MEMOIRS OF THE COLLEGE OF SCIENCE, UNIVERSITY OF KYOTO, SERIES A,
Vol. XXVII, Mathematics No. 1, 1952

Sur quelques équations fonctionnelles et leurs solutions caractéristiques II.

Par

Akira KUWAGAKI

(Reçu le 30 Mai, 1951)

Nous avons exprimé, dans le mémoire précédent, une nouvelle méthode de solution de quelques équations functionnelles[1] par l'itération et l'intégrale.

Nous élargirons, dans ce mémoire, cette méthode jusqu'au cas de fonction inconnue à deux variables, mais c'est essentiellement efficace pour fonction inconnue à n variables ($n \geqq 3$).

1. L'équation fonctionnelle.

Considérons l'équation fonctionnelle suivante, dont la fonction inconnue $f(x, y)$ est continue (ou sommable) dans le rectangle I: $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$.

$$f(x, y) = \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f\left\{\frac{x+(m-i)a+(i-1)b}{m}, \frac{y+(n-j)c+(j-1)d}{n}\right\} \tag{1}$$

où m et n sont deux nombres naturels fixes, et λ est un paramètre réel.

Au cas plus simple, par exemple, l'équation (1) est

$$f(x, y) = \lambda\Big\{f\Big(\frac{x}{3}, \frac{y}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{3}, \frac{y}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+2}{3}, \frac{y}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{3}, \frac{y+1}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{3}, \frac{y+1}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+2}{3}, \frac{y+1}{2}\Big)\Big\} \tag{1'}$$

dans I': $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Mais après cela, nous prendrons l'équation générale (1), parce que celle-ci est, plutôt, plus courte que l'équation (1').

2. Le cas où $\lambda > 0$.

Posons, dans l'équation (1),

$$\frac{x+(m-k)a+(k-1)b}{m}, \quad \frac{y+(n-l)c+(l-1)d}{n}$$

$$(k=1, 2, \ldots\ldots, m\,;\ l=1, 2, \ldots\ldots, n)$$

au lieu de x et y respectivement, employant encore dans l'équation (1) ces mn relations obtenues ci-dessus, nous obtenons l'équation suivante par le même calcul que l'équation fonctionnelle à une variable[1],

$$f(x, y)=\lambda^2 \sum_{i=1}^{m^2} \sum_{j=1}^{n^2} f\left\{\frac{x+(m^2-i)a+(i-1)b}{m^2}, \frac{y+(n^2-j)c+(j-1)d}{n^2}\right\}$$

Après la même itération de N fois pour un nombre naturel quelconque N, on a

$$f(x, y)=\frac{\theta^N}{m^N n^N} \sum_{i=1}^{m^N} \sum_{j=1}^{n^N} f\left\{\frac{x+(m^N-i)a+(i-1)b}{m^N}, \frac{y+(n^N-j)c+(j-1)d}{n^N}\right\} \equiv \theta^N g(N)$$

où $\lambda=\dfrac{\theta}{mn}$ ou $\theta=mn\lambda.$

Supposons que la fonction $f(x, y)$ soit sommable dans le rectangle I, on a

$$\lim_{N\to+\infty} g(N)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_I f(x, y)\,dxdy,$$

par consequent, on doit diviser le problème en trois cas suivants, par rapport à la valeur de θ.

1° $\theta=1.$

$$f(x, y)=\frac{1}{(b-a)(d-c)}\iint_I f(x, y)\,dxdy=c_0 : \text{ const.} \qquad (2.1)$$

2° $\theta<1.$

$$f(x, y)=0 \qquad (2.2)$$

3° $\theta>1.$

$$\iint_I f(x, y)\,dxdy=0 \qquad (2.3)$$

Remplissant l'équation (1), 1° et 2° sont toutes les solutions de ce problème.

3. Le cas 3°.

Nous supposons ici, de plus, l'existence de dérivées partielles continues de $f(x, y)$ jusqu'à l'ordre convenable.

Après les différentiations de $p+q$ fois, on aura

$$\frac{\partial^{p+q}f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}=\frac{\lambda}{m^p n^q}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}f\left\{\frac{x+(m-i)a+(i-1)b}{m},\ \frac{y+(n-j)c+(j-1)d}{n}\right\} \tag{3}$$

Abrégeant pour la commodité, considérons la fonction:

$$\frac{\partial^{p+q}f(x,y)}{\partial x^p \partial y^q}\equiv f_{p,q}(x,y)$$

comme la fonction inconue, par la comparaison entre $\dfrac{\lambda}{m^p n^q}$ et $\dfrac{1}{mn}$, c'est-a-dire, entre λ et $m^{p-1}n^{q-1}$, on aura les trois cas différents, pour divers valeurs de la paire (p, q).

a) Si $\lambda=m^{p-1}n^{q-1}$,

$$f_{p,q}=c_0:\ \text{const.} \tag{4.1}$$

b) Si $\lambda<m^{p-1}n^{q-1}$,

$$f_{p,q}=0. \tag{4.2}$$

c) Si $\lambda>m^{p-1}n^{q-1}$,

$$\iint_I f_{p,q}dxdy=0. \tag{4.3}$$

4. Le cas où il y a une paire (p, q) remplissant $\lambda=m^{p-1}n^{q-1}$.

D'abord, nous allons chercher la solution $f(x, y)$ dont $f_{p,q}\equiv c_{p,q}\neq 0$ pour une seule paire (p, q) et dont $f_{p,q}\equiv 0$ pour les autres paires remplissant $\lambda=m^{p-1}n^{q-1}$.

Alors, par l'intégration de la relation

$$df_{p',q'}=f_{p'+1,q'}dx+f_{p',q'+1}dy \tag{5}$$

avec les aides de (4.2) et de (4.3), les dérivées partielles $f_{p',q'}$ dans lesquelles $p'+q'\leqq p+q$, et $p'\neq 0, 1, 2, \ldots\ldots$ ou p et $q'\neq 0, 1, 2, \ldots\ldots$ ou q, sont nulles identiquement.

Donc, quand on intègre quelques égalités de différentielles comme (5) et en détermine les constantes de l'intégration remplissant chaque condition (4.3), on obtiendra la fonction $f_{p',q'}$ que satisfait l'équation (3) dans laquelle on pose $p=p'$ et $q=q'$. Comme le côté droit de (5) se compose successivement d'une différentielle totale, les fonction $f_{p', q'}$, pour moindre valeur de p' et q', pourra être trouvées de proche en proche par les intégrations, enfin on arrivera $f_{0,0}\equiv f(x, y)$.

Ainsi, cette fonction $f(x, y)$ est un polynôme de degré p, q par rapport à x et y respectivement, et la coefficient du terme $x^p y^q$ est égale à $\dfrac{c_{p,q}}{p\,!\,q\,!}$.

5. La solution générale.

Supposons que l'équation $\lambda=m^{p-1}n^{q-1}$ par rapport à (p, q) ait ν solutions:

$$(p_\alpha, q_\alpha) \qquad (\alpha=1, 2, \ldots\ldots, \nu)$$

et que $f_\alpha(x,y)$ $(\alpha=1, 2, \ldots\ldots, \nu)$ soit telle solution de l'équation (1) que

$$f_{\alpha\,;\, p_\alpha,\, q_\alpha}=1$$

et

$$f_{\alpha\,;\, p_\beta,\, q_\beta}=0 \qquad \text{pour} \qquad \beta=1, 2, \ldots\ldots, \nu \neq \alpha$$

Alors, si $f(x, y)$ est une solution quelconqe de (1) telle que

$$f_{p_\alpha,\, q_\alpha}=c_{p_\alpha,\, q_\alpha}\equiv c_\alpha \qquad (\alpha=1, 2, \ldots\ldots, \nu)$$

la fonction:

$$g(x, y)\equiv f(x, y)-\sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha f_\alpha(x, y)$$

est aussi une solution de (1), et pour la paire (p', q') remplissante

$$p'+q'=\max_\alpha\ (p_\alpha+q_\alpha)=r$$

on a toujours

$$g_{p', q'}\equiv 0.$$

D'après les égalités (5) et (4.3), cela est encore verifiée, en ordre, pour $p'+q'=r-1, r-2, \ldots\ldots, 0$, d'où on conclut que

$$g(x, y)\equiv 0.$$

C'est-à-dire, la solution générale $f(x, y)$ de l'équation (1) est donnée comme suivant:

$$f(x, y) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\nu} c_\alpha f_\alpha(x, y) \tag{6}$$

(c_α : const. arbitraire)

Quand il n'y a pas (p, q) remplissant $\lambda = m^{p-1}n^{q-1}$, la solution devient banale, et

$$f(x, y) \equiv 0$$

est la seule solution.

Parce que les nombres naturels m, n n'entrent pas dans la condition (4. 3), toutes les solutions que nous venons de trouver sont indépendentes de m ou n, comme au cas d'une variable.

6. Le cas ou $\lambda < 0$.

Faisant une fois de l'intégration au numéro 1., on peux réduire au cas où le paramètre λ^2 est positif, mais les solutions ainsi cherchées sont toutes banales.

7. La conclusion.

En effet, nous arrivons le théorème suivant.

Théorème. L'équation fonctionnelle (1) admet une solution non banale de polynôme degré p, q par rapport à x et y respectivement, avec un facteur constant et arbitraire, seulement aux cas où le paramètre λ est égal à $m^{p-1}n^{q-1}$ (p et q sont deux nombres naturels ou nuls.).

8. Exemples.

Finalement, nous montrons quelques solutions non identiquement nulles.

1° $m = n$ et $\lambda = \dfrac{1}{m}$.

Par l'équation : $m^{-1} = m^{p-1}n^{q-1}$

on a $$-1 = p + q - 2,$$

ou $$p + q = 1,$$

ensuite $$(p, q) = (1, 0),\ (0, 1)$$

Donc, la solution générale est

$$f(x, y) = c_1\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + c_2\left(y - \frac{c+d}{2}\right)$$

(c_1 et c_2 sont constantes arbitraires) où $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ peuvent être calculés comme au cas d'une variable.

2° $m=n$ et $\lambda=1$.

Par l'équation : $1=m^{p-1}n^{q-1}$

on a $$p+q=2,$$
ensuite
$$(p, q)=(2, 0),\ (1, 1),\ (0, 2).$$

Donc, on a

$$f(x, y)=c_1\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}x+\frac{a^2+4ab+b^2}{12}\right)$$
$$+c_2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(y-\frac{c+d}{2}\right)+c_3\left(\frac{y^2}{2}-\frac{c+d}{2}\cdot y+\frac{c_2+4cd+d_2}{12}\right)$$

(c_1 c_2 et c_3 sont constantes arbitraires.)

3° $m=n^2$ et $\lambda=\dfrac{1}{n}$.

D'aprés $$n^{-1}=n^{2p-2}n^{q-1}.$$
on a $$2p+q=2,$$
ensuite $$(p, q)=(1, 0),\ (0, 2).$$

Donc, on a

$$f(x, y)=c_1\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+c^2\left(\frac{y^2}{2}-\frac{c+d}{2}y+\frac{c^2+4cd+d^2}{12}\right)$$

(c_1 et c_2 sont constantes arbitraires.)

9. Remarque.

Employant les solutions caractéristiques à une variable $f_p(x)$ $(p=1, 2, \ldots\ldots)$ de laquelle le coefficient de x^p est $\dfrac{1}{p\,!}$, nous pouvons représenter les solutions caractéristiques $f_\alpha(x, y)$ pour (p_α, q_α) comme suivant :—

$$f_\alpha(x, y)\equiv f_{p_\alpha}(x)\cdot f_{q_\alpha}(y), \tag{7}$$

puisque le produit du côté droit est vraiment la solution pour (p_α, q_α), et que la solution de (1) pour (p_α, q_α) linéairement indépendante est unique.

En terminant ce mémoire, l'auteur veut exprimer ses remerciements sincères à M. le Professeur T. Matsumoto pour ses conseils précieux qu'il lui a donné continuellement pendent la recherche précédente et la présente.

Référence.

(1) A. Kuwagaki; Sur quelques équations fonctionnelles et leurs solutions caractérisques I. (Memoirs of the college of science, University of Kyoto, A, Vol. XXVI, No. 3, 1951.)