

Über Streckenkomplex und Ordnung gebrochener Funktionen.

Von

Yukio KUSUNOKI

(Eingegangen am 10 Sept, 1950)

Es sei W eine über der w -Ebene ausgebreitete einfach zusammenhängende unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche. Nach dem Hauptsatz der konformen Abbildung lässt sich W eineindeutig und, bis auf eventuelle innere Windungspunkte endlicher Ordnung, konform entweder auf den Einheitskreis $|z| < 1$ (hyperbolischer Fall) oder die punktierte Ebene $|z| < \infty$ (parabolischer Fall) abbilden. Für das Eintreten des parabolischen Falles, haben L. Ahlfors [1], Z. Kobayashi [4], R. Nevanlinna [5], E. Ullrich [7], [8] usw. die Verhältnisse zwischen Flächenstruktur und Ordnung gebrochener Funktion $w(z)$ untersucht.

Im folgenden ziehen wir die Riemannsche Fläche $W = W(a_1, \dots, a_n)$ in Betracht, die nur über endlich vielen Stellen a_1, \dots, a_n verzweigt ist. Wir bezeichnen einen zugehörigen Streckenkomplex (oder kurz Komplex) mit $T(W)$ und schätzen unter einer Bedingung über $T(W)$ die Ordnung von $w(z)$ nur vermittels $T(W)$ (unabhängig von der Lage der Grundpunkte) ab.

§ 1. Je nachdem das Gebiet des Streckenkomplexes aus zwei, 2λ ($\lambda > 1$) oder unendlich vielen Gliedern bestehen, bezeichnen wir es bzw. schlichtes, algebraisches ($(\lambda-1)$ -ter Ordnung) oder logarithmisches Elementargebiet. Diese Elementargebiete sind den Windungspunkten der Fläche W eineindeutig zugeordnet.

Nun definieren wir die Folge $\mathfrak{T} = \{T_n\}$ der Teilkomplexe T_n ($n=1, 2, \dots$) von T , so dass sie folgenden Bedingungen genügt.

1°. T_n ist die Menge der Glieder (mit der Länge 1) von T und jedes an Knotenpunkten von T_n hängige Glied von T gehört zu T_{n+1} . Also gilt

$$\mathfrak{T}: T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n \subset \dots \rightarrow T.$$

2°. T_n ist einfach zusammenhängend in bezug auf T ; d. h. zwei beliebige Punkte von T_n lassen sich einander durch nur Punkte von T_n verbinden und wenn Glieder von T_n abgeschlossene Kurven bilden, so gehören die durch diese Kurve begrenzten Teilgebiete von T zu T_n . Mit Hilfe derart bestimmter Folge \mathfrak{Z} definieren wir ferner den Teil

$T'(n-1 \leqq t < n; n=2, 3, \dots)$ von T wie folgt:

Für ein an Knotenpunkte von T_n hängiges Glied $s=ab\bar{c}T_n$,

i) falls a (oder b) $\in T_n$, adjungiert man dem T_n den Teil ac (oder bc) von s , wo \overline{ac} (oder \overline{bc}) $=t-(n-1)$, $c \in s$.

ii) falls beide $a, b \in T_n$, adjungiert man dem T_n , wenn $t-(n-1) < \frac{1}{2}$, die Teile ac, bd von s , wo $\overline{ac} = \overline{bd} = t-(n-1)$, $c, d \in s$, und

wenn $\frac{1}{2} \leqq t-(n-1) < 1$, s selbst.

Einen Teil von T , der mittels derartiger Operationen bei jedem an T_n hängigen Glied von T schliesslich erhalten ist, bezeichnen wir mit T' . Speziell setzen wir $T'=T_{n+1}$, wenn $t=n$. Es sei nun $\nu(t)$ die gesamte Anzahl der Knotenpunkte von T' und $\sigma(t)$ die Länge des äusseren Randes l' von T' , der einen Anfangsknotenpunkt von $t=\infty$ trennt. Dann gilt der folgende Satz von Z. Kobayashi [4].

Satz 1. Wenn für $t \rightarrow \infty \int^t \frac{dt}{\sigma(t)}$ divergent ist, so gehört die Fläche W zum parabolischen Typus und ist die Ordnung von $w(z)$ höchstens gleich

$$\frac{1}{4} D(a_1, \dots, a_q) \inf_{\mathfrak{Z}} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int^t \frac{dt}{\sigma(t)}} \right\},$$

wo $D(a_1, \dots, a_q)$ den grössten Dilatationsquotienten bei derjenigen pseudo-regulären Funktion darstellt, wodurch die Grundpunkte a_1, \dots, a_q auf die q Punkte $e^{\frac{2\pi k}{q}}$ ($k=0, 1, \dots, q-1$) abgebildet werden. Im folgenden betrachten wir nur den parabolischen Fall, so dass $\int^t \frac{dt}{\sigma(t)} \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$ für die Folge \mathfrak{Z} , und setzen

$$\frac{1}{4} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int^t \frac{dt}{\sigma(t)}} = K(\mathfrak{Z}).$$

§ 2. 1. Wir kehren nun nach offenen Flächen $W=W(a_1, \dots, a_p)$ zurück. Falls $q=2$ ist, ist die einzige Flächentyp (mit nur zwei logarithmischen Windungspunkten) möglich, also ist dann, nach dem bekannten Satz [1], [5], die zugehörige Ordnung gleich eins (Mitteltypus). Falls $q=3$, können wir durch eine lineare Transformation die Punkte a_1, a_2, a_3 auf $e^{i\frac{2\pi}{3}k}$ ($k=0, 1, 2$) abbilden. Aus Satz 1 folgt nunmehr, dass die betreffende Ordnung die Schranke $\inf K(\mathfrak{X})$ nicht übersteigen kann. Im vorliegenden Paragraphen setzen wir zuerst die

Bedingung (A): Die Grundpunkte a_1, \dots, a_q ($q > 3$) sollen auf einem Kreise (oder einer Gerade) liegen.

voraus. Dann kann man erst annehmen, durch eine günstige lineare Transformation der Veränderlichen w , so dass

$$\begin{aligned} a_k &= e^{i\theta_k} & (k=1, \dots, q) \\ \theta_{k+1} - \theta_k &\equiv \varphi_k > 0 \quad (\theta_1 = 0, \theta_{q+1} = 2\pi). \end{aligned} \quad (1)$$

Nun bezeichnen wir die Gesamtheit der Grundpunkte, die sich mit

$$\theta_i = \pi \cdot \frac{\beta_i}{\alpha_i} \quad (\alpha_i, \beta_i: \text{positive ganze Zahlen, ausser } \beta_1 = 0) \quad (2)$$

ausdrücken lassen, mit E_1 und andere mit E_2 . Falls die Menge E_2 nicht leer ist, nimmt man jetzt für jedes Element $a_j \in E_2$ einen Punkt a'_j , der folgender Eigenschaften genügt:

$$|a'_j| = 1, \quad |\arg a'_j - \theta_j| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \arg a'_j = \pi \cdot \frac{\beta_j}{\alpha_j}$$

(α_j, β_j : positive ganze Zahlen), wo $0 < \varepsilon < \frac{1}{4} \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \min_{i \neq j} |a_i - a_j|$ ($i, j = 1, \dots, q$).

Es ist leicht zu sehen, dass ein solcher Punkt a'_j immer existiert. Hier betrachten wir diejenige pseudo-reguläre Funktion F_j , welche die Peripherie $|w - a_j| = \frac{\varepsilon_0}{2}$ invariant lässt und den Punkt a_j auf a'_j abbildet. Es sei $\delta_j(\varepsilon)$ der grösste Dilatationsquotient bei jeder Abbildung F_j und $\delta(\varepsilon) = \max_{a_j \in E_2} \delta_j(\varepsilon)$. Dann kann man leicht berech-

nen, dass $\delta(\varepsilon) \rightarrow 1$, für $\varepsilon \rightarrow 0$ (vgl. [3] oder Fussnote⁽¹⁾). Nach den obigen pseudo-regulären Abbildungen, bezeichnen wir, der Abkürzung halber, die q Grundpunkte mit (1) und (2), (wobei nun $i=1, \dots, q$). Setzt man

$$\varphi_i = \pi \frac{a_i \bar{\beta}_{i+1} - a_{i+1} \bar{\beta}_i}{a_i a_{i+1}} \equiv \pi \frac{\delta_i}{\gamma_i},$$

$$\varphi_0 \equiv \pi / \prod_{i=1}^q \gamma_i, \quad p_i \equiv \delta_i \cdot \prod_{j \neq i} \gamma_j \quad (i=1, \dots, q),$$

so sind p_i ($i=1, \dots, q$) positive ganze Zahlen und gilt $\varphi_i = p_i \varphi_0$. Wir zerlegen nun jeden Bogen $\widehat{a_i a_{i+1}}$ in p_i gleiche Teilen und es sei \bar{a}_k ($k=1, \dots, p$) die $p = \sum_{i=1}^q (p_i - 1)$ entsprechenden gleichzeitig gelegenen Punkte, ausser a_i , auf der Peripherie. Wir können jetzt den Komplex T_N denken, welcher $p+q = \sum_{i=1}^q p_i \equiv N$ Punkte a_i, \bar{a}_k als die neuen Grundpunkte besitzt.⁽²⁾

2. Komplex T_N . Da die Riemannsche Fläche W nur über den Punkten a_i ($i=1, \dots, q$) verzweigt ist, gibt es immer reguläre Punkte über \bar{a}_k ($k=1, \dots, p$). T_N unterscheidet sich nicht von $T = T_q$, ausser dass p_i Glieder zwischen zwei Knotenpunkten von T_N statt eines Gliedes in T gezogen werden, das topologisches Gebild der auf W liegenden Kurve ist, deren Projektion auf w -Ebene den Bogen $\widehat{a_i a_{i+1}}$ durchgeht. Die Anzahl der Glieder, die von jedem Knotenpunkt von T_N ausgehen, ist immer gleich N . Wir definieren nun die Folge $\mathfrak{T}' = \{T'_n\}$ der Teilkomplexe von $T' \equiv T_N$ folgendermassen:

1°. T'_n besteht aus allen Gliedern von T' , die dieselben Knotenpunkte wie T_n enthalten und diese Punkte von einander verbinden. Ferner gehört jedes Glied von T' , das von Knotenpunkten von T'_n ausgehen, immer dem T'_{n+1} .

(1) Die pseudo-reguläre Funktion, welche die Peripherie $|z|=r$ invariant lässt und den Mittelpunkt $z=0$ auf $z=\rho$ ($\rho < r$; ρ : reell) abbildet, ist $\rho - \frac{\rho}{r} |z| + z$. Es sei nun q der grösste Dilatationsquotient. Dann gilt

$$q + \frac{1}{q} = p < 2 + \frac{\rho^2}{r(r-\rho)}.$$

(2) In § 2-3 soll man jeden Komplex mittels derjenigen Zerschneidungskurve konstruieren, welche nach der Reihenfolge des Arguments die Grundpunkte durchgeht.

2. T_n ist einfach zusammenhängend in bezug auf T' .

Mittels $\{T_n\}$ kann man ferner den Teil T' von T durch Operationen i), ii) in § 1. definieren. Sei $\nu'(t)$ die gesamte Anzahl der Knotenpunkte, $\sigma'(t)$ die Länge des äusseren Randes von T' (vgl. § 1) und ferner $\mu(n)$ die gesamte Anzahl derjenigen nicht T_n gehörigen Glieder von T_{n+1} , die von den Knotenpunkten von T_n ausgehen. Dann gilt

$$\nu'(t) = \nu(t) \tag{3}$$

$$\sigma'(t) < \sigma(t) + N \cdot \mu(t), \tag{4}$$

wo $\mu(t) \equiv \mu(n)$ für $n-1 \leq t < n (n=2, \dots)$.

3. Wenn die Folge \mathfrak{Z} der Bedingung (B)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} = 0$$

genügt, erklären wir hier anschaulich folgendermassen: *Der Komplex T besitzt die tiefen Golfe (in bezug auf \mathfrak{Z}).* In diesem Falle gilt für $t > t_0(\epsilon, N)$

$$\frac{\mu(t)}{\sigma(t)} < \frac{\epsilon}{N} \quad (\epsilon: \text{dasselbe in § 2. 1.}).$$

Daher

$$\int_{t_0}^t \frac{dt}{\sigma'(t)} > \int_{t_0}^t \frac{dt}{\sigma(t) + N\mu(t)} > \frac{1}{1+\epsilon} \int_{t_0}^t \frac{dt}{\sigma(t)}.$$

Unter den Bedingungen (A), (B) ist dann die Ordnung von $w(z)$ höchstens gleich

$$\delta(\epsilon) (1+\epsilon) \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_0}^t \frac{dt}{\sigma(t)}}.$$

Wir fixieren einen beliebigen Wert α und setzen

$$\int_{\alpha}^t \frac{dt}{\sigma(t)} \equiv F(t).$$

Da für $t \rightarrow \infty$ $F(t) \rightarrow \infty$ ist, so hat man

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int_{t_0}^t \frac{dt}{\sigma(t)}} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{F(t) \left(1 - \frac{F(t_0)}{F(t)}\right)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{F(t)},$$

also ist diese Wert unabhängig von $t_0(\epsilon, N)$. Mit Rücksicht auf der Tatsache, dass für $\epsilon \rightarrow 0$ $\delta(\epsilon) \rightarrow 1$ ist, erhalten wir das folgende Hilfssatz 1. Wenn der Komplex der gegebenen Fläche $W(a_i)$ mit der Bedingung (A) die profunden Golfe (in bezug auf \mathfrak{X}) besitzt, ist die Ordnung zugehöriger Abbildungsfunktion dann höchstens gleich $\inf \cdot K(\mathfrak{X})$.

Bemerkung. Nimmt man speziell als \mathfrak{X} die Generationsfolge, so kann man die Bedingung (B) wie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Anzahl der Gliedern von der } n\text{-ten Generation}}{\text{Anzahl der Knoten auf äusserem Rand von } T_n} = 0$$

darstellen. Dabei ist die im Nenner liegende Anzahl gleich $\sigma_0(n)$: vgl. H. Wittich [9] p. 662.

§ 3. Hilfssatz 2. Es sei auf einem Kreise $\mathbb{R}: |w| = R$, $r (< q)$ Grundpunkte a_1, \dots, a_r liegend und die übrigen $q - r$ punkte a_{r+1}, \dots, a_q ($\neq 0, \infty$) beliebig gegeben, aber keine zwei Punkte von a_i ($i=1, \dots, q$) liegen gleichzeitig auf jedem Halbstrahl $\arg w = \text{Konst}$. Ferner nimmt man an, dass es über den Punkten a_{r+1}, \dots, a_q stets nur reguläre Punkte oder algebraische Windungspunkte endlicher Ordnung ($\leq M-1$) existiert. Falls der betreffende Komplex dann die profunden Golfe in bezug auf \mathfrak{X} besitzt, ist die Ordnung entsprechender Abbildungsfunktion höchstens gleich $\inf \cdot K(\mathfrak{X})$.

Beweis. Wir mögen zuerst annehmen, dass $R=1$. Unter obigen Voraussetzungen, in analoger Weise, wie schon in § 2. 1. angegeben wurde, denkt man teilweise pseudo-reguläre Abbildung

$$w_1(w) = \begin{cases} F_i(w) (w \in K_i : |w - a_i| < \frac{\epsilon_0}{2}) \\ w (w \in \bar{K}_i) (i=1, \dots, q), \end{cases} \quad (5)$$

wobei $F_i(w)$, mit dem grössten Dilatationsquotienten $\delta(\epsilon)$, die Peripherie $|w - a_i| = \frac{\epsilon_0}{2}$ invariant lässt und den Punkt a_i auf a'_i abbildet (vgl. § 2. 1.). Dadurch können wir N Halbstrahlen $\arg w_1$

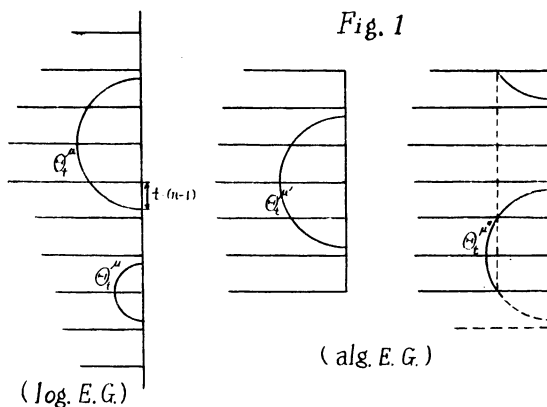
$= \frac{2\pi}{N}k$ ($k=0, 1, \dots, N-1$) so ziehen, dass sie q Grundpunkte durchgehen. Nun ziehen wir in den derart bestimmten N Winkelräumen die Winkelhalbierenden und i. a. bezeichnen den Winkelraum, der von zwei neben einander gelegten Winkelhalbierenden begrenzt ist und den Punkt a enthält, mit $\mathfrak{S}(a'_j)$. Wir ziehen ferner diejenigen pseudo-regulären Funktionen G_j in $\mathfrak{S}(a'_j)$, ($j=r+1, \dots, q$) in Betracht, die die Rände von $\mathfrak{S}(a'_j)$ invariant lassen und die Punkte a'_j auf den Punkten \bar{a}_j abbilden, wo $\bar{a}_j = \overline{0a'_j} \cap \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}' : |w_1| = 1$. Es sei Q_j der grösste Dilatationsquotient bei obiger Abbildung G_j und $Q = \max_{j=r+1, \dots, q} Q_j$. Mit $w_2(w_1)$ bezeichnen wir teilweise pseudo-reguläre Abbildung:

$$w_2(w_1) = \begin{cases} G_j(w_1) & (w_1 \in \mathfrak{S}(a'_j)) \\ w_1 & (w_1 \in \bar{\mathfrak{S}}(a'_j)) \end{cases} \quad (6)$$

und betrachten wir, wie früher, den Komplex $T_N = T'$ mit $N = p + q$ Grundpunkten $\{a_\lambda\} : a'_i (i=1, \dots, r)$, $\bar{a}_j (j=r+1, \dots, q)$, $\bar{a}_k (k=1, \dots, p)$ und den Gliedkurven $\arg w_2 = \frac{\pi}{N}(2k+1)$. Durch die Funktionen

$$\zeta_\mu^{(\lambda)}(w_2) = \frac{1}{\pi} \log \frac{a_\lambda^{\frac{N}{2}} - w_2^{\frac{N}{2}}}{a_\lambda^{\frac{N}{2}} + w_2^{\frac{N}{2}}} \quad \begin{matrix} (\lambda=1, \dots, N) \\ (\mu=1, 2, \dots) \end{matrix} \quad (7)$$

werden die über $\mathfrak{S}(a_\lambda)$ liegenden logarithmischen oder algebraischen Elementargebiete $\mathfrak{E}_\mu(a_\lambda)$ von $(m-1)$ -ter Ordnung ($m \geq 1$) bzw. schlicht konform in die Halbebene $\mathfrak{G}_\mu : \Re \zeta_\mu < 0$, oder, bis auf ein den Punkt a_λ enthaltender Einschnitt von $\mathfrak{E}_\mu(a_\lambda)$, in das Gebiet $\mathfrak{G}_\mu : \Re \zeta_\mu < 0, |\Im \zeta_\mu| < m\pi$, abgebildet. Die Knoten $(0, \infty)$ auf Elementargebieten gehen in die Punkte $\zeta_\mu = i\tau$ über, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Nun ziehen wir die am äusseren Rand Γ' von T' grenzenden Elementargebiete, die denselben entsprechen-



de Gebiete $\mathfrak{G}_\mu(\alpha_\lambda)$, \mathfrak{G}_μ in Betracht und schreiben in $\Re \zeta_\mu < 0$ die Halbkreise, die jedem Gebiet \mathfrak{G}_μ gehörige Teile von I' als Durchmesser haben (Fig. 1). Die gesamte Länge derart bestimmter Menge θ_t von Halbkreisen ist gleich $\frac{\pi}{2} \sigma'(t)$, wobei $\sigma'(t)$ die Länge des äusseren Randes von T' ist. Seien $z = z(\zeta_\mu)$ die Abbildungsfunktionen, die sich aus $w(z)$, (5), (6) und (7) ergeben. Dann zu in z -Ebene enthaltendem Bild von θ_t gehört ein geschlossener Zweig $\Gamma_t^0(t \geq t_0)$, der $z=0$ umschlingt. Auf diese Kurve sei $r_1(t)$ der kleinste, $r_2(t)$ der grösste Wert von $|z|$ und $\omega(t) = \log r_2(t) - \log r_1(t)$. Mit $s = \log z$ bezeichnen wir denjenigen Zweig des Logarithmus, dessen Imaginärteil zwischen 0 und 2π liegt. Dann erhält man für $t \geq t_0$

$$\sqrt{4\pi^2 + \omega^2(t)} \leq \sum_{\mu} \int_{\theta_t^{\mu}} \left| \frac{ds}{d\zeta_{\mu}} \right| \cdot |d\zeta_{\mu}|,$$

wo $\theta_t = \sum_{\mu} \theta_t^{\mu}$.

Durch Anwendung der Schwarzischen Ungleichung

$$4\pi^2 + \omega^2(t) \leq \sum_{\mu} \int_{\theta_t^{\mu}} |q(\zeta_{\mu})| \cdot |d\zeta_{\mu}| \cdot \sum_{\mu} \int_{\theta_t^{\mu}} \left| \frac{ds}{d\zeta_{\mu}} \right|^2 \cdot \frac{|d\zeta_{\mu}|}{|q(\zeta_{\mu})|}, \quad (8)$$

wobei $q(\zeta_{\mu})$ die grösste Dilatationsquotient an ζ_{μ} bedeutet. Jetzt durch Benutzung der Formeln: (vgl. Teichmüller [6])

$$D_{x|z} = D_{z|x}, \quad D_{x|z} \leq D_{x|y} \cdot D_{y|z}, \quad \left| \frac{dx}{dz} \right|^2 \leq D_{x|z} \frac{dx}{dz},$$

wobei z. B. $D_{x|z}$ den Dilatationsquotienten bei $x \rightarrow z$ und dx , dz bzw. die Flächenelement von x -oder z -Ebene darstellt, ist der rechtsstehende Ausdruck von (8) kleiner als

$$L(t) \cdot \sum_{\mu} \int_{\theta_t^{\mu}} \frac{ds}{d\zeta_{\mu}} |d\zeta_{\mu}|,$$

wobei $L(t) = \delta(\varepsilon) \{ \sigma(t) + (N + 2MQ)\mu(t) \}$, $d\zeta_{\mu} = |d\zeta_{\mu}| \cdot dt$. Nun nach dem gleichen Beweisprozess wie Ahlfors'sche Verzerrungssatz erhalten wir

$$\log r_1(t_2) - \log r_2(t_1) \geq \frac{4}{\delta(\varepsilon)} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sigma(t) + (N + 2MQ)\mu(t)} - 8\pi$$

Es sei λ die betreffende Ordnung von $w(z)$. Da nun $w = \infty$ nicht

der Ausnahmewert in Picard-Borelschem Sinn ist,

$$\lambda = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, \infty)}{\log r} \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{4} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(t)}{\int_t^{\infty} \frac{dt}{\sigma(t) + (N + 2MQ)\mu(t)}}.$$

Also können wir beweisen sogleich den Hilfssatz 2 in analoger Weise wie beim Hilfssatz 1. w. z. b. w.

§ 4. Allgemeiner Fall. 1. Es handelt sich nun um allgemeinen Fall, wo die Lage von Grundpunkten a_1, \dots, a_q ($q > 3$) beliebig.⁽¹⁾ Wir betrachten dann ein Polynom vom Grade $q-1$:

$$\zeta = R(w) = p_1 w^{q-1} + p_2 w^{q-2} + \dots + p_q, \tag{9}$$

wo die Koeffizienten p_i ($i=1, \dots, q$) durch

$$R(a_\nu) = b_\nu \quad (\nu=1, \dots, q) \quad (b_\mu \neq b_\nu) \tag{10}$$

bestimmt werden, wobei b_ν ($\nu=1, \dots, q$) die reellen Zahlen bedeuten, die noch den folgenden Bedingungen genügen. Zuerst gemäss (9), (10)

$$p_i = -\frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^q A_{ij} b_j \quad (i=1, \dots, q).$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^{q-1} a_1^{q-2} \dots a_1 & 1 \\ a_2^{q-1} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_q^{q-1} & \dots & a_q & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \prod_{i < j} (a_i - a_j) \neq 0$$

und A_{ij} ($i, j=1, \dots, q$) die Komplemente von a_{ji} in $\Delta = |a_{lm}|$ sind. Schliesslich b_ν ($\nu=1, \dots, q$) sollen so bestimmt werden, dass

$$\zeta' = \left(\frac{dR}{dw} \right)_{w=a_k} = \sum_{j=1}^q B_{kj} b_j \quad (k=1, \dots, q),$$

nicht verschwinden, wobei $B_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_i (q-i) A_{ij} a_k^{q-i-1}$ ($k, j=1, \dots, q$).

(1) Wir mögen annehmen $a_1, \dots, a_q \neq \infty$.

Weil $B_{ij} \neq 0 (i \neq j)^{(1)}$, genügt es zu nehmen als (b_1, \dots, b_q) z. B. nacheinander reelle positive Zahlen folgendermassen:

$$\begin{aligned} \max_{k=1, \dots, q} |B_{k1}| b_1 &< \min_{k=1, \dots, q} |B_{k2}| b_2, \\ \max_k |B_{k1} b_1 + B_{k2} b_2| &< \min_k |B_{k3}| b_3, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

wobei man nicht B_{ii} bei min betrachtet, wenn sie verschwinden.

2. Es sei V die von derart bestimmtem Polynom (9) erzeugte $q-1$ blättrige geschlossene Riemannsche Fläche, die Windungspunkte über den Punkten ζ_1, \dots, ζ_x hat, und $w_1 \dots w_m$ die entsprechenden Kreuzungspunkte in der w -Ebene, deren Vielfachheit bzw. $\lambda_1, \dots, \lambda_m (\leq q-1)$ ist. Es existiert offenbar auf $\zeta = \zeta_x = \infty$ ein algebraischer Windungspunkt von der Ordnung $q-2$ (z. B. $\lambda_m = q-1$). Für die von der zusammengesetzten Funktion

$$\zeta = \varphi(z) \equiv R(w(z)) \tag{11}$$

erzeugte Riemannsche Fläche X ergeben sich dann Windungspunkte über $b_i = R(a_i)$ und $\zeta_j (i=1, \dots, q; j=1, \dots, x)$. Da $\frac{dR}{dw}$ für $w = a_i (i=1, \dots, q)$ nicht verschwindet, fallen keine zwei Punkte a_i, w_x , aufeinander zusammen und lassen sich die Umgebungen von Windungspunkten über a_i schlicht und konform auf dieselben über

(1) z. B. $B_{12} \neq 0$. In der Tat setzen wir

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_1^{q-1} & \dots & a_1 & 1 \\ x^{q-1} & \dots & x & 1 \\ a_3^{q-1} & \dots & & \\ \dots & & & \\ a_q^{q-1} & \dots & a_q & 1 \end{vmatrix}.$$

Nach Differentiation von Determinante gilt dann $B_{12} = \frac{f'(a_1)}{d}$.

Andererseits

$$f(x) = \frac{(a_1 - x)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_q)}{(x - a_3) \dots (x - a_q)} \dots \dots \dots (a_{q-1} - a_q).$$

daher

$$f'(a_1) = - \frac{(a_1 - a_3)^2 \dots (a_1 - a_q)^2}{(a_{q-1} - a_q)} \neq 0$$

$\zeta = b_i$ abbilden. Ausserdem über $\zeta = \zeta_j (\neq b_i)$ ergeben sich nur algebraische Windungspunkte von der Ordnung $\leq q-2$. Wir ziehen nun durch mindestens zwei Punkte von $b_1, \dots, b_q, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ höchstens $\binom{q+n}{2}$ Kreise, die der Gerade $\Re \zeta = 0$ orthogonal sind, und nehmen einen nicht auf Peripherien der obigen Kreisen gelegenen Punkt $P(\zeta_0)$ und lineare Transformation

$$\chi = \chi(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \bar{\zeta}_0}.$$

So wird $|\chi(b_i)| = 1$ und noch kommen keine beliebigen zwei Punkte von $\chi(b_i)$ und $\chi(\zeta_n)$, ($\neq 0, \infty$), wobei nur algebraische Windungspunkte von der Ordnung $\leq q-2$ über $\chi(\zeta_n)$ ($|\chi(\zeta_n)| \neq 1$) liegen, gleichzeitig auf jedem Halbstrahl $\arg \chi = \text{Konst.}$ Nun bezeichnen wir bzw. mit \tilde{X} und \tilde{V} bzw. das durch χ abgebildete Bild von X und V .

3. Komplex $T(\tilde{X})$ von \tilde{X} . Auf der χ -Ebene verbinden wir nach der Reihenfolge des Arguments die Punkte $\chi(b_1), \dots, \chi(b_q), \chi(\zeta_1), \dots, \chi(\zeta_n)$ durch eine einfach geschlossene Kurve \mathfrak{L} , die die Ebene in zwei einfach zusammenhängende Gebiete \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zerlegt. Durch inverse Funktion von $\chi(R(w))$ wird man dann als schlichtes Bild von Projektion (auf \tilde{V}) von \mathfrak{L} ein Kurvensystem N (oder kurz Netz) gewinnen und mit $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ jede $g (= q-1)$ Bildgebiete von bzw. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} bezeichnen. Die Punkte $a_i (i=1, \dots, q), w_j (j=1, \dots, m)$ liegen stets auf dem Netz N , aber a_i fallen nicht auf die Knotenpunkte von N zusammen. Wäre a_i nämlich ein Knotenpunkt von N , so müsste es eine mehrfache Stelle von $R(w)$ sein, weil, bei einem Umlauf um den Knotenpunkt von N , $\lambda (> 1)$ Gebiete $\tilde{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ abwechselnd aufeinander folgen. Da aber a_i andererseits die einfache Stelle von $R(w)$ ist, ist dies unmöglich.

Wir ziehen nun durch die Grundpunkte a_i eine geschlossene Jordankurve L , die sich mit N in einem Winkel schneidet und die w -Ebene in zwei einfach zusammenhängende Gebiete A, I zerlegt und konstruieren den Komplex $T(W)$. Aus der Betrachtung von § 4. 2. zuerst folgt, dass sich dieselben Elementargebiete wie $T(W)$ und noch neu die regulären oder algebraischen Elementargebiete, deren Ordnungen höchstens gleich $g-1$ sind, in $T(\tilde{X})$ ergeben. Um diesen Umstand eingehend zu sehen, denken wir nun einen an $\lambda (2 \leq \lambda \leq q)$ Elementargebieten $E_k (k=1, \dots, \lambda)$ in $T(W)$ gemein-

samen Innenknoten Q , der dem Grundgebiete I entspricht, und nehmen wir an, dass E_k den Windungspunkten P_k über a_1, \dots, a_{i_μ} eineindeutig zugeordnet sind. Das dem Punkt Q entsprechende Grundgebiet I besteht aus endlich vielen Teilgebieten von $\tilde{\mathfrak{U}}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$. Weil Punkte $a_{i_1}, \dots, a_{i_\mu}$ die Kreuzungspunkte von N und L sind, gibt es immer nur ein $\tilde{\mathfrak{U}}$ und ein $\tilde{\mathfrak{S}}$ um $a_{i_1}, \dots, a_{i_\mu}$, das miteinander in I eindringt. Um Windungspunkte P_k und $Q_k (k=1, \dots, \lambda)$ müssen die Folgen kongruenter Exemplare $(A^*, I^*)^{(1)}$, $(\mathfrak{U}^*, \mathfrak{S}^*)$ abwechselnd zusammengeheftet werden, wobei Q_k die den Punkten P_k zugeordneten Windungspunkte über $\chi(b_{i_1}), \dots, \chi(b_{i_\mu})$ sind. Die Bildgebiete $\mathfrak{U}^*, \mathfrak{S}^*$ von Gebieten $\tilde{\mathfrak{U}}^*$ und $\tilde{\mathfrak{S}}^*$, die im Punkte Q entsprechenden Gebiete I_Q^* auf W eindringen, winden nun um Q_k und sind mit höchstens $2g-1$ Gebieten \mathfrak{U}^* oder \mathfrak{S}^* einander zu verbinden. Wenn wir nun dem Punkte Q bei jedem Elementargebiete $\bar{E}_k^{(2)}$ nur einen Randknotenpunkt (von \bar{E}_k) zuordnen lassen, der dem in I_Q^* eindringenden Gebiete $\tilde{\mathfrak{U}}^*$ oder $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ entspricht, dann dem Punkte Q ordnen die höchstens λ Randknotenpunkte von $\bar{E}_k (k=1, \dots, \lambda)$ zu, welche einander durch die aus höchstens $2g-1$ Gliedern bestehende Kette verbunden werden. Sei nun Q' ein benachbarter Knotenpunkt von Q , der dem Grundgebiete A entspricht. Jetzt ordnen wir dem Punkte Q' die noch nicht dem Punkte Q zugeordneten Knotenpunkte von $T(\tilde{X})$ lassen zu, die den in A_Q^* eindringenden $\tilde{\mathfrak{U}}^*$ und $\tilde{\mathfrak{S}}^*$ entsprechen. Nun sind Gebiete $\tilde{\mathfrak{U}}$ und $\tilde{\mathfrak{S}}$ nicht beschränkt, weil alle ihre Ränder immer den Punkt $w = \infty$ durchgehen (wegen $\lambda_m = q-1$), und einerseits ist I beschränkt. Also durch diese Zuordnung den zwei Punkten Q, Q' ordnen $2g$ Knoten von $T(\tilde{X})$ zu. Seien ferner E, E' die längs des Gliedes QQ' gelegenen benachbarten Elementargebiete. Dann möchten wir noch bemerken, dass die Randknotenpunkte von \bar{E} und \bar{E}' , die den Punkten Q, Q' zuordnen, auch einander benachbar sind und i. a. zwischen \bar{E} und \bar{E}' die sog. "Abwicklung" von $T(\tilde{V})$ eintreten, wodurch sich neue reguläre oder algebraische Elementargebiete ergeben. Falls (9) allgemeine rationale Funktion

(1) Mit U^* bezeichnet man dasjenige kongruente Exemplar U auf der Fläche, dessen Projektion U ist.

(2) Im allgemeinen bedeutet \bar{E} dasselbe entsprechende Elementargebiet in $T(\tilde{X})$ wie E (in $T(W)$).

ist, weil einige Punkte a_i und w_j aufeinander zusammenfallen können, so wird sich für $T(X)$ die Elementargebiete von höherer Ordnung als dieselben in $T(W)$ ergeben, indem die Glieder mit einer Periode zwischen den Randknoten von $T(X)$ eintreten, die den benachbarten zwei Innenknoten von $T(W)$ zuordnen. Jedoch in diesem Falle wird auch, ohne wesentliche Modifizierung, die obige Betrachtung in bezug auf den anderen Umständen gelten. Wenn $w(z)$ nur p logarithmische Windungspunkte besitzt, besteht der Komplex $T(X)$ von $R(w(z))$ aus p periodischen Enden und die betreffende Ordnung von $R(w(z))$, oder $w(z)$, genau gleich $\frac{p}{2}$. (vgl. E. Ullrich [7], [8]).

4. Hier definieren wir die Folge $\tilde{\mathfrak{T}} = \{\tilde{T}_n\}$ der Teilkomplexe von $\tilde{T} = T(\tilde{X})$, die den folgenden Bedingungen genügen.

1°. \tilde{T}_n besteht aus allen Ketten in \tilde{T} , welche die den Knotenpunkten von T_n (in obigem Sinn) zugeordneten Randknotenpunkte von \tilde{T} einander verbinden aber nicht die den Knotenpunkten von T_m ($m > n$) zugeordneten Punkte durchgehen. Und jedes von Knotenpunkten von \tilde{T}_n ausgehende Glied (von \tilde{T}) immer gehört zu \tilde{T}_{n+1} .

2°. \tilde{T}_n ist einfach zusammenhängend in bezug auf \tilde{T} .

Bestimmt man nun wie früher \tilde{T}^t und die Grössen $\tilde{\nu}(t)$, $\tilde{\sigma}(t)$, $\tilde{\mu}(t)$ für \tilde{T}^t , dann gilt es nach obiger Betrachtung (§ 4.3), dass

$$\begin{cases} \tilde{\nu}(t) < \text{Konst.} \cdot \nu(t) + O(1) \\ \sigma(t) < \tilde{\sigma}(t) < \sigma(t) + \text{Konst.} \cdot \mu(t) + O(1) \\ \tilde{\mu}(t) < \text{Konst.} \cdot \mu(t) + O(1) \end{cases} \quad (12) \quad (\text{Konst.} < 2g)$$

Somit, falls $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mu(t)}{\sigma(t)} = 0$, so wird $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\mu}(t)}{\tilde{\sigma}(t)} = 0$.

Mit vorhergehender Bereitung (§ 4.2.) nunmehr nach Hilfssatz 2 folgt, dass die Ordnung von $\chi(R(w(z)))$ nicht die Schranke $\inf_{\tilde{\mathfrak{T}}} K(\tilde{\mathfrak{T}})$ übersteigen kann. Aus (12) gilt es nun ebenso wie § 2.3, dass

$$K(\tilde{\mathfrak{T}}) \leq (1 + \epsilon) K(\mathfrak{T})$$

Andererseits haben $w(z)$ und $\chi(R(w(z)))$ die gleiche Ordnung, also erhält man bei $\epsilon \rightarrow 0$ dem folgenden

gilt es für Generationsfolge

$$\nu(t) = O(t), f(t) = O(1)$$

,also nach Satz 3. ist die Ordnung allerdings genau gleich $\frac{p}{2}$.
Nun können wir noch einen Komplex: z. B. Fig. 2, wo $p=q=4$,
 $\nu(t) = O(t)$, $f(t) = O(\sqrt{t})$, (also zugehörige Riemannsche Fläche)
leicht konstruieren, der unendlich viele algebraische Elementarge-
biete (algebraische Windungspunkte) von wachsender Ordnung
besitzt, aber die Wachstumsordnung nicht beeinflusst.

§5. Bemerkung. Es sei $\sigma_1(t)$ für nur die algebraischen Ele-
mentargebiet $E((\lambda-1)$ -ter Ordnung) so modifizierte Länge des
äusseren Randes I^v von T^v , wie man statt r die Länge $2\lambda-r$ nimmt,
falls die Länge r eines am Gebiet E grenzenden Teil von I^v grösser
als λ ist. (vgl [4]) Offenbar $\sigma_1(t) \leq \sigma(t)$. Nun können wir, wie
früher, unsere Sätze 1-3 für $\sigma_1(t)$ beweisen.

Mathematisches Institut,
Universität zu Kyoto.

Literaturverzeichnis

- [1] L. Ahlfors, Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math 58 (1932)
- [2] E. Drape, Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckenkomplex. Deut. Math. I (1936)
- [3] S. Kakutani, Applications of the theory of pseudo-regular functions to the type problem of Riemann surfaces. Jap. Journ. Math, vol. 13 (1937)
- [4] Z. Kobayashi, Ōtsuka Sūgaku kaishi vol. 10 (1941)
- [5] R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta Math. 58 (1932)
- [6] O. Teichmüller, Eine Anwendung quasikonformer Abbildungen auf das Typenproblem Deut. Math. (1937)
- [7] E. Ullrich, Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre. Gött. Nachr. Nr 9 (1936)
- [8] E. Ullrich, Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. J. D. M. V. XLVI (1936)
- [9] H. Wittich, Über die konforme Abbildung einer Klasse Riemannscher Flächen. Math. Zeit. 45 (1939)