2, \cdots c_p$ das c_q in niedrigste Zeile in Tabelle (2) liegt. Wir können annehmen, dass $c_q = a^2_{11}$ ist, da andernfalls wir ganz ähnliches Verfahren nehmen können.

Da $R^2_{1i} (i=1, 2, \cdots, n_1)$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so bestmmt R^2_{1i} auf $\mathfrak{G}_1$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}'_i$. $\mathfrak{L}_1$ hat mit einem von den beiden $\mathfrak{M}_i$ und $\mathfrak{M}'_i$, etwa mit $\mathfrak{M}_i$, keine Punkte gemeinsam.

Nun muss $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{M}_i$ keine Punkte gemeinsam haben. Denn, wenn $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{M}_i$ einen Punkt gemein hat, so muss $\mathfrak{K}$ ganz $\mathfrak{M}_i$ enthalten, da unter $c_1, c_2, \cdots, c_p$ das $c_q (=a^2_{11})$ in niedrigste Zeile in (2) liegt. Dies ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, dass $\mathfrak{K}$ eine kompakte Menge ist.

Daraus, dass $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{M}_i$ keine Punkte gemeinsam hat, und da R^2_{11} in dem Rand von $\mathfrak{K}$ enthalten ist, muss $\mathfrak{K}$ ganz $\mathfrak{L}_1$ enthalten. Anderseits, da der Rand von $\mathfrak{K}$ mit $R^2_{1n_1}$ keine Punkte gemein hat, muss $\mathfrak{K}$ ganz $\mathfrak{M}_{n_1}$ enthalten. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{K}$ eine kompakte Menge ist. Also müssen $c_1, c_2, \cdots, c_p$ keineineswegs linear abhängig sein.

Wir wollen zweitens zeigen, dass jedes Element von B_1 als lineare Kombination von den endlich vielen Elementen mit keine Klammern aus der Tabelle (2) darstellen lässt.

Jedes Element mit Klammern von der Tabelle (2) muss zunächst eine lineare Kombination von den endlich vielen Elementen mit keine Klammern von (2) sein. Da $a_1^1+a_2^1+\cdots+a_n^1=0$ ist, so ist für a_n^1 die Behauptung richtig. Durch die mathematische Induktion können wir beweisen, dass die Behauptung im allgemeinen richtig ist.

Es sei d irgendein Element von B_1, und D sei ein zu d gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass D aus den 1-dimensionalen Simplexen von den sukzessiven baryzentrischen Unterteilungen von $\varDelta_1$ besteht. Für genügend grosse Nummer n ist D in $\mathfrak{P}_n$ enthalten und zwar, dass D mit dem Rande von $\mathfrak{P}_n$ keine Punkte gemein hat. D bestimmt auf $\mathfrak{P}_n$ die zwei berandeten Flächen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$. Wenn wir die Komponenten des Randes von $\mathfrak{H}_1$ mit D, T_1, $T_2,\cdots$, T_t bezeichnen, so ist $D+T_1+T_2+\cdots+T_t\sim 0$. c_v sei das Element von B_1, zu dem T_i gehört. Da c_v in der Tabelle (2) geschrieben ist, so ist d eine lineare Kombination von den Elementen mit keine Klammern aus (2). W. z. b. w.

Setz XIII. Es seien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die beiden voneinander verschiedenen unabhängigen Simplizialzerlegungen einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. $b_1\,(\neq 0)$, $b_2\,(\neq 0)$ und $b_3\,(\neq 0)$ seien die drei voneinander verschiedenen Elemente von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$, und P_1, P_2 und P_3 seien die zu b_1, b_2 und b_3 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass P_1, P_2 und P_3 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_1$ bestehen. Q_1, Q_2 und Q_3 seien die zu b_1, b_2 und b_3 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass Q_1, Q_2 und Q_3 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung $\varDelta_3$ von $\varDelta_2$ bestehen.

Wenn P_1 und P_3 durch P_2 getrennt sind, so müssen Q_1 und Q_3 durch Q_2 getrennt sein.

Beweis. P_2 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Eines von den beiden Gebieten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, etwa $\mathfrak{M}_1$ enthält P_1 und das andere $\mathfrak{M}_2$ enthält P_3. Angenommen nun, dass Q_1 und Q_3 durch Q_2 nicht getrennt sind. Q_2 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Unter der Annahme, dass Q_1 und Q_3 durch Q_2 nicht getrennt sind, müssen Q_1 und Q_3 in demselben Gebiete von den beiden $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$, etwa in $\mathfrak{N}_1$ enthalten sein.

Wir konstruieren eine berandete Fläche $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{N}_1+Q_2$ derart, dass $\mathfrak{B}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Der Rand von $\mathfrak{B}$ enthält Q_2.

2. Wenn der Durchchnitt $\mathfrak{N}_1(P_1+P_2+P_3+Q_1+Q_2+Q_3)$ nicht leer ist, so ist $\mathfrak{N}_1(P_1+P_2+P_3+Q_1+Q_2+Q_3)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ enthalten.

3. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{B}$ mit Q_2, T_1, $T_2,\cdots$, T_n. Jedes $T_i(i=1, 2,\cdots, n)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null. Jedes T_i besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_4 von Δ_3.

$T_1+T_2+\cdots+T_n+P_2$ bildet die Begrenzung einer kompakten Menge $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{G}$. Jede Summe (mod. 2) des echten Teilsystems von $(T_1, T_2,\cdots, T_n)$ kann nicht homolog Null sein. Daher muss $\mathfrak{L}$ ein abgeschlossenes Gebiet sein, und damit müssen je zwei von T_1, $T_2,\cdots$, T_n nicht durch P_2 getrennt sein.

Nun bestimmt jedes $T_i(i=1, 2,\cdots, n)$ auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_i'$. Eines von den beiden $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_i'$, etwa $\mathfrak{H}_i$ muss in $\mathfrak{N}_1$ enthalten sein.

Alle $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2,\cdots$, $\mathfrak{H}_n$ müssen in demselben Gebiet von den beiden $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, etwa in $\mathfrak{M}_1$ enthalten sein, da je zwei von T_1, $T_2,\cdots$, T_n nicht durch P_2 getrennt sind. Dann muss $(\mathfrak{N}_1+Q_2)(\mathfrak{M}_2+P_2)$ eine kompakte Menge oder leer sein, da $(\mathfrak{N}_1+Q_2)(\mathfrak{M}_2+P_2)$ eine Teilmenge von $\mathfrak{B}$ sein muss.

Q_3 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. Eines von den beiden $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$, etwa $\mathfrak{K}_1$ muss in $\mathfrak{N}_1$ enthalten sein.

Wir konstruieren zweitens eine berandete Fläche $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{K}_1+Q_3$ derart, dass $\mathfrak{A}$ die folgenden Bedingdngen erfüllt.

1. Der Rand von $\mathfrak{A}$ enthält Q_3.

2. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{A}$ mit Q_3, S_1, $S_2\cdots S_s$. $S_1+S_2+\cdots+S_s$ hat dann mit $P_1+P_2+P_3+Q_1+Q_2+Q_3$ keine Punkte gemeinsam.

Jedes $S_i(i=1, 2,\cdots, s)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null. Jedes S_i besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ_4.

$S_1+S_2+\cdots+S_s+P_3$ bildet dann die Begrenzung einer kompakten Menge $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$. $(\mathfrak{K}+Q_3)-\mathfrak{A}$ muss in $\mathfrak{M}_1$ enthalten sein, da $(\mathfrak{N}_1+Q_2)(\mathfrak{M}_2+P_2)$ eine kompakte Menge oder leer ist. Jedes S_i hat aber mit P_2 keine Punkte gemeinsam, so muss jedes S_i in $\mathfrak{M}_1$

enthalten sein.

$\mathfrak{M}_2$ wird nun durch P_3 in die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_3$ zerlegt, und eines von den beiden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_3$, etwa $\mathfrak{G}_1$ hat als Begrenzung die Menge P_2+P_3, und das andere $\mathfrak{G}_2$ hat als Begrenzung die Menge P_3. Da sowohl b_2 als auch b_3 nicht gleich 0 ist, und da b_2 und b_3 voneinander verschieden sind, so muss sowohl $\mathfrak{G}_1+P_2+P_3$ als auch $\mathfrak{G}_2+P_3$ nicht eine kompakte Menge sein.

Anderseits muss eines von beiden $\mathfrak{G}_1+P_2+P_3$ und $\mathfrak{G}_2+P_3$ in $\mathfrak{K}$ enthalten sein, da P_3 in der Begrenzung von $\mathfrak{K}$ enthalten ist, und da jedes S_i in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist. Dies ist aber unmöglich, da $\mathfrak{K}$ eine kompakte Menge sein muss.

Also kommen wir unter der Annahme, dass P_1 und P_3 durch P_2 getrennt sind und aber Q_1 und Q_3 durch Q_2 nicht getrennt sind, zu einem Widerspruch. W. z. b. w.

Satz XIV. Es sei $\varDelta_1$ eine vorgelegte Simplizialzerlegung eine orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. Es seien $b_1, b_2,\cdots, b_n$ die von 0 verschiedenen Elemente von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$, und $P_1, P_2,\cdots, P_n$ seien die zu $b_1, b_2,\cdots, b_n$ gehörenden einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass $P_i (i=1, 2,\cdots, n)$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. $P_i (i=1, 2,\cdots, n)$ besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen einer Unterteilung $\varDelta_2$ von $\varDelta_1$.

2. Je zwei von $P_1, P_2,\cdots, P_n$ haden keine Punkte gemeinsam.

Es sei $\varDelta_3$ irgendeine[1] Simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$. $Q_1, Q_2,\cdots, Q_i$ $(i<n)$ seien die zu $b_1, b_2,\cdots, b_i$ gehörenden einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass $Q_j (j=1, 2,\cdots, i)$ aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung $\varDelta_4$ von $\varDelta_3$ besteht, und dass je zwei von $Q_1, Q_2,\cdots, Q_i$ keine Punkte gemein haben. Dann können wir ein zu $b_j (j=i+1, i+2,\cdots, n)$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon Q_j derart konstruieren, dass Q_j aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung $\varDelta_5$ von $\varDelta_4$ besteht, und dass je zwei von $Q_1, Q_2,\cdots, Q_n$ keine Punkte gemein haben.

Beweis. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle.

1. Fall. Je zwei von $P_1, P_2,\cdots, P_n$ seien nicht durch das dritte von $P_1, P_2,\cdots, P_n$ getrennt und $P_1+P_2+\cdots+P_n$ sei nicht[2] null-

1. $\varDelta_3$ mag mit $\varDelta_1$ identisch sein.

2. Wenn $P_1+P_2+\cdots+P_n\sim 0$ ist, so muss $(P_1, P_2,\cdots, P_{n+1})$ durch $(P_1, P_2,\cdots, P_n)$ ersetzt werden.

homolog. Wir können in diesem Falle ein zu $b_1+b_2+\cdots+b_n(=b_{n+1})$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon P_{n+1} derart konstruieren, dass P_{n+1} aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_2$ besteht, und dass P_{n+1} mit $P_1+P_2+\cdots+P_n$ keine Punkte gemein hat. Dann bildet $P_1+P_2+\cdots+P_n$ den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{G}$. Da jedes $P_j(j=1, 2,\cdots, n)$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, so muss auch P_{n+1} ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ sein. Daher bestimmt jedes $P_j(j=1, 2,\cdots, n+1)$ auf genau die beiden Gebiete $\mathfrak{N}_j$ und $\mathfrak{N}'_j$, und eines von den beiden $\mathfrak{N}_j$ und $\mathfrak{N}'_j$, etwa $\mathfrak{N}_j$ hat mit $\mathfrak{K}$ keine Punkte gemeinsam.

Wir konstruieren ein zu $b_j(j=i+1,\cdots, n+1)$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon Q_j derart, dass Q_j aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung $\varDelta_5$ von $\varDelta_4$ besteht. $Q_j(i=1, 2, \cdots, n+1)$ bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{M}'_j$.

Wenn $\mathfrak{N}_j$ in einem von den beiden $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{M}'_j$ enthalten ist, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\mathfrak{N}_j$ in $\mathfrak{M}_j$ enthalten ist.

Wenn $\mathfrak{N}_j$ sowohl mit $\mathfrak{M}_j$ als auch mit $\mathfrak{M}'_j$ einen Punkt gemein hat, so enthält $\mathfrak{N}_j$ die Punkte von $\mathfrak{G}_j$. Wir konstruieren dann eine berandete Fläche $\mathfrak{P}_j$ auf $\mathfrak{N}_j+P_j$ derart, dass die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Der Rand von $\mathfrak{P}_j$ enthält P_j.
2. $\mathfrak{N}_j.Q_j$ ist im Innern von $\mathfrak{P}_j$ enthalten.
3. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{P}_j$ mit P_j, S_1^j, $S_2^j,\cdots$, $S_{n_j}^j$. Jedes $S_k^j(k=1, 2,\cdots, n_j)$ ist ein Schnitt ven $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null. Jedes S_k^j besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_2$.

Nach der Bemerkung des Satzes XI bildet $S_1^j+S_2^j+\cdots+S_{ni}^i+Q_j$ die Begrenzung einer kompakten Menge auf $\mathfrak{G}$. Anderseits ist jede Summe (mod. 2) des echten Teilsystems von $(S_1^j, S_2^j,\cdots, S_{n_j}^j)$ nicht homolog Null. Daher können je zwei von S_1^j, $S_2^j,\cdots$, $S_{n_j}^j$ nicht durch Q_j getrennt sein.

$(\mathfrak{N}_j+P_j)-\mathfrak{P}_j$ wird in die n_j Gebiete $\mathfrak{H}_1^j$, $\mathfrak{H}_2^j,\cdots$, $\mathfrak{H}_{n_j}^j$ zerlegt. $\mathfrak{H}_1^j$ ist in einem von den beiden $\mathfrak{M}_j$ und $\mathfrak{M}'_j$, etwa in $\mathfrak{M}_j$, enthalten. Dann muss $\mathfrak{H}_k^j(k=1, 2,\cdots, n)$ auch in $\mathfrak{M}_j$ enthalten sein. Denn je zwei von S_1^j, $S_2^j,\cdots$, $S_{n_j}^j$ ist nicht durch Q_j getrennt. Daher ist der Durchschnitt $(\mathfrak{N}_j+P_j)(\mathfrak{M}'_j+Q_j)$ eine kompakte Menge oder eine leere Menge. Ebenfalls ist der Durchschnitt $(\mathfrak{N}'_j+P_j)(\mathfrak{M}_j+Q_j)$ eine kompakte Menge oder eine leere Menge.

Wir konstruieren eine berandete Fläche $\mathfrak{B}_j$ auf $\mathfrak{M}_j+Q_j(j=i+1, i+2,\cdots, n+1)$ derart, dass $\mathfrak{B}_j$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Der Rand von $\mathfrak{B}_j$ enthält Q_j.

2. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{B}_j$ mit Q_j, T_1^j, $T_2^j,\cdots$, $T_{n_j}^j$. $T_1^j+T_2^j+\cdots+T_{n_j}^j$ hat mit $Q_1+Q_2+\cdots+Q_{n+1}+P_1+P_2+\cdots+P_{n+1}$ keine Punkte gemeinsam. Wenn $\mathfrak{M}_j(Q_1+Q_2+\cdots+Q_{n+1}+P_1+P_2+\cdots+P_{n+1})$ nicht leer ist, so ist $\mathfrak{M}_j(Q_1+Q_2+\cdots Q_{n+1}+P_1+P_2+\cdots+P_{n+1})$ in $\mathfrak{B}_j$ enthalten.

3. Jedes $T_k^j(k=1, 2,\cdots, n_j)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null. Jedes T_k^j besteht aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ_5.

Da $(\mathfrak{N}'_j+P_j)(\mathfrak{M}_j+Q_j)(j=1, 2,\cdots, n+1)$ eine kompakte Menge oder leer ist, so muss jedes $T_k^j(k=1, 2,\cdots, n_j)$ in $\mathfrak{N}_j$ enthalten sein. Anderseits, da je zwei von $\mathfrak{N}_j(j=1, 2,\cdots, n+1)$ zueinander punktfremd sind, so können je zwei von $\sum_{k=1}^{n_j} T_k^j(j=i+1, \cdots, n+1)$ keine Punkte gemein haben.

Da $Q_j\sim T_1^j+T_2^j+\cdots+T_{n_j}^j$ ist, so ist $Q_1+Q_2+\cdots+Q_i+\sum(T_1^j+T_2^j+\cdots+T_{n_j}^j)\sim 0$. Je zwei von Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_i, $T_k^j(k=1, 2,\cdots, n_j)(j=i+1,\cdots, n+1)$ sind nun keineswegs durch das dritte von Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_i, T_k^j getrennt. Angenommen in der Tat, dass T_k^j und T_m^l durch Q_1 getrennt sind. T_k^j sei in $\mathfrak{M}_1$ und T_m^l sei in $\mathfrak{M}'_1$ enthalten. T_k^j bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, und eines von den beiden $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, etwa $\mathfrak{L}_1$ ist in $\mathfrak{N}_j$ enthalten. $\mathfrak{L}_1$ enthält keine Punkte von $\sum_{j=1}^{n+1} P_j+\sum_{j=1}^{n+1} Q_j$, so muss $\mathfrak{L}_1$ wie T_k^j in $\mathfrak{M}_1$ enthalten sein. Aber $\mathfrak{N}_j$ ist in $\mathfrak{G}-(\mathfrak{N}_1+P_1)=\mathfrak{N}'_1$ enthalten, da $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_j$ zueinanpunktfremd sind, so muss $\mathfrak{L}_1$ in $\mathfrak{N}'_1$ enthalten sein. Dies ist aber ein Widerspruch, da $(\mathfrak{M}_1+P_1)(\mathfrak{N}'_1+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer ist.

Angenommen zweitens, dass Q_1 und Q_2 durch T_k^j getrennt ist. T_k^j bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, und eines von den beiden $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$, etwa $\mathfrak{L}_1$ ist in $\mathfrak{N}_j$ enthalten.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit, dass Q_2 in $\mathfrak{L}_1$ enthalten ist. Wenn dabei $\mathfrak{M}'_2$ in $\mathfrak{N}_j$ enthalten ist, so muss $\mathfrak{M}_2$ das $\mathfrak{N}'_j$, damit auch das $\mathfrak{N}_1$ enthalten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $\mathfrak{N}_1$ in $\mathfrak{N}'_2$ enthalten ist und $(\mathfrak{M}_2+Q_2)(\mathfrak{N}'_2+P_2)$ eine kompakte Menge oder leer ist.

Wenn $\mathfrak{M}_2$ in $\mathfrak{N}_j$ enthalten ist, so muss $\mathfrak{M}'_2$ das $\mathfrak{N}'_j$ enthalten. Dies ist aber ein Widerspruch, da $\mathfrak{N}'_j$ das $\mathfrak{N}_2$ enthält und $(\mathfrak{M}'_2+Q_2)$

$(\mathfrak{R}_2+P_2)$ eine kompakte Menge oder leer ist.

Also sind je zwei von $Q_1, Q_1, \cdots, Q_i, T_k^j (k=1, 2, \cdots, n_j) (j=i+1, \cdots, n+1)$ keineswegs durch das dritte getrennt. Daher bildet $Q_1+Q_2+\cdots+Q_i+\sum_{j=i+1}^{n+1}(T_1^j+T_2^j+\cdots+T_{n_j}^j)$ den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{H}$.

Wir können im Innern von $\mathfrak{H}$ ein einfach-geschlossenes Polygon Q'_{i+1} derart konstruieren, dass $Q'_{i+1} \sim T_1^{i+1}+T_2^{i+1}+\cdots+T_{n_{i+1}}^{i+1}$ ist, und dass Q'_{i+1} aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ_5 besteht. Q'_{i+1} bestimmt auf $\mathfrak{H}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, und $\mathfrak{H}_1$ bez. $\mathfrak{H}_2$ hat als Rand $Q'_{i+1}+T_1^{i+1}+T_2^{i+1}+\cdots+T_{n_{i+1}}^{i+1}$ bez. $Q_1+Q_2+\cdots+Q_i+\sum_{j=i+2}^{n+1}(T_1^j+T_2^j+\cdots+T_{nj}^j)$.

Auf diese Weise konstruieren wir die zu $b_{i+1}, b_{i+2}, \cdots, b_{n+1}$ gehörenden $Q'_{i+1}, Q'_{i+2}, \cdots, Q'_{n+1}$ derart, dass je zwei von $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, Q'_{i+1}, \cdots, Q'_{n+1}$ keine Punkte gemein haben.

2. Fall. Mindestens zwei von $P_1, P_2, \cdots, P_n$ seien durch das dritte getrennt. Wir bezeichnen die durch das $P_1+P_2+\cdots+P_i$ auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebiete mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_g$. P_{i+1} ist dann in einem von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_g$, etwa in $\mathfrak{G}_1$ enthalten. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{G}_1$ als Begrenzung die Menge $P_1+P_2+\cdots+P_j (j \leqq i)$ hat. $Q_1+Q_2+\cdots+Q_j$ bestimmt dann nach dem Satze XIII auf $\mathfrak{G}$ die Gebiete $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_g$, und eines von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_g$, etwa $\mathfrak{K}_1$ hat als Begrenzung die Menge $Q_1+Q_2+\cdots+Q_j$. Hierbei unterscheiden wir die fologenden zwei Fälle.

Fall A. Je zwei von $P_1, P_2, \cdots, P_j, P_{i+1}$ seien niemals durch das dritte von $P_1, P_2, \cdots, P_j, P_{i+1}$ getrennt. Wir können[1] wie im 1. Falle ein zu b_{i+1} gehörendes einfach-geschlossenes Polygon Q_{i+1} derart konstruieren, dass Q_{i+1} mit $Q_1+Q_2+\cdots+Q_j$ keine Punkte gemein hat, und dass Q_{i+1} aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ_4 besteht. Da je zwei von $Q_1, Q_2, \cdots, Q_i, Q_{i+1}$ nicht durch das dritte getrennt sind, so muss Q_{i+1} in $\mathfrak{K}_1$ enthalten sein. Daher hat Q_{i+1} mit $Q_1+Q_2+\cdots+Q_i$ keine Punkte gemeinsam.

Fall B. Mindestens zwei von $P_1, P_2, \cdots, P_j, P_{i+1}$ seien durch das dritte getrennt. In diesem Falle müssen mindestens zwei von $P_1, P_2, \cdots, P_j$ durch P_{i+1} getrennt sein. Daher wird $\mathfrak{K}_1$ durch P_{i+1} in die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zerlegt, und $\mathfrak{M}_1$ bez. $\mathfrak{M}_2$ hat als

1. Vgl. den Beweis des Satzes VI.

Begrenzung etwa die Menge $P_{i+1}+P_1+P_2+\cdots+P_p (p<j)$ bez. $P_{i+1}+P_{p+1}+P_{p+2}+\cdots+P_j$. Wenn eines von den beiden $P_{i+1}+P_1+P_2+\cdots+P_p$ und $P_{i+1}+P_{p+1}+\cdots+P_j$ homolog Null ist, so können wir ein einfach-geschlossenes Polygon Q_{i+1} auf $\mathfrak{K}_1$ konstruieren.

Wenn sowohl $P_{i+1}+P_1+\cdots+P_p$ als auch $P_{i+1}+P_{p+1}+\cdots+P_j$ nicht homolog Null ist, so können wir die einfach-geschlossenen Polygone L_1 und L_2 derart konstruieren, dass L_1 mit $P_{i+1}+P_1+\cdots+P_p$ und L_2 mit $P_{i+1}+P_{p+1}+\cdots+P_j$ homolog ist und L_1 mit $P_{i+1}+P_1+\cdots+P_p$ und L_2 mit $P_{i+1}+P_{p+1}+\cdots+P_j$ keine Punkte gemein hat, und dass L_1 und L_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_2$. $L_1+L_2+P_1+P_2+\cdots+P_j$ bildet den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{B}$.

Nach dem 1. Falle können wir ein mit L_1 homologes einfach-geschlossenes Polygon L'_1 und ein mit L_2 homologes einfach-geschlossenes Polygon L'_2 derart konstruieren, dass je zwei von L'_1, L'_2, Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_j keine Punkte gemein haben, und dass sowohl L'_1 als auch L'_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_4$. Da nach dem Satze XIII je zwei von Q_1, $Q_2,\cdots$, Q_j, L'_1, L'_2 durch das dritte nicht getrennt sind, so bildet $Q_1+Q_2+\cdots+Q_j+L'_1+L'_2$ den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{L}$.

Wir können im Innern von $\mathfrak{L}$ ein mit $Q_1+Q_2+\cdots+Q_p+L'_1$ homologes einfach-geschlossenes Polygon Q_{i+1} konstruieren derart, dass Q_{i+1} aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_4$ besteht. Q_{i+1} gehört offenbar zu b_{i+1} und hat mit $Q_1+Q_2+\cdots+Q_i$ keine Punkte gemeinsam, da Q_{i+1} in $\mathfrak{K}_1$ enthalten ist.

Auf diese Weise können wir Q_{i+1}, $Q_{i+2},\cdots$, Q_n konstruieren.

W. z. b. w.

Definition: Es sei $\varDelta_1$ eine Simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$. $b_1, b_2,\cdots, b_n$ (sämtlich $\neq 0$) seien die voneinander verschiedenen Elemente von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Wenn wir ein zu $b_i (i=1, 2,\cdots, n)$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon $P_i (i=1, 2,\cdots, n)$ derart konstruieren können, dass P_i aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_1$ besteht und je zwei von P_1, $P_2,\cdots$, P_n keine Punkte gemein haben, so sagen wir, dass die Elemente b_1, $b_2,\cdots$, b_n miteinander keine Punkte gemein haben.

Aus dem Satze XIII und der obigen Definition können wir die folgende Definition einführen.

Definition: $b_1 (\neq 0)$, $b_2 (\neq 0)$ und $b_3 (\neq 0)$ seien die voneinander verschiedenen, zueinander punktfremden Elemente von B_1 von $\mathfrak{G}$.

P_1, P_2 und P_3 seien die zu b_1, b_2 und b_3 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone. Wenn P_1 und P_2 durch P_3 getrennt sind, so sagen wir, dass b_1 und b_2 durch b_3 getrennt sind.

Satz XV. Es seien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die beiden voneinander unabhängigen[1] Simplizialzerlegungen einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. $b_1(\fallingdotseq 0)$ und $b_2(\fallingdotseq 0)$ seien die beiden voneinander verschiedenen Elemente von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$, und P_1 und P_2 seien die zu b_1 und b_2 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass P_1 und P_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_1$ bestehen. Q_1 und Q_2 seien die zu b_1 und b_2 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass Q_1 und Q_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung $\varDelta_3$ von $\varDelta_2$ bestehen.

Wenn ein P_2 enthaltendes Gebiet $\mathfrak{K}_1$ von beiden durch P_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ unendliches Geschlecht[2] hat, so muss auch ein Q_2 enthaltendes Gebiet $\mathfrak{M}_1$ von den beiden durch Q_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ unendliches Geschlecht haben.

Wenn $\mathfrak{K}_2$ unendliches Geschlecht hat, so muss auch $\mathfrak{M}_2$ unendliches Geschlecht haben.

Beweis. Angenommen in der Tat, dass $\mathfrak{K}_1$ unendliches Geschlecht hat und $\mathfrak{M}_1$ endliches Geschlecht hat.

Nun muss $(\mathfrak{K}_2+P_1)(\mathfrak{M}_1+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer sein. Angenommen in der Tat, dass $(\mathfrak{K}_2+P_1)(\mathfrak{M}_1+Q_1)$ nicht eine kompakte Menge oder leer ist. Dann $(\mathfrak{K}+P_1)(\mathfrak{M}_1+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer sein[3].

Q_2 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Eines von den beiden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, etwa $\mathfrak{P}_1$ ist in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Wir konstruieren auf $\mathfrak{P}_1+Q_2$ eine berandete Fläche $\mathfrak{B}$ derart, dass $\mathfrak{P}_1$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

---

1. $\varDelta_1$ mag mit $\varDelta_2$ übereinstimmen.
2. $\mathfrak{G}$ sei berandete oder unberandete Fläche. Wenn es g einfach-geschlossene Jordan-Kurve $C_i(i=1, 2, \cdots, g)$ auf $\mathfrak{G}$ von der Art gibt, dass je zwei von C_i keine Punkte gemein haben, und dass $\mathfrak{G}-(C_1+C_2+\cdots+C_g)$ zusammenhängend ist, und wenn es nicht $g+1$ solche Kurve gibt, so sagen wir, das Geschlecht von $\mathfrak{G}$ sei gleich g. Vgl. S. Stoilow. a. a. O. S. 84.
3. Vgl. den Beweis des Satzes XIV.

1. Der Rand von $\mathfrak{B}$ enthält Q_2.

2. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{B}$ mit Q_2, R_1, $R_2, \cdots$, R_n. $R_1+R_2+\cdots+R_n$ hat mit P_1+P_2 keine Punkte gemeinsam.

3. Jedes $R_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ end nicht homolog Null. Alle R_1, $R_2, \cdots$, R_n bestehen aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_3$.

Aus der Annahme, dass $(\mathfrak{K}_1+P_1)(\mathfrak{M}_1+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer ist, folgt ohne weiteres, dass $(\mathfrak{P}_1+Q_2)-\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{K}_2$ enthalten sein muss. Da $R_1+R_2+\cdots+R_n \sim Q_2$ ist, so muss $R_1+R_2+\cdots+R_n+P_2$ die Begrenzung einer kompakten Menge $\mathfrak{M}$ sein. Anderseits bestimmt P_2 auf $\mathfrak{K}_1$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, und zwar, dass $\mathfrak{H}_1$ bez. $\mathfrak{H}_2$ als Begrenzung die Menge P_2 bez. P_1+P_2 hat. Da P_1 nicht homolog mit P_2 ist, und da sowohl P_2 als auch P_1 nicht homolog Null ist, ist sowohl $\mathfrak{H}_1+P_2$ als auch $\mathfrak{H}_2+P_1+P_2$ nicht eine kompakte Menge. Da jedes von R_1, $R_2, \cdots$, R_n in $\mathfrak{K}_2$ enthalten ist, muss $\mathfrak{M}$ eines von $\mathfrak{H}_1+P_2$ und $\mathfrak{H}_2+P_1+P_2$ enthalten. Dies ist ein Widerspruch mit der Tatsache, dess $\mathfrak{M}$ eine kompakte Menge ist. Folglich muss $(\mathfrak{K}_2+P_1)(\mathfrak{M}_1+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer sein. Damit muss $(\mathfrak{K}_1+P_1)(\mathfrak{M}_2+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer sein.

Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_2+Q_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{N}$ derart, dass $\mathfrak{N}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

1. Der Rand von $\mathfrak{N}$ enthält Q_1.

2. Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{N}$ mit Q_1, T_1, $T_2, \cdots$, T_s. $T_1+T_2+\cdots+T_s$ hat mit P_1+P_2 keine Punkte gemeinsam.

3. Jedes $T_i (i=1, 2, \cdots, s)$ ist ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null. Alle T_1, $T_2, \cdots$, T_s bestehen aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_3$.

Aus der Tatsache, dass $(\mathfrak{K}_1+P_1)(\mathfrak{M}_2+Q_1)$ eine kompakte Menge oder leer ist, muss $(\mathfrak{M}_2+Q_1)-\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{K}_2$ enthalten sein. So enthält $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}$ das Gebiet $\mathfrak{K}_1$.

Aus der Annahme, dass $\mathfrak{K}_1$ unendliches Geschlecht hat, muss auch $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}$ unendliches Geschlecht haben.

Nun muss $\mathfrak{N}$ endliches Geschlecht haben, da $\mathfrak{N}$ eine berandete Fläche ist. Dieses Geshlecht bezeichnen wir mit a. Nach der Annabme hat $\mathfrak{M}_1$ auch endliches Geschlecht, das bezeichnen wir mit b.

Nun, da $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}$ unendliches Geschlecht hat, so können wir die $a+b+1$ einfach-geschlossenen Jordan-kurve $A_1, A_2, \cdots A_{a+b+1}$ im Innern von $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N}$ derart konstruieren, dass je zwei von $A_1, A_2, \cdots, A_{a+b+1}$ keine Punkte gemein haben, und dass $(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N})-(A_1+A_2+\cdots+A_{a+b+1})$ zusammenhängend ist.

Wir verbinden einen auf einem Ufer von $A_i (i=1, 2, \cdots a+b+1)$ liegenden Punkt mit einem auf dem andern Ufer von A_i liegenden Punkt durch ein im Innern von $(\mathfrak{M}_1+\mathfrak{N})-(A_1+A_2+\cdots+A_{a+b+1})$ laufenden Bogen B_i.

Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_1+Q_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{A}$ die Menge Q_1 enthält, und dass $\mathfrak{M}_1-$(das Innere von $\mathfrak{A}$) mit $Q_1+A_1+A_2+\cdots+A_{a+b+1}+B_1+B_2+\cdots+B_{a+b+1}$ keine Punkte gemein hat. $Q_1+A_1+A_2+\cdots+A_{a+b+1}+B_1+B_2+\cdots+B_{a+b+1}$ muss dann im Innern der berandeten Fläche $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}$ enthalten sein. $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}-(A_1+A_2+\cdots+A_{a+b+1})$ ist dann offenbar zusammenhängend. Daher muss das Geschlecht von $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}\geqq a+b+1$ sein.

Nun, da $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist, so muss das Geschlecht von $\mathfrak{A}\leqq b$ sein. Wir bezeichnen das Geshlecht von $\mathfrak{A}$ mit g. Es ist dann leicht einzusehen, dass das Geschlecht von $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}=a+g$ ist. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass das Geschlecht von $\mathfrak{A}+\mathfrak{N}\geqq a+b+1$ ist.

Also kommen wir unter der Annahme, dass $\mathfrak{K}_1$ unendliches Geschlecht hat und $\mathfrak{M}_1$ endliches Geschlecht hat. Daher muss, wenn $\mathfrak{K}_1$ unendliches Geschlecht hat, $\mathfrak{M}_1$ auch unendliches Geschlecht haben.

Ebenfalls können wir zeigen, dass, wenn $\mathfrak{K}_2$ unendliches Geschlecht hat, so $\mathfrak{M}_2$ auch unendliches Geschlecht haben muss.

W. z. b. w.

Dafinition: Es sei Δ_1 eine Simplizialzerlegung einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. $b_1(\neq 0)$ und $b_2(\neq 0)$ seien die beiden voneinander verschiedenen, zueinander punktfremden, Elemente von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$, und P_1 und P_2 seine die zu b_1 und b_2 gehörenden, zueinander punktfremden, einfach-geschlossenen Polygone von der Art, dass P_1 und P_2 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von Δ_1. Wenn ein P_2 enthaltendes Gebiet $\mathfrak{K}_1$ von den beiden durch P_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ unendliches Geschlecht hat, so sagen wir, dass b_2 in bezug auf b_1 in der Seite von unendlichem Geschlecht liegt.

Wenn $\mathfrak{K}_1$ endliches Geschlecht hat, so sagen wir, dass b_2 in bezug auf b_1 in der Seite von endlichem Geschlecht liegt.

Auf ganz analoge Weise können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz XVI. Es seien $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ die beiden voneinander unabhängigen[1] Simplizialzerlegungen einer orientierbaren offenen Fläche $\mathfrak{G}$. b sei ein einziges von Null verschiedenes Element von B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$, und P und Q seien die zu b gehörenden einfachgeschlossenen Polygone von der Art, dass P bez. Q aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung von $\varDelta_1$ bez. $\varDelta_2$ besteht.

Wenn ein Gebiet von den beiden durch P auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten endliches Geschlecht hat und das andere unendliches Geschlecht hat, so muss ein Gebiet von den beiden durch Q auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten endliches Geschlecht und das andere unendliches Geschlecht haben.

Wenn die beiden durch P auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebiete die endlichen (unendlichen) Geschlechter haben, so müssen die beiden durch Q auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebiete die endlichen (unendlichen) Geschlechter haben.

Beweis. P bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Q bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$. Eines von den beiden $(\mathfrak{M}_1+P)(\mathfrak{N}_1+Q)$, und $(\mathfrak{M}_2+P)(\mathfrak{N}_1+Q)$, etwa $(\mathfrak{M}_2+P)(\mathfrak{N}_1+Q)$ muss, wie bisher häufig gezeigt worden ist, eine kompakte Menge oder leer sein.

Wir können wie im Beweise des Satzer XV zeigen, dass, wenn $\mathfrak{M}_1$ unendliches Geschlecht hat, so $\mathfrak{N}_1$ auch unendliches Geschlecht haben muss, W. z. b. w.

Definition: Wir nehmen die obige Bezeichnungen an. Wenn sowohl $\mathfrak{M}_1$ als auch $\mathfrak{M}_2$ unendliches Geschlecht hat, so sagen wir, dass b auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete bestimmt, die die unendlichen Geschlechter haben.

Wenn eines von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ endliches Geschlecht und das andere unendliches Geschlecht hat, so sagen wir, dass ein Gebiet von den beiden durch b auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebiete endliches Geschlecht und das andere unendliches Geschlecht hat.

Satz XVII. Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zwei orientierbare offene Flächen, und B_1 bez. B_1' sei B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$ bez. $\mathfrak{G}'$. Dafür,

1. $\varDelta_1$ mag mit $\varDelta_2$ identisch sein.

dass $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ homöomorph sind, sind die folgenden drei Bedingungen notwendig.

1. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ haben dasselbe Geschlecht.

2. $\{b_n\}$ ($n=1, 2, \cdots$, ad. unendlich oder endlich) sei eine geeignete Basis von B_1 von der Art, dass beliebige endlich-viele Elemente von $\{b_n\}$ zueinander punktfremd sind. $\{b'_n\}$ sei eine geeignete Basis von B'_1 von der Art, dass beliebige endlich-viele Elemente von $\{b'_n\}$ zueinander punktfremd sind[1]. Es lässt sich zwischen $\{b_n\}$ und $\{b'_n\}$ eine eineindeutige Zuordnung[2] $b_n \rightleftarrows b'_n$ ($n=1, 2, \cdots$) derart herstellen, dass, wenn b_i und b_j durch b_k getrennt sind, so b'_i und b'_j durch b'_k getrennt sind.

3. $a_1 (\neq 0)$ und $a_2 (\neq 0)$ seien die beliebigen voneinander verschiedenen Elemente von B_1 und a'_1 und a'_2 seien die beiden, durch obiges Isomorphismus den Elementen a_1 und a_2 entsprechenden Elemente von B'_1. Jenachdem a_2 in bezug auf a_1 in der Seite von unendlichem oder endlichem Geschlecht liegt, liegt a'_2 in bezug auf a'_1 in der Seite von unendlichem oder endlichem Geschlecht.

Wenn B_1 ein einziges von Null verschiedenes Element b_1 hat, so muss 3. durch die folgende Bedingung 3′ ersetzt werden.

3′. Wenn b_1 auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete, die die unendlichen (oder endlichen) Geschlechter haben, bestimmt, so bestimmt auch b'_1 auf $\mathfrak{G}'$ die beiden Gebiete, die die unendlichen (oder endlichen) Geschlechter haben.

Wenn eines von den beiden, durch b_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten, Gebieten endliches Geschlecht hat und das andere unendliches Geschlecht hat, so hat eines von den beiden, durch b'_1 auf $\mathfrak{G}'$ bestimmten Gebieten, endliches Geschlecht und das andere unendliches Geschlecht.

Beweis. Dieser Satz folgt ohne weiteres aus den Sätzen XIII, XIV, XV, XVI.

Die Umkehrung dieses Satzes auch gilt.

Satz XVIII. Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ zwei orientierbare offene Flächen, und B_1 bez. B'_1 sei B_1-Gruppe von $\mathfrak{G}$ bez. $\mathfrak{G}'$. Dafür, dass $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ homöomorph sind, sind die folgenden drei Bedin-

1. Wenn B_1 ein einziges von Null verschiedenes Element hat, so muss B_1' aus einem einzigen von Null verschiedenen Element bestehen. Wenn B_1 nur Null-Element hat, so muss B_1' auch nur Null-Element haben.

2. Diese Zuordnung induziert nach dem Satze IV ein Isomorphismus zwischen B_1 und B_1'.

gungen hinreichend.

1. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ haben dasselbe Geschlecht.

2. $\{b_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ sei eine geeignete Basis von B_1 von der Art, dass beliebige endlich-viele Elemente von $\{b_n\}$ zueinander punktfremd sind. $\{b'_n\}$ sei eine geeignete Basis von B'_1 von der Art, dass beliebige endlich-viele Elemente von $\{b'_n\}$ zueinander punktfremd sind. Es lässt sich zwischen $\{b_n\}$ und $\{b'_n\}$ eine eineindeutige Zuordnung[1] $b_n \rightleftarrows b'_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ herstellen derart, dass, wenn b_i und b_j durch b_k getrennt sind, so b'_i und b'_j durch b'_k getrennt sind[2].

3. $a_1(\neq 0)$ und $a_2(\neq 0)$ seien die beliebigen Elemente von B_1 und a'_1 und a'_2 seien die beiden, durch obiges Isomorphismus den a_1 und a_2 entsprechechenden Elemente von B'_1. Wenn[3] sowohl a_1 und a_2 als auch a'_1 und a'_2 zueinander punktfremd sind, und wenn a_2 in bezug auf a_1 in der Seite von unendlichem (oder endlichem) Geschlecht liegt, so liegt a'_2 in bezug auf a'_1 in der Seite von unendlichem (oder endlichem) Geschlecht.

Wenn B_1 ein einziges von Null verschiedenes Element b_1 hat, so muss 3. durch die folgende Bedingung 3′ ersetzt werden.

3′. Wenn b_1 auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete, die die unendlichen (oder endlichen) Geschlechter haben, bestimmt, so bestimmt auch b'_1 auf $\mathfrak{G}'$ die beiden Gebiete, die die unendlichen (oder endlichen) Geschlechter haben.

Wenn eines von den beiden, durch b_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten, Gebieten endliches Geschlecht und das andere unendliches Geschlecht hat, so hat eines von den beiden, durch b'_1 auf $\mathfrak{G}'$ bestimmten, Gebieten endliches Geschlecht und das andere unedliches Geschlecht.

Beweis. Δ_1 und Δ'_1 seien die vorgelegten Simplizialzerlegungen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$. Als Simplizialzerlegung von $\mathfrak{G}$ bez. $\mathfrak{G}'$ nehmen wir im folgenden Δ_1 bez. Δ'_1 und die sukzessiven Unterteilungen von Δ_1 bez. Δ'_1 auf. Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle.

1. Fall. B_1 besteht aus mindestens zwei von Null verschie-

---

1. Dise Zuordnung induziert ein Isomorphismus zwischen B_1 und B_1'.

2. Wenn B_1 ein einziges von Null verschiedenes Element hat, so muss B_1' aus einem einzigen von Null verschiedenen Element bestehen. Wenn B_1 nur Null-Element hat, so muss B_1' auch nur Null-Element haben.

3. Diese Bedingung ist ein wenig schwächer als die Bedingung 3 des Satzes XVII.

denen Elementen[1]. In diesem Falle muss $\{b_n\}$ aus mindestens zwei Elementen.

1. Schritt: T_1 sei ein zu b_1 gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass T_1 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_2 von Δ_1 besteht. T_1 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Dabei können wir annehmen, dass, wenn eines von den beiden $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, etwa $\mathfrak{M}_2$ endliches Geschlecht hat, $\mathfrak{M}_2$ Geschlecht Null hat.

Wenn $\mathfrak{M}_2$ in der Tat endliches Geschlecht hat, so können[2] wir auf $\mathfrak{M}_2$ ein mit T_1 homologes einfach-geschlossenes Polygon V_1 derart konstruieren, dass, wenn wir die durch T_1+V_1 berandete Fläche mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen, $\mathfrak{M}_2+T_1-\mathfrak{P}$ Geschlecht Null hat. Wir haben nur zu bezeichnen wiederum $\mathfrak{M}_1+(\mathfrak{P}-V_1)$ mit $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2+T_1-\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{M}_2$, V_1 mit T_1.

Wir können nach der Bedingung 2 dieses Satzes ein zu b_2 gehörendes einfach-geschlossenes Polygon T_2 derart konstruieren, dass T_2 mit T_1 keine Punkte gemein hat. Wir nehmen an, dass T_2 in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist.

Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_1+T_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}$ von der Art, dass der Rand von $\mathfrak{A}$ das T_1 enthält und das Innere von $\mathfrak{A}$ das T_2 enthält, und dass alle mit T_1 gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_2 in $\mathfrak{A}$ enthalten sind, und dass jeds Komponente des Randes von $\mathfrak{A}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht homolog Null ist.

Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{A}$ mit T_1, $R_1, R_2, \cdots, R_n (n \geqq 2)$. $R_i (i=1, 2, \cdots, n)$ bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete, und eines von diesen beiden Gebiete muss in $\mathfrak{M}_1$ enthalten sein. Dieses Gebiet bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_i$. Wenn $\mathfrak{R}_i$ endliches Geschlecht hat, so ersetzen wir R_i durch ein in $\mathfrak{R}_i$ liegendes, mit R_i homologes einfach-geschlossenes Polygon W_i von der Art, dass, wenn wir die durch R_i+W_i berandete Fläche mit $\mathfrak{B}_i$ bezeichnen, $\mathfrak{R}_i+R_i-\mathfrak{B}_i$ Geschlecht Null hat. Daher können wir von Anfang an annehmen, dass $\mathfrak{R}_i$ unendliches Geschlecht oder Geschlecht Null hat.

---

1. Es kann nicht sich ergeben, dass B_1 aus genau zwei von Null verschiedenen Elementen besteht. Denn, wenn a und b die beiden von Null verschiedenen Elemente von B_1 sind, so muss B_1 $a+b(\neq 0)$ enthalten.

2. Vgl. den Beweis des Satzes VI.

R_i gehört zu einem Element a_i von B_1, so lässt sich a_i als lineare Kombination von endlich-vielen Elementen von der Basis $\{b_n\}$ von B_1 darstellen derart, dass $a_i = b^i_{11} + b^i_{12} + \cdots + b^i_{1p_i}$.

Wir nehmen aus $b^i_{1j}(j=1, 2,\cdots, p_i)(i=1, 2,\cdots, n)$ alle, bis auf b_1, Elemente auf, die durch das dritte von b^i_{1j} niemals getrennt von b_1 sind, und wir bezeichnen diese Elemente mit b_{11}, $b_{12},\cdots, b_{1p}$.

Wir können die einfach-geschlossenen Polygone T_{11}, $T_{12},\cdots, T_{1p}$ derart konstruieren, dass $T_{1i}(i=1, 2,\cdots, p)$ zu b_{1i} gehört, und dass je zwei von T_1, T_{11}, $T_{12},\cdots, T_{1p}$ keine Punkte gemein haben.

Je zwei von T_1, T_{11}, $T_{12},\cdots, T_{1p}$ können durch das dritte von T_1, T_{11}, $T_{12},\cdots, T_{1p}$ getrennt sein. Je zwei von T_{11}, $T_{12},\cdots T_{1p}$ können nicht in der Tat durch T_1 getrennt sein, da jedes $T_{1i}(i=1, 2,\cdots, p)$ wie R_1, $R_2,\cdots, R_n$ in $\mathfrak{M}_1$ enthalten sein muss. Angenommen zweitens, dass T_{11} und T_{12} durch T_{13} getrennt sind. T_{13} bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, und zwar, dass T_{11} etwa in $\mathfrak{P}_1$ und T_{12} in $\mathfrak{P}_2$ enthalthn ist. Wenn T_1 in $\mathfrak{P}_1$ enthalten ist, so sind T_1 und T_{12} durch T_{13} getrennt. Dies widerspricht aber der Eigenschaft von T_{11}, $T_{12},\cdots, T_{1p}$.

Wir können[1] ein zu $b_1 + b_{11} + \cdots + b_{1p}$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon V_{1p} auf $\mathfrak{M}_1$ derart konstruieren, dass V_{1p} mit $T_1 + T_{11} + T_{12} + \cdots + T_{1p}$ keine Punte gemein hat. $T_1 + T_{11} + \cdots + T_{1p} + V_{1p}$ bildet dann den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{G}_1$. $T_{1k}(k=1, 2,\cdots, p)$ bestimmt auf $\mathfrak{M}_1$ genau die beiden Gebiete, und eines von diesen beiden Gebieten hat mit $\mathfrak{G}_1$ keine Punkte gemeinsam. Dieses Gebiet bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_{1k}$.

Wir nehmen zweitens aus $b^i_{1j}(j=1, 2,\cdots, p_i)(i=1, 2,\cdots, n)$ alle Elemente auf, die durch $b_{1k}(k=1, 2,\cdots, p)$ getrennt von b_1 und durch ein von $b_{1k}(k=1, 2,\cdots, p)$ verschiedenes Element von b^i_{1j} niemals getrennt von b_1 sind. Wir bezeichnen diese Elemente mit b_{1k1}, b_{1k2}, $\cdots, b_{1kq_k}$.

Wir können die einfach-geschlossenen Polygone T_{1k1}, $T_{1k2},\cdots$, T_{1kq_k} derart konstruieren, dass $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)$ zu b_{1ki} gehört, und dass je zwei von T_1, T_{1k}, $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)$ keine Punkte gemein haben. Jedes $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)$ muss dann in $\mathfrak{H}_{1k}$ enthalten sein. Wir konstruieren in $\mathfrak{H}_{1k}$ ein zu $b_{1k} + b_{1k1} + \cdots + b_{1kq_k}$ gehörendes einfach-geschlossenes Polygon V_{1kq_k} derart, dass V_{1kq_k} mit $T_{1k1} + T_{1k2}$

1. Vgl. den Beweis des Satzes VI.

$+\cdots+T_{1kq_k}$ keine Punkte gemein hat. $T_{1k}+\sum_{i=1}^{q_k}T_{1ki}+V_{1kq_k}$ bildet dann den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{G}_{1k}$. $\mathfrak{G}_{1k}$ ist in $\mathfrak{H}_{1k}+T_{1k}$ enthalten.

Zu endlich vielen verschiedenen Malen wiederholen wir dieses Verfahren, so werden alle $b_{1j}^i(j=1, 2,\cdots, p_i)$ $(i=1, 2,\cdots, n)$ sich erschöfen. Wir können annehmen, dass mit b_1, $b_{1k}(k=1\ 2,\cdots, p)$ $b_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)\,(k=1, 2,\cdots, n)$ insgesamt $b_{1j}^i(j=1, 2,\cdots, p_i)\,(i=1, 2,\cdots, n)$ sich erschöfen, da andernfalls die folgende Beweisführung nicht sich verändert.

Wir können im Innern von $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_{11}+\mathfrak{G}_{12}+\cdots+\mathfrak{G}_{1p}$ ein mir R_j $(j=1,2,\cdots, n)$ homologes einfach-geschlossenes Polygon S_j konstruieren. S_j bestimmt auf $\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_{11}+\mathfrak{G}_{12}+\cdots+\mathfrak{G}_{1p}$ genau die beiden berandeten Flächen und zwar, dass eine von diesen beiden berandeten Flächen als Rand nicht T_1 enthält. Diese berandete Flächen bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_j$ und wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{B}_j$ mit S_j, S_1^j, $S_2^j,\cdots$, $S_{s_j}^j$.

Jedes $S_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)\,(j=1, 2,\cdots, n)$ ist mit einem von $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots,q_k)\,(k=1, 2,\cdots, p)$, $V_{1kq_k}(k=1, 2,\cdots, p)$, V_{1p} identisch.

Nach dem Satze XIV können wir ein mit $S_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)$ homologes einfach-geschlossenes Polygon $U_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)$ derart konstruieren, dass je zwei von $U_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)$ keine Punkte gemein haben, und dass jedes $U_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)$ mit R_j+T_1 keine Punkte gemein hat. Jedes U_i^j muss dann nach dem Satze XIII in $\mathfrak{R}_j$ enthalten sein, da S_i^j und T_1 durch S_j gertennt sind. Daraus folgt ohne weiteres, dass für zwei verschiedene (j, i) und (k, p) S_i^j und S_p^k nicht identisch sind. $T_1+\sum(U_1^j+U_2^j+\cdots+U_{s_j}^j)$ bildet den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{M}_1$.

Jedes U_i^j ist homolog mit einem von $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)\,(k=1, 2,\cdots, p)$, $V_{1kq_k}(k=1, 2,\cdots, p)$ und V_{1p}. Umgekehrt ist jedes von T_{1ki}, V_{1kq_k} und V_{1p} homolog mit einem von $U_i^j(i=1, 2,\cdots, s_j)\,(j=1, 2,\cdots, n)$. Denn die Summe eines echten Teilsystems von T_1, V_{1p}, V_{1kq_k}, $T_{1ki}(i=1, 2,\cdots, q_k)$ kann nach dem Satze VII niemals nullhomolog sein.

T_1' sei ein zu b_1' gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass T_1' aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_2' von Δ_1' besteht. T_1' bestimmt auf $\mathfrak{G}'$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$. T_2' sei ein zu b_2' gehörendes, mit T_1' keine Punkte gemeinsam besitzendes, einfach-geschlossenes Polygon. T_2' sei in $\mathfrak{M}_1'$ enthalten. Wenn $\mathfrak{M}_2$ Geschlecht Null hat, so muss nach der Bedingung 3 $\mathfrak{M}_2'$ endliches Geschlecht haben. Wir können debei annehmen, dass $\mathfrak{M}_2'$ wie $\mathfrak{M}_2$ Geschlecht Null hat.

$b_{1i}'(i=1, 2,\cdots, p)$ sei das dem b_{1i} entsprechendes Element von B_1'. Wir können ein zu b_{1i}' gehörendes einfach-geschlossenes Polygon T_{1i}' derart konstruieren, dass je zwei von T_1', $T_{11}',\cdots, T_{1p}'$ keine Punkte gemein haben. Nach der Bedingung 2 muss jedes T_{1i}' wie T_2' in $\mathfrak{M}_1'$ enthalten sein. Wir konstruieren ein zu $b_1'+b_{11}'+\cdots+b_{1p}'$ gehörendes einfach-geschlossenes V_{1p}' derart, dass V_{1p}' mit $T_1'+T_{11}'+\cdots+T_{1p}'$ keine Punkte gemein hat.

$T_1'+T_{11}'+\cdots+T_{1p}'+V_{1p}'$ bildet dann den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{G}_1'$. $T_{1k}'(k=1, 2,\cdots, p)$ bestimmt auf $\mathfrak{M}_1'$ genau die beiden Gebiete, und eines von diesen beiden Gebieten hat mit $\mathfrak{G}_1'$ keine Punkte gemeinsam. Dieses Gebiet bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_{1k}'$.

$b_{1ki}'(i=1, 2,\cdots, q_k)(k=1, 2,\cdots, p)$ sei das dem b_{1ki} entsprechendes Element. Wir können die einfach-geschlossenen Polygone T_{1k1}', $T_{1k2}',\cdots, T_{1kq_k}'$, V_{1kq_k}' derart konstruieren, dass T_{1ki}' zu $b_{1ki}'(i=1, 2,\cdots, q_k)$ und V_{1kq_k}' zu $b_{1k}'+b_{1k1}'+\cdots+b_{1kq_k}'$ gehört, und dass je zwei von $T_{1ki}'(i=1, 2,\cdots, q_k)$, V_{1kq_k}' keine Punkte gemein haben und jedes $T_{1ki}'(i=1, 2,\cdots, q_k)$ und V_{1kq_k}' mit $T_1'+T_{1k}'$ keine Punkte gemein hat. $T_{1k}'+\sum_{i=1}^{q_k}T_{1ki}+V_{1kq_k}$ bildet dann den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{G}_{1k}'$, und $\mathfrak{G}_{1k}'$ muss in $\mathfrak{H}_{1k}'+T_{1k}'$ enthalten sein.

$T_1'+\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{q_k}T_{1ki}'+\sum_{k=1}^{p}V_{1kq_k}'+V_{1p}'$ bildet den Rand von $\mathfrak{G}_1'+\mathfrak{G}_{11}'+\cdots+\mathfrak{G}_{1p}'$. Wir stellen eine Zuordnung ν von der Art her, dass $T_{1ki}\rightleftarrows T_{1ki}'$, $T_1\rightleftarrows T_1'$ $V_{1kq_k}\rightleftarrows V_{1kq_k}'$, $V_{1p}\rightleftarrows V_{1p}'$. Wir setzen $\nu(S_i^j)=S_i'^j(i=1, 2,\cdots, s_j)$, und wir konstruieren im Innern von $\mathfrak{G}_1'+\mathfrak{G}_{11}'+\cdots+\mathfrak{G}_{1p}'$ ein mit $S_1'^1+S_2'^1+\cdots+S_{s_1}'^1$ homologes einfach-geschlossenes Polygon R_1'. R_1' bestimmt auf $\mathfrak{G}'+\mathfrak{G}_{11}'+\cdots+\mathfrak{G}_{1p}'$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{N}_1'$ und $\mathfrak{N}_2'$ und zwar, dass $\mathfrak{N}_1'$ als Rand das $S_1'^1+S_2'^1+\cdots+S_{s_1}'^1+R_1'$ hat. Zweitens konstruieren wir im Innern von $\mathfrak{N}_2'$ ein mit $S_1'^2+S_2'^2+\cdots+S_{s_2}'^2$ homologes einfach-geschlossenes Polygon R_2'. Auf diese Weise konstruieren wir R_1', $R_2',\cdots, R_n'$ derart, dass je zwei von T_1', R_1', $R_2',\cdots, R_n'$ keine Punkte gemein haben.

$T_1'+R_1'+R_2'+\cdots+R_n'$ bildet den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{A}'$ auf $\mathfrak{M}'$. $\mathfrak{M}_1'-\mathfrak{A}'$ wird in n Gebiete $\mathfrak{K}_1'$, $\mathfrak{K}_2',\cdots, \mathfrak{K}_n'$ zerlegt, wobei $\mathfrak{K}_i'(i=1, 2,\cdots, n)$ als Begrenzung das R_i' hat. Wir können annehmen, dass $\mathfrak{K}_i'$ unendliches Geschlecht oder Geschlecht Null hat.

Wir bezeichnen das Geschlecht von $\mathfrak{A}$ mit p und das Gechlecht von $\mathfrak{A}'$ mit p'.

Wenn $p=p'$ ist, so können wir eine togologische Abbildung τ_1 von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ derart herstellen, dass $R_i (i=1, 2,\cdots, n)$ durdh τ_1 sich auf R'_i und T_1 sich auf T'_1 abbilden lassen.

Angenommen zweitens, dass $p>p'$ ist. Aus der Bedingung 1 dieses Satzes und aus der Konstruktionsmethode von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, muss eines von $\mathfrak{R}'_i (i=1, 2,\cdots, n)$ unendliches Geschlecht haben. Wenn etwa $\mathfrak{R}'_2$ unendliches Geschlecht hat, so konstruieren wir auf $\mathfrak{R}'_2$ ein mit R'_2 homologes einfach-geschlossenes Polygon W'_2 derart, dass die durch $R'_2+W'_2$ berandete Fläche $\mathfrak{P}'$ das Geschlecht $p-p'$ hat. $\mathfrak{A}'+\mathfrak{P}'$ hat dann das Geschlecht p. Wir bezeichenen der Kürze halber wiederum W'_2 mit R'_2, $\mathfrak{A}'+\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{R}'_2+R'_2-\mathfrak{P}'$ mit $\mathfrak{R}'_2$. Wir können danach eine topologische Abbildung τ_1 von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}'$ derart herstellen, dass durch τ_1 $R_i (i=1, 2,\cdots, n)$ sich auf R'_i und T_1 sich auf T'_1 abbilden lassen.

Wenn $p<p'$ ist, gilt ganz ähnliche Verfahrungsweise.

2. Schritt: Wir konstruieren auf $\mathfrak{R}'_i (i=1, 2,\cdots, n)$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}'_{1i}$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{A}'_{1i}$ das R'_i enthält und jede Komponente des Randes von $\mathfrak{A}'_{1i}$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}'$ und nicht nullhomolog ist, und dass alle mit R'_i gemeinsame Punkte enthaltenden und noch nicht in $\mathfrak{A}'$ enthaltenen Simplexe von Δ'_2 in $\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}'_{11}+\cdots+\mathfrak{A}'_{1n}$ enthalten sind. $(\mathfrak{R}'_i+\mathfrak{R}'_i)-\mathfrak{A}'_{1i}$ wird genau in die n_i Gebiete $\mathfrak{R}'_{i1}, \mathfrak{R}'_{i2},\cdots, \mathfrak{R}'_{in_i}$ zerlegt. Wir können annehmen, dass jedes $\mathfrak{R}'_{ij} (j=1, 2,\cdots, n_i) (i=1, 2,\cdots, n)$ unendliches Geschlecht oder Geschlecht Null hat.

Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{A}'_{1i}$ mit R'_i, $R'_{i1}, R'_{i2},\cdots, R'_{in_i}$. Wenn $n_i=1$ ist, so konstruieren wir auf $\mathfrak{R}_i+R_i$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}_{1i}$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{A}_{1i}$ aus R_i und einem mit R_i homologen einfach-geschlossenes Polygon R_{11} besteht.

Angenommen zweitens, dass $n_i>1$ ist. R'_{ij} gehört zu einem Element $a'_{ij} (j=1, 2,\cdots, n_i)$ von B'_1 von $\mathfrak{G}'$. a_{ij} sei das dem a'_{ij} entsprechende Element von B_1 Wie im 1. Schritte können wir auf $\mathfrak{G}$ die einfach-geschlossene Polygone $P_1, P_2,\cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}, \cdots, P_n, P_{ij} (j=1, 2,\cdots, n_i)$ derart konstruieren, dass P_1 zu a_1, P_2 zu $a_2,\cdots, P_{ij}$ zu a_{ij} gehört, und dass $T_1+P_1+P_2+\cdots+P_{i-1}+P_{i+1}+\cdots+P_n+\sum_{i=1}^{ni} P_{ij}$ bildet den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{G}$.

Wir können nun im Innern von $\mathfrak{R}$ ein mit $T_1+P_1+\cdots+P_{i-1}+P_{i+1}+\cdots+P_n$ homologes einfach-geschlossenes Polygon P_i konstruieren. Je zwei von T_1, P_1, $P_2, \cdots$, P_{i-1}, P_i, $P_{i+1}, \cdots$, P_n, $P_{ij}(i=1, 2, \cdots, n_i)$ haben keine Punkte gemeinsam. Daher können wir nach dem Satze XIV ein zu a_{ij} gehörendes einfach-geschlossenes Polygon R_{ij} derart konstruieren, dass je zwei von $R_{ij}(j=1, 2, \cdots, n_i)$ keine Punkte gemein haben, und dass jedes R_{ij} mit $T_1+R_1+\cdots+R_{i-1}+R_i+R_{i+1}+\cdots+R_n$ keine Punkte gemein haben.

Jedes $P_{ij}(j=1, 2, \cdots, n_i)$ ist durch P_i getrennt von T_1, damit muss nach dem Satze XIII jedes R_{ij} durch R_i von T_1 getrennt sein. Folglich muss jedes R_{ij} in $\mathfrak{R}_i$ enthalten sein.

$R_i+\sum\limits_{j=1}^{ni} R_{ij}$ bildet den Rand einer berandeten Fläche $\mathfrak{A}_{1i}$ auf $\mathfrak{R}_i+R_i$. $(\mathfrak{R}_i+R_i)-\mathfrak{A}_{1i}$ wird genau in die n_i Gebiete $\mathfrak{R}_{i1}$, $\mathfrak{R}_{i2}, \cdots$, $\mathfrak{R}_{in_i}$ zerlegt. Wir können annehmen, dass jedes $\mathfrak{R}_{ij}(j=1, 2, \cdots, n_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ unendliches Geschlecht oder Geschlecht Null hat.

Wir bezeichnen das Geschlecht $\mathfrak{A}_{1i}$ mit p und das Geschlecht von $\mathfrak{A}'_{1i}$ mit p'. Wir im 1. Schritte können wir annehmen, dass $p=p'$ ist. Wir können dann eine topologische Abbildung τ_{2i} von $\mathfrak{A}_{1i}$ auf $\mathfrak{A}'_{1i}$ derart herstellen, dass R_{ij} sich durch τ_{2i} auf R'_{ij} und R_i sich durch τ_{2i} auf R'_i abbilden lassen, und dass auf R_i τ_1 und τ_{2i} ganz übereinstimmen.

3. Schritt: Setzen wir diese Verfahren abwechselnd für $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}'_1$ fort, so können wir eine topologische Abbildung τ von $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{M}'_1$ herstellen. Ebenfalls können wir eine topologische Abbildung μ von $\mathfrak{M}_2$ auf $\mathfrak{M}'_2$ herstellen. Dabei können wir sogar fordern, dass auf T_1 τ und μ ganz übereinstimmen.

2. Fall. B_1 besteht aus nur einem einzigen von Null verschiedenen Element b_1. In diesem Falle muss B'_1 nach der Bedingung 2 aus nur einem einzigen von Null verschiedenen Element b'_1. Wir unterscheiden den 2. Fall in die folgenden deiden Fälle.

Fall A. Eines von den beiden, durch b_1 auf $\mathfrak{G}$ bestimmten Gebieten hat endliches Geschlecht und das andere hat unendliches Geschlecht.

T_1 sei ein zu b_1 gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass T_1 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_2 von Δ_1 besteht. T_1 bestimmt auf $\mathfrak{G}'$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$. Wir können annehmen, dass $\mathfrak{M}_2$ das Geschlecht Null hat.

T'_1 sei ein zu b'_1 gehörendes einfach-geschlossenes Polygon von der Art, dass T'_1 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer

Unterteilung Δ_2' von Δ_1' besteht. T_1' bestimmt auf $\mathfrak{G}'$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$. Nach der Bedingung 3′ dieses Satzes muss eines von den beiden $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$, etwa $\mathfrak{M}_2'$ endliches Geschlecht haben. Wir können annehmen, dass $\mathfrak{M}_2'$ das Geschlecht Null hat.

Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_1+T_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{G}_1$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{G}_1$ das T_1 enthält und jede Komponente des Randes von $\mathfrak{G}_1$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ und nicht nullhomolog ist, und dass alle mit T_1 gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_2 in $\mathfrak{G}_1$ enthalten sind.

Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{G}_1$ mit T_1, $R_1, R_2, \cdots, R_n$. Dabei muss $n=1$ sein. Denn wenn $n>1$ ist, so kann nicht nach dem Satze VII jedes $R_i (i=1, 2, \cdots, n)$ homolog mit T_1 sein. Dies ist unmöglich, da B_1 aus nur einem einzigen von Null verschiedenen Element b_1 besteht.

Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_1'+T_1'$ eine berandete Fläche $\mathfrak{G}_1'$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{G}_1'$ das T_1' enthält und jede Komponente des Randes von $\mathfrak{G}_1'$ ein Schnitt von $\mathfrak{G}'$ und nicht nullhomolog ist, und dass alle mit T_1' gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_2' in $\mathfrak{G}_1'$ enthalten sind. Der Rand von $\mathfrak{G}_1'$ besteht aus zwei einfach-geschlossenen Polygonen T_1' und R_1'.

Wir bezeichnen das Geschlecht von $\mathfrak{G}_1$ mit p und das Geschlecht von $\mathfrak{G}_1'$ mit p'. Wir im 1. Falle können wir annehmen, dass $p=p'$ ist. Wir können dann eine topologische Abbildung τ_1 von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{G}_1'$ derart herstellen, dass durch τ_1 R_1 sich auf R_1' und T_1 sich auf T_1' abbilden lässt.

Zu unendlich vielen verschiedenen Malen setzen wir diese Verfahren fort, so können wir eine topologische Abbildung τ von $\mathfrak{M}_1$ auf $\mathfrak{M}_1'$ herstellen. Ebenfalls können wir eine topologische Abbildung μ von $\mathfrak{M}_2$ auf $\mathfrak{M}_2'$ herstellen. Dabei können wir sogar fordern, dass auf T_1 τ und μ ganz übereinstimmen.

Fall B. b_1 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete, die die unendlichen (endlichen) Geschlechter haben. In diesem Falle können wir auf ähnliche Weise wie im Falle A. zeigen, dass $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ homöomnrph sind.

3. Fall. B_1 besteht aus unr Null-Element. In diesem Falle muss B_1' nach der Bedingung 2 aus Null-Element bestehen.

T_1 sei ein einfach-geschlossenes Polygon und sei ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ von der Art, dass T_1 aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_2 von Δ_1 besteht. T_1 bestimmt dann auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, und eines von den beiden $\mathfrak{M}_2+T_1$ und $\mathfrak{M}_1+T_1$, etwa $\mathfrak{M}_1+T_1$ muss kompakt sein. Wir konstruieren auf $\mathfrak{M}_2+T_1$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{A}$ das T_1 enthält und jede Komponente des Randes ein Schnitt von $\mathfrak{G}$ ist, und dass alle mit T_1 gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_2 in $\mathfrak{A}$ enthalten sind.

Wir bezeichnen die Komponenten des Randes von $\mathfrak{A}$ mit T_1, $R_1, R_2, \cdots, R_n$. R_i bestimmt auf $\mathfrak{G}$ genau die beiden Gebiete, und eines von diesen beiden Gebieten muss in $\mathfrak{M}_2$ enthalten sein. Wir bezeichnen dieses Gebiet mit $\mathfrak{K}_i$.

Eines und nur eines von den $\mathfrak{K}_1+R_1$, $\mathfrak{K}_2+R_2, \cdots$, $\mathfrak{K}_n+R_n$ muss nicht kompakt sein. Angenommen in der Tat, dass $\mathfrak{K}_1+R_1$ und $\mathfrak{K}_2+R_2$ nicht kompakt sind. R_1 bestimmt auf $\mathfrak{G}$ die beiden Gebiete $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{A}+\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_n$. Aber sowohl $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{A}+\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_n$ als auch $\mathfrak{K}_1+R_1$ kann nicht kompakt sein. Dies widerspricht der Annahme, dass B_1 aus Null-Element besteht.

Wir nehmen an, dass $\mathfrak{K}_1+T_1$ nicht kompakt ist und $\mathfrak{K}_2+R_2, \cdots$, $\mathfrak{K}_n+R_n$ kompakt sind. Der Kürze halber bezeichnen wir $\mathfrak{A}+\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_n$ wiederum mit $\mathfrak{A}$. Der Rand uon $\mathfrak{A}$ besteht dann aus T_1 und R_1, und $\mathfrak{G}-(\mathfrak{A}+\mathfrak{M}_1)$ ist nicht kompakt.

T_1' sei ein einfach-geschlossenes Polygon und sei ein Schnitt von $\mathfrak{G}'$ von der Art, dass T_1' aus den 1-dimensionalen Simplexen von einer Unterteilung Δ_2' von Δ_1' besteht. T_1' bestimmt auf $\mathfrak{G}'$ die beiden Gebiete $\mathfrak{M}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$. Wir nehmen an, dass $\mathfrak{M}_1'+T_1'$ kompakt ist.

Wir können auf $\mathfrak{M}_2'+T_1'$ eine berandete Fläche $\mathfrak{A}'$ von der Art, dass der Rand von $\mathfrak{A}'$ aus zwei einfach-geschlossenen Polygonen T_1' und R_1' besteht, und dass alle mit T_1' gemeinsame Punkte enthaltenden 2-dimensionalen Simplexe von Δ_2' in $\mathfrak{A}'$ enthalten sind. Wir bezeichnen $(\mathfrak{M}_2'+T_1')-\mathfrak{A}'$ mit $\mathfrak{K}_1'$.

Wir bezeichnen das Geschlecht von $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{A}$ mit p und das Geschlecht von $\mathfrak{M}_1'+\mathfrak{A}'$ mit p'. Wenn $p=p'$ ist, so können wir eine topologische Abbildung τ_1 von $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{M}_1'+\mathfrak{A}'$ derart herstellen, dass dusch τ_1 R_1 sich auf R_1' abbilden lässt.

Wenn $p>p'$ ist, so konstruieren wir auf $\mathfrak{K}_1'+R_1'$ eine berandete Fläche $\mathfrak{B}'$ derart, dass der Rand von $\mathfrak{B}'$ aus zwei einfach-geschlossenen Polygonen R_1' und S_1' besteht, und dass das Geschlecht von $\mathfrak{B}'$ gleich $p-p'$ ist. Der Kürze halber bezeichnen wir wiederum

$\mathfrak{A}'+\mathfrak{B}'$ mit $\mathfrak{A}'$ und S'_1 mit R'_1. Wir können danach eine topologische Abbildung τ_1 von $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{M}'_1+\mathfrak{A}'$ derart herstellen, dass durch τ_1 R_1 sich auf R'_1 abbilden lässt.

Wenn $p<p'$ ist, gilt die ähnliche Verfahrungeweise.

Zu unendlich vielen verschiedenen Malen wiederholen wir das obige Verfahren, so können wir eine topologische Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ herstellen. W. z. b. w.

Die Beziehungen zwischen B_1-Gruppe und dem Geschlecht und die Homöomorphie-Bedingungen für nicht orientierbare offene Flächen will ich in anderer Gelegenheit behandeln.

Literaturverzeichnis.

P. Alexandroff und H. Hopf. Topologie. Berlin. (1936)

E. Čech. Les groupes de Betti dùn complexe infini. Fund. Math. 25. (1935)

B. v. Kerékyártó. Vorlesungen über Topologie. Berlin. (1923)

S. Saks. Sur L'homéomorphie des variétés à deux dimensions. Fund. Math. 5. (1924)

S. Stoïlow. Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques. (1938)