J. Math. Kyoto Univ.
10-2 (1970) 245-271

Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes. (III) Sur quelques propriétés topologiques des surfaces premières.

Par

Toshio NISHINO

(Reçu le 25 Décembre, 1969)

Introduction

On a traité, dans le mémoire précédent, les fonctions entières de deux variables complexes x et y telles que toute de leurs surfaces premières soit simplement connexe et du type parabolique. On a alors vu qu'une telle fonction entière se réduit toujours à celle d'une variable complexe par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace. Dans le mémoire actuel, on étudiera quelques propriétés topologiques des surfaces premières d'une fonction entière quelconque de deux variables complexes x et y, et on verra le fait que toute surfaces première de la fonction doit être simplement connexe et du type parabolique s'il y a suffisamment beaucoup de telles surfaces premières de la fonction; c'est-à-dire, si l'ensemble de toutes les valeurs que la fonction prend en telles surfaces premières est de capacité non nulle.

Comme on verra dans la suite, on montrera ce fait en y appliquant la même idée qui conduit au lemme fondamental dans le mémoire précédent. Dans le présent mémoire, on employera aussi sans répéter leurs définitions quelques notions et notations introduites dans les premier et deuxième mémoires[1)], que l'on appellera mémoire (I) et celui

1) T. Nishino, Nouvelles recherches sur les fonctions entières de plusieurs variables complexes (I), J. Math. Kyoto Univ. 8-1 (1968) 49-100. (II) Fonctions entières qui se réduisent à celle d'une variable, J. Math. Kyoto Univ. 9-2 (1969) 221-274.

(II) dans la suite.

1. Revêtement universel d'une surface entière.

Considérons, dans l'espace de deux variables complexes x et y, une surface entière S donnée par l'équation entière

$$f(x, y)=0.$$

On suppose que S est irréductible dans tout l'espace et qu'elle n'a aucun point singulier. Prenons, sur S, un point O, que l'on appellera origine de S, tel que l'on ait $\partial f(O)/\partial y \neq 0$ mais d'ailleurs quelconque. Nous le fixerons dans la suite. Dénotons Q^r une hypersphère donnée par l'inégalité de la forme

$$|x|^2+|y|^2<r^2,$$

où r est un nombre réel positif quelconque, et dénotons S^r une composante connexe de $S \cap Q^r$, si elle existe, qui contient l'origine O de S.

On aura d'abord le

Lemme 1. *Si une courbe fermée simple l décrite sur S^r n'est pas continûment contractile à un point sur S^r, elle ne l'est pas aussi sur $S^{r'}$ pour tout $r'>r$, donc sur toute surface entière S.*

En effet, si elle l'était, la partie de S entourée par la courbe l, étant bien déterminée, aurait au moins un point qui se trouve en dehors de Q^r. Alors, il y aurait une hypersphère $Q^{r'}$ avec $r'>r$ à laquelle touche du côté intérieur cette de S. Ceci est évidemment en contradiction avec le théorème de la continuité dû à *Hartogs*. Donc le lemme est certainement vrai.

Nous allons maintenant considérer le revêtement universel de S^r, que l'on désigne par $\tilde{S}^r$. Un point quelconque $\hat{p}$ de $\tilde{S}^r$ est représenté par une paire (p, l) d'un point p sur S^r et d'une courbe l joignant l'origine O de S au point p sur S^r. Deux points p_1 et p_2 de $\tilde{S}^r$ représentés par (p_1, l_1) et par (p_2, l_2) respectivement se coïncident si et seulement si p_1 coïncide avec p_2 et l_1 est homotope à l_2 sur S^r.

On désignera par $\tilde{O}$ le point de $\tilde{S}^r$ représenté par (O, l_0), où l_0 est une courbe dont les deux extrémités coïncident avec O tous deux et qui est contractile continûment à l'origine O sur S^r. $\tilde{O}$ sera appelé aussi origine de $\tilde{S}^r$.

On aura alors le

Théorème 1. *Pour toute paire des nombres réels positifs r et r' tels que l'on ait $r<r'$, on peut regarder $\tilde{S}^r$ comme partie de $\tilde{S}^{r'}$.*

En effet, à tout point $\tilde{p}$ représenté par (p, l) de $\tilde{S}^r$, correspond d'une façon unique un point de $\tilde{S}^{r'}$ représenté par la même paire (p, l). Car, le point p et la courbe l se trouvent aussi sur $S^{r'}$. De plus, si deux points $\tilde{p}_1$ et $\tilde{p}_2$ sur $\tilde{S}^r$, qui sont représentés par (p_1, l_1) et (p_2, l_2) respectivement, sont distincts l'un de l'autre, alors, de la définition, ou bien on a $p_1 \neq p_2$ ou bien l_1 n'est pas homotope à l_2 sur S^r. Cette deuxième condition est, d'après le lemme 1, conservée encore sur $\tilde{S}^{r'}$. Donc ils ne se coïncident pas comme points sur $\tilde{S}^{r'}$.

Nous allons ensuite considérer une surface de *Riemann* R au-dessus du plan de x donnée par la projection de S. Soit R^r la partie de R qui correspond exactement à S^r. On peut alors considérer un revêtement universel, que l'on désigne par $\tilde{R}^r$, de R^r. Ceci coïncide naturellement avec la projection de $\tilde{S}^r$ puisque S n'a aucun point singulier. Les points de R^r et de $\tilde{R}^r$ qui correspondent au O et au $\tilde{O}$ par la projection seront appelés aussi origine de R^r et celui de $\tilde{R}^r$ respectivement et ils seront désignés par les mêmes notations. D'après l'hypothèse, ils sont points ordinaires de R^r et de $\tilde{R}^r$.

Comme on sait bien, il y a au moins une fonction φ holomorphe et univalent sur toute $\tilde{R}^r$ qui fait correspondre $\tilde{R}^r$ au cercle sur le plan d'une variable complexe w donné par une inégalité de la forme

$$|w| < \eta_r,$$

puisque $\tilde{R}^r$ est simplement connexe. Cette fonction et ce rayon sont déterminés uniquement quand on y impose deux conditions

$$\varphi(O) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(O) = 1.$$

On appellera, dans ce mémoire, cette fonction φ fonction attachée à $\tilde{R}^r$ et ce rayon η_r rayon (R) de $\tilde{R}^r$.

Comme on sait bien, le théorème 1 conduit directement au

Corollaire. *La fonction η_r s'augmente monotonement avec r.*

On peut considérer naturellement le revêtement universel $\tilde{S}$ de toute S, celui $\tilde{R}$ de toute R, et le rayon (R) de $\tilde{R}$, que l'on désigne par η_∞. En ce moment, on a

$$\lim_{r\to\infty}\eta_r=\eta_\infty.$$

Donc, R est du type parabolique, si et seulement si on a

$$\lim_{r\to\infty}\eta_r=\infty.$$

2. Revêtement (U) d'une tube normal

Soit $f(x, y)$ une fonction entière dans l'espace de x et y. Considérons un tube normal Σ_Γ autour d'une surface première S_0 d'ordre un de f, sous les mêmes significations des notations que celles dans le mémoire (I)[2]; c'est-à-dire Γ est la partie d'une droite analytique L, qui passe transversalement par un point régulier p_0 de S_0, donnée par l'inégalité $|f-a_0|<\rho$, où a_0 est la valeur de f en S_0 et ρ est un nombre réel positif assez petit. On supposera, pour simplifier l'écriture, que $a_0=0$ et L est donnée par $x=0$. Ceci est toujours possible sans restreindre la généralité. Alors, pour chaque surface première S dans Σ_Γ, on peut choisir le point commun, que l'on désigne par Γ_s, de S et de Γ pour l'origine de S, puisque l'on a, d'après l'hypothèse, $\partial f(\Gamma_s)/\partial y \neq 0$. Désignons par Σ_Γ^r une composante connexe de $\Sigma_\Gamma \cap Q^r$, si elle existe, qui contient Γ. Il n'y a qu'un nombre fini au plus de points dans Σ_Γ^r en lesquels deux fonctions

$$\partial f/\partial x \qquad \text{et} \qquad \partial f/\partial y$$

s'annulent à la fois. Désignons tous ces points par $A_i(i=1, \cdots, n)$. On

2) loc. cit., p. 71.

suppose qu'il n'y a aucun tel point sur la frontière de Σ_{Γ}^{r}, en changeant si nécessaire ρ et r un peu. Soient S_i les surfaces premières passant par les points A_i $(i=1, \cdots, n)$ respectivement. Dénotons Δ^r le domaine obtenu de Σ_{Γ}^{r} par l'exception de tous les points de S_i $(i=1, \cdots, n)$ dans Σ_{Γ}^{r}.

Nous allons, d'abord, préparer le

Lemme 2. *Pour toute surface première S passant par Δ^r et pour tout nombre réel positif r' plus petit que r à un nombre fini de r' près, on peut trouver un tube normal $\Sigma_{\Gamma'}$ autour de S, ne contenant aucune S_i $(i=1, \cdots, n)$, tel qu'il y ait une application continue ζ de $\Sigma_{\Gamma'}^{r'}$ à $S^{r'}$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1. *La restriction de ζ à $S^{r'}$ est l'application identique.*
2. *Pour toute surface première S' dans $\Sigma_{\Gamma'}$, la restriction de ζ à $S'^{r'}$ est un homéomorphisme de $S'^{r'}$ sur $S^{r'}$.*
3. *Pour toute surface première S' dans $\Sigma_{\Gamma'}$, l'image par ζ de l'origine $\Gamma_{s'}$ de S' est Γ_s.*

Pour voir ce lemme, il suffira de tenir compte de ce que S^r n'a aucun point singulier et que, pour tout nombre r' $(0<r'<r)$ à un nombre fini de r' près, la frontière de S' consiste en un nombre fini de courbes simples fermées disjointes les unes des autres et, de plus, chacune analytique par rapport à un paramètre réel convenable. On appellera l'application ζ *rétraction autour de $S^{r'}$*.

Maintenant, pour chaque surface première S passant par Δ^r, considérons le revêtement universel $\tilde{S}^r$ de S^r. Nous allons construire une sorte de revêtement de Δ^r comme ce qui suit. Soit V un ensemble de tous les points $\tilde{p}_s$ qui se trouvent sur quelqu'une des $\tilde{S}^r$, pour S passant par Δ^r. Tout point $\tilde{p}_s$ est représenté par une paire (p_s, l_s) d'un point p_s sur S^r et d'une courbe l_s joignant Γ_s à p_s sur S^r. En ce moment, prenons un voisinage v de p_s sur S^r de façon qu'il soit simplement connexe et se trouve dans l'intérieur complet de S^r. Alors, il y a un voisinage $\tilde{v}$ de $\tilde{p}_s$ sur $\tilde{S}^r$ comme ce qui suit. Nous prenons un point quelconque p_s' dans v et traçons une courbe quelconque joignant p_s à p'_s dans v. Dénotons l'_s la somme de la courbe l_s et de la courbe ainsi tracée. Alors, l'ensemble $\tilde{v}$ de tous les points représentés par telles paires (p'_s, l'_s) est un voisinage demandé de $\tilde{p}_s$ sur $\tilde{S}^r$. Prenons, ensuite, un nombre réel positif r' $(0<r'<r)$ tel que l'on ait $v \subset S^{r'}$ et que l'on puisse trouver $\Sigma_{r'}^{r'}$ dans lequel il y a une rétraction ζ autour de $S^{r'}$. Dénotons $\mathfrak{V}$ un domaine dans $\Sigma_{r'}^{r'}$ donné par l'image inverse de v par la rétraction ζ. Alors, pour tout point $q_{s'}$ de $\mathfrak{V}$, il y a un seul point $\tilde{q}_{s'}$ de $\tilde{S}'^r$ représenté par une paire $(q_{s'}, m_{s'})$ telle qu'étant q_s et m_s les images de $q_{s'}$ et de $m_{s'}$ par ζ respectivement, le point représenté par (q_s, m_s) se trouve dans v. On regadera, par définition, l'ensemble $\tilde{\mathfrak{V}}$ de tous les tels points comme voisinage de $\tilde{p}_s$. Ceci est un domaine univalent étalé au-dessus de $\mathfrak{V}$. Désignons par la même notation V l'ensemble V muni de la topologie ainsi définie. On aura ici l'énoncé que

La topologie de V satisfait aux conditions de Hausdorff.

En effet, pour tout point $\tilde{p}$ de V, un voisinage quelconque $\tilde{\mathfrak{V}}$ de $\tilde{p}$ contient toujours le point $\tilde{p}$ lui-même, et pour tout point $\tilde{p}'$ de $\tilde{\mathfrak{V}}$, il y a un voisinage $\tilde{\mathfrak{V}}'$ de $\tilde{p}'$ qui se trouve dans l'intérieur de $\tilde{\mathfrak{V}}$. Ceci sera facilememt vu de la définition. Prenons, ensuite, deux points distincts $\tilde{p}$ et $\tilde{p}'$ de V représentés par (p_s, l_s) et par $(p_{s'}, l_{s'})$ respectivement. Supposons, pour le réduire à l'absurde, que toute paire de voisinages $\tilde{\mathfrak{V}}$ et $\tilde{\mathfrak{V}}'$ de $\tilde{p}$ et de $\tilde{p}'$ ont au moins un point commun. D'où, on a, d'abord, $p_s = p_{s'}$, par suite $S = S'$. Soit v un voisinages simplement connexe de p_s dans l'intérieur de S^r et soit ζ une rétraction autour de $S^{r'}$ qui donne deux voisinages $\tilde{\mathfrak{V}}$ et $\tilde{\mathfrak{V}}'$ de $\tilde{p}$ et de $\tilde{p}'$ à la fois comme ci-dessus. D'après l'hypothèse, il y a au moins un point $\tilde{q}$ représenté par (q_s, m_s) dans $\tilde{\mathfrak{V}} \frown \tilde{\mathfrak{V}}'$. Il suit de là qu'on peut déterminer un point de $\tilde{\mathfrak{V}}$ qui est représenté par (q_s, m_s), où q_s et m_s sont les images de $q_{s'}$ et de $m_{s'}$ par la rétraction ζ. En ce moment, m_s est homotope à la somme d'une courbe l''_s joignat l'_s à p_s sur $S^{r'}$ et celle joignant p_s à q_s dans v. De plus, d'après l'hypothèse, l''_s est homotope à l_s et à l'_s à la fois. C'est en contradiction avec l'hypothèse que $\tilde{p} \neq \tilde{p}'$.

L'énoncé est donc démontré.

D'où, on peut regarder V^r comme domaine multivalent sans point critique intérieur étalé au-dessus de Δ^r. Nous l'appellerons, dans la suite, revêtement (U) de Δ^r et le désignerons par $\tilde{\Delta}^r$.

Je dit ici que

Théorème 2. *$\tilde{\Delta}^r$ est une variété de Stein.*

En effet, grâce à *Oka*[3], il suffit, pour le voir, d'indiquer que $\tilde{\Delta}^r$ est un domaine pseudoconvexe. Soit P un point frontière de $\tilde{\Delta}^r$ situé au-dessus d'un point p dans l'espace de x et y. En prenant un autre point p_0 dans l'espace, traçons l'hypersphère $\mathfrak{S}$ de centre p_0, dont la frontière passe par p, et une autre hypersphère σ de centre p. Dénotons $\mathfrak{V}$ la partie de σ extérieure à $\mathfrak{S}$. Supposont, maintenant, qu'il y a une aire $\tilde{\mathfrak{V}}$ sur $\tilde{\Delta}^r$ ayant P comme sa point frontière et situé justement au-dessus de $\mathfrak{V}$. Alors, $\mathfrak{V}$ se trouve évidemment dans Δ^r; par suite, p ne peut être situé sur la frontière de Q^r. D'autre part, d'après le théorème de la continuité, la surface première S de f passant par p a au moins un point q dans $\mathfrak{V}$. On peut donc supposer que $S\cap\sigma$ est simplement connexe, en diminuant, si nécessaire, σ suffisamment. Soit $\tilde{q}$ le point de $\tilde{\mathfrak{V}}$ situé au-dessus de q. C'est représenté par (q, m), où m est une courbe joignant Γ_s à q sur S^r. Traçons une courbe qui joigne q à p sur $S^r\cap\sigma$ et désignons par l la somme de m et de cette courbe-ci. Alors, le point $\tilde{p}$ représenté par (p, l) se trouve certainement dans $\tilde{\Delta}^r$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse, puisque le point $\tilde{p}$ est point frontière de $\tilde{\mathfrak{V}}$ qui se trouve au-dessus de p. Cette propriété admet toute transformation analytique et biunivoque d'un voisinage de p. Donc, par définition, $\tilde{\Delta}^r$ est certainement pseudoconvexe. Par suite, il est une variété de Stein.

On peut considérer, bien entendu, le revêtement (U) de tout tube normal Σ_r s'il n'y a dans Σ_r aucun point en lequel deux fonctions

---

3) K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, Iwanami Shoten, Japan 1961. p. 222.

$\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ s'annulent à la fois. On le désignera alors par $\tilde{\Sigma}_\Gamma$.

3. Projection de $\tilde{\Delta}^r$

En concervant les notations précédentes, considérons l'équation de trois variables complexes x, y et z de la forme

$$z-f(x,\ y)=0$$

et sa solution par rapport à y. Soit R^* le domaine d'holomorphie de la fonction au-dessus de l'espace de z et x. Alors, il y a la correspondance naturelle, analytique et biunivoque, dite projection dans la suite, entre tout l'espace de x et y et le domaine R^*. Soit R la partie de R^* qui correspond à Σ_Γ. Ceci s'étale au-dessus du dicylindre (Γ^*, C), où Γ^*: $|z|<\rho$, C: $|x|<\infty$. Soit $R_{z'}$ $(z'\in\Gamma^*)$ une sous-variété de R qui correspond à la surfaces première de f avec la valeur z', passant par Σ_Γ. Elle se trouve au-dessus de la droite analytique $z=z'$. Soit O l'image de Γ et soit O_z celle de Γ_s, où z est la valeur de f en S. Elles se trouvent au-dessus de la droite analytique $x=0$. En ce moment, d'après l'hypothèse, il y a un voisinage univalent de O sur R.

Considérons ensuite la partie de R qui correspond à Δ^r. Ceci s'étale au-dessus du domaine cylindrique (Γ^0, C), où Γ^0 est domaine obtenu de Γ^* par l'exception de l'ensemble fini des valeurs z_i de f en S_i $(i=1, \cdots, n)$. Désignons cette partie par R^r et par R_z^r $(z\in\Gamma^0)$ la partie de R_z contenue dans R^r. Alors, on peut considérer, au moyen de la même projection, un revêtement $\tilde{R}^r$ de R^r et celui $\tilde{R}_z^r$ de R_z^r comme les images de $\tilde{\Delta}^r$ et de $\tilde{S}_z^r$ respectivement. Les image de $\tilde{\Gamma}$ et de $\tilde{\Gamma}_s$ seront désignées par $\tilde{O}$ et par $\tilde{O}_z$ respectivement.

Considérons maintenant, pour chaque z dans Γ^0, la fonction attachée $\varphi_z(p)$ à $\tilde{R}_z^r$ et la fonction $\Phi_r(p)$ sur $\tilde{R}^r$ définie par l'égalité

$$\Phi_r(p)=\varphi_z(p),$$

pour $z\in\Gamma^0$ et pour $p\in\tilde{R}_z^r$. Dénotons $\eta_r(z)$ le rayon (R) de $\tilde{R}_z^r$. Les fonctions $\Phi_r(p)$ et $\eta_r(z)$ ne sont pas nécessairement continues. Pour cette raison, nous ferons les considérations suivantes.

Comme le revêtement $\tilde{R}^r$ est aussi une variété de Stein, il y a une fonction plurisousharmonique $\xi(p)$ sur $\tilde{R}^r$ telle que, pour un nombre réel quelconque α, la partie E^α de $\tilde{R}^r$ donnée par $\xi(p)<\alpha$ se trouve dans l'intérieur complet de $\tilde{R}^r$. D'ailleurs, on peut supposer, comme on sait bien, que $\xi(p)$ est analytique par rapport aux parties réelles et imaginaires des coordonnées locales de $\tilde{R}^r$. Grâce à *Oka*[4], on peut dire que toute fonction $g(p)$ holomorphe dans E^α se développe en série de fonctions holomorphes dans $\tilde{R}^r$ qui converge uniformément dans l'intérieur complet de E^α. Il s'en suit que $\tilde{R}^r_z \cap E^\alpha$, où $z \in \Gamma^0$, est toujours simplement connexe.

Traçons ensuite un domaine quelconque δ dans l'intérieur complet de Γ^0 et prenons un nombre réel α suffisamment grand tel que E^α contienne O_z pour tout z de δ. Dénotons D^α la composante connexe de E^α située au-dessus du domaine cylindrique (δ, C), qui contient tous les O_z $(z \in \delta)$, et dénotons D^α_z $(z \in \delta)$ une sous-variété de D^α donnée par $D^\alpha \cap \tilde{R}^r_z$.

Dans cette configuration, on considérera encore la fonction $\varphi^\alpha_z(p)$ attachée à D^α_z $(z \in \delta)$, la fonction $\Phi^\alpha_r(p)$ sur $\tilde{D}^\alpha$ définie par l'égalité

$$\Phi^\alpha_r(p) = \varphi^\alpha_z(p)$$

pour $z \in \delta$ et pour $p \in D^\alpha_z$ et le rayon (R) de D^α_z $(z \in \delta)$ que l'on désigne par $\eta^\alpha_z(z)$.

On aura alors le

Lemme 3. *Les fonctions $\Phi^\alpha_r(p)$ et $\eta^\alpha_r(z)$ sont continues dans D^α et dans δ respectivement.*

En effet, soit a un point quelconque de δ et soit $\Psi(p)$ une fonction holomorphe sur $\tilde{R}^r$ telle que l'on ait $\Psi(p) = \varphi_a(p)$ sur $\tilde{R}^r_a$. Elle existe certainement puisque $\tilde{R}^r$ est une variété de Stein et que $\tilde{R}^r_a$ n'a aucun point singulier comme une sous-variété de $\tilde{R}^r$. Alors, d'après le même raisonnement qu'on a fait dans la section 2 du mémoire (II)[5], il y a

4) loc. cit., p. 209.
5) loc. cit., p. 225.

un voisinage U de $\tilde{R}_a^r$ dans $\tilde{R}^r$ tel que l'on puisse regarder

$$z \qquad \text{et} \qquad v=\Psi(p)$$

comme un système de coordonnées locales dans U. D'où, lorsqu'on prend un point z tout près de a, D_z^α se trouve entièrement dans U. Dénotons d_z la projection de D_z^α sur le plan de v. C'est un domaine limité par une courbe analytique et, lorsque z tend vers a, d_z tend aussi vers d_a. Regardons $\varphi_z^\alpha(p)$ comme fonction holomorphe de v dans d_z. Elle fait correspondre d_z au cercle $|w|<\eta_r^\alpha(z)$ dans le plan d'une nouvelle variable complexe w. De plus, on a facilement

$$\lim_{z\to a}\frac{d\varphi_z^\alpha(0)}{dv}=1.$$

Donc, d'après l'un des théorèmes de la représentation conforme, on a

$$\lim_{z\to a}\eta_r^\alpha(z)=\eta_r^\alpha(a),$$

et $\varphi_z^\alpha(v)$ tend uniformément vers $\varphi_a^\alpha(v)$ dans l'intérieur complet de d_a quand z tend vers a. Ceci signifie que $\Phi_r^\alpha(p)$ est continue en tout point de D. Le lemme est donc vrai puisque l'on a pris le point a arbitrairement dans δ.

Soit E un ensemble compact quelconque sur R. Alors, on peut tracer le domaine D de manière que $E\subset D^\alpha$. Donc il y a une suite dénombrable de tels domaines D^{α_i} $(i=1, 2, \cdots)$ qui satisfont aux conditions

$$D^{\alpha_i}\subset D^{\alpha_{i+1}} \qquad \text{et} \qquad \cup D^{\alpha_i}=\tilde{R}^r.$$

D'autre part, pour tout z dans δ, $\eta_r^\alpha(z)$ s'augmente monotonement avec α et tend vers $\eta_r(z)$ quand α s'augmente indéfiniment. Par suite, la fonction $\eta_r(z)$ est la limite d'une suite croissante de fonctions continues. Donc elle est demicontinue inférieurement.

4. Lemme fondamental

Soit donnée, de nouveau, une fonction entière $f(x, y)$ dans l'espace de x et y. Considérons un tube normal Σ_Γ sous les mêmes hypothèses qu'on a posées dans la section 2. Pour chaque point z du cercle Γ^*, dénotons S_z la surface première de f avec la valeur z, située dans Σ_Γ. Supposons ici qu'il y a un ensemble e de points dans Γ^* tel que sa capacité logarithmique soit non nulle et que, pour tout z de e, la surface première S_z dans Σ_Γ n'ait aucun point singulier et soit simplement connexe et du type parabolique. Le but de la section actuelle est de voir le fait que, dans cette configulation, toute surface première S_z dans Σ_Γ est analytiquement homéomorphe ou bien à tout le plan $|w|<\infty$ ou bien au plan pointillé à l'origine $0<|w|<\infty$, pourvu que S n'ait aucun point singulier. Nous supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a un point c dans Γ^* tel qu'il n'en soit pas ainsi pour S_c, malgré qu'elle n'ait aucun point singulier. Désignons par η_0 le rayon (R) de S_c. Comme on sait bien, on a $\eta_0<\infty$.

Considérons, d'abord, la projection R de Σ_Γ au-dessus du dicylindre (Γ^*, C). D'après l'hypothèse, il y a un voisinage univalent de O dans R étalé justement au-dessus du dicylindre $(\Gamma^*, \mathfrak{C})$, où $\mathfrak{C}$ est un cercle sur le plan de x, ayant son centre à l'origine. Soit $4\varkappa$ le rayon du cercle.

Soient α, r et M trois nombres réels positifs quelconques. En conservant les significations des notations précédentes, considérons le domaine $\tilde{R}^r$ étalé au-dessus de (Γ^*, C), celui D^α étalé au-dessus de (Γ^0, C) et la fonction $\eta_r^\alpha(z)$ dans un domaine δ dans Γ^0. Soit $e^M_{\alpha\delta r}$ l'ensemble dans δ, donné par $\eta_r^\alpha(z)>M$. En ce moment, si $\alpha<\beta$, on a $e^M_{\alpha\delta r}\subset e^M_{\beta\delta r}$. Donc, lorsque α s'augmente indéfiniment et δ tend vers Γ^0, on a un ensemble ouvert e^M_r dans Γ^*, comme limite de $e^M_{\alpha\delta r}$. Ensuite, si $r<s$, on a $e^M_r\subset e^M_s$, exception faite d'un ensemble fini de points qui sont les valeurs prises par f sur les surfaces premières ayant au moins un point singulier dans Σ^s_Γ. Donc, lorsque r s'augmente indéfiniment, on a un ensemble e^M dans Γ^* comme limite de e^M_r. Cet ensemble e^M est obtenu d'un ensemble ouvert par l'exception d'un ensemble dénombrable de points; donc il est mesurable (B). De plus, il contient toujours e, puisque, pour tout z de e, on a

$$\lim_{r\to\infty} \eta_r(z)=\infty.$$

Enfin, si $M<N$, on a $e^M \supset e^N$. Donc, lorsque M s'augmente indéfiniment, on a l'ensemble limite de la suite décroissante de e^M. Evidemment cela coïncide avec e, donc e est aussi mesurable (B). Par suite, on peut extraire des ensembles ouverts $e^M_{\alpha\delta r}$ une suite dénombrable d'ensembles, que l'on désigne, à nouveau, par e_j $(j=1, 2, \cdots)$, de manière que l'on ait

$$\lim_{j\to\infty} \text{cap } e_j = \text{cap } e.$$

En ce moment, M_j qui donne e_j s'augmente indéfiniment.

Considérons, pour chaque j $(j=1, 2, \cdots)$, la fonction $h_j(z)$ superharmonique dans Γ^* et harmonique dans $\Gamma^*-\bar{e}_j$, où $\bar{e}_j$ signifie la fermeture de e_j dans Γ^*, telle que $0<h_j(z)\leqq 1$ dans Γ^*, que $h_j(z)=1$ sur e_j et que, lorsque z tend vers un point frontière quelconque de Γ^*, $h_j(z)$ tende toujours vers nulle. Alors, comme on sait bien, il y a un nombre réel positif h_0 tel que l'on ait

$$h_j(c)>h_0,$$

dès que j surpasse un nombre entier suffisamment grand, puisque la capacité de e est non nulle.

Posons

$$\log M^0 = 2\frac{\log \eta_0 - \log x}{h_0} + \log x \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = h_0/4$$

et dénotons $h(z)$ quelqu'une des $h_j(z)$ telle que l'on ait l'inégalité cidessus et que, désignant par α, δ, r et M les suffixes initiaux de e_j, on ait $M>4M^0$. Considérons ici pour ce r le domaine $\tilde{R}^r$ sous les mêmes significations des notations. Ensuite, faisons correspondre conformément Γ^0 au cercle unité $\mathfrak{C}$ du plan d'une autre variable complexe t par une fonction holomorphe

$$z=\lambda(t)$$

de manière que $c=\lambda(0)$. Posons

$$k(t)=h(\lambda(t)).$$

C'est une fonction superharmonique dans $\mathfrak{C}$ et harmonique dans $\mathfrak{C}-e^0$, où e^0 est l'image de e_i par $\lambda(t)$. De plus, d'après le théorème de *Riesz* et celui de *Fatou*, on peut dire que, pour toute valeur θ, $0\leqq\theta<2\pi$, en dehors d'un ensemble de mesure nulle, $\lambda(re^{i\theta})$ tend vers un point sur la circonférence de Γ^* lorsqu'on varie r de 0 à 1. Donc, il y a un nombre positif ρ^0 plus petit que l'unité tel que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\rho_0 e^{i\theta})\, d\theta<\varepsilon.$$

Désignons par $\mathfrak{C}^0$ le cercle $|t|<\rho_0$ et posons

$$k^0(t)=k(t)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2-\rho^2}{\rho_0^2+\rho^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta')}k(\rho_0 e^{i\theta})\, d\theta,$$

où $t=\rho e^{i\theta'}$. C'est une fonction superharmonique dans $\mathfrak{C}^0$ et harmonique dans $\mathfrak{C}^0-\mathfrak{C}^0\frown e^0$, telle que l'on ait $0<k^0(t)<1$, $k^0(0)>3h_0/4$ et, en outre, que, lorsque t tend vers un point frontière quelconque de $\mathfrak{C}^0$, $k^0(t)$ tende toujours vers nulle.

Formons, maintenant, un domaine multiforme étalé au-dessus de $(\mathfrak{C}^0, C)$, que l'on désigne par $\tilde{\mathfrak{P}}$, comme l'image inverse de $\tilde{R}^r$ par $\lambda(t)$. Ceci est aussi une variété de *Stein.* Dénotons E la partie de l'image inverse de $\tilde{D}^\alpha$ par $\lambda(t)$, située au-dessus du dicylindre $(\mathfrak{C}^0, C)$. Elle se trouve dans l'intérieur complet de $\tilde{\mathfrak{P}}$.

En appliquant ici le raisonnement que l'on a fait dans les sections 4 et 5 du mémoire (II)[6], on aura sans difficulté les énoncés suivantes. 1). On peut faire correspondre $\tilde{\mathfrak{P}}$ holomorphiquement et biunivoquement à un domaine $\tilde{\mathfrak{P}}'$, n'ayant aucun point critique intérieur étalé au-dessus du dicylindre $(\mathfrak{C}^0, C')$, où C' signifie le plan d'une nouvelle variable complexe x' au moyen d'une fonction holomorphe sur $\tilde{\mathfrak{P}}'$

$$x'=g(p)$$

6) loc. cit., p. 231-248.

telle que, désignant par $\tilde{O}^0$ l'image inverse de $\tilde{O}$ par $\lambda(t)$, on ait

$$g(\tilde{O}^0)=0 \qquad \text{et} \qquad \partial g(\tilde{O}^0)/\partial x=1.$$

On désigne par E^0 l'image de E par cette transformation-ci.

2). Il y a un domaine algébrique $\tilde{\mathfrak{V}}''$ étalé au-dessus du même dicylindre $(\mathfrak{C}^0, C')$ qui contient un ensemble de points équivalent à E^0.

3). Lorsqu'on fait correspondre conformément le domaine obtenu de $\mathfrak{C}^0$ par l'exception d'un nombre fini de points, différentes de l'origine et déterminés par E, au cercle unité $\mathfrak{D}$ sur le plan d'une variable complexe τ par une fonction holomorphe

$$t=\mu(\tau),$$

de manière que l'on ait $\mu(0)=0$ et que, pour tout nombre réel positif ρ^* plus petit que l'unité mais d'ailleurs quelconque, on puisse former un domaine multiforme $\tilde{\mathfrak{W}}$ de type (T) et algébrique, étalé au-dessus de $(\mathfrak{D}^*, C')$, où $\mathfrak{D}^*$: $|\tau|<\rho^*$, et contenant la partie E^{**} de E^* située au-dessus de $(\mathfrak{D}^*, C')$, où E^* est l'image inverse de E^0 par $\mu(\tau)$.

4). Il existe la fonction holomorphe $g^*(p)$, attachée à $\tilde{\mathfrak{W}}$. Alors, désignant par O^* l'image de O^0 par $g(p)$, on a

$$g^*(O^*)=0 \qquad \text{et} \qquad \partial g^*(O^*)/\partial x'=1$$

et on peut faire correspondre le domaine $\tilde{\mathfrak{W}}$ au dicylindre $(\mathfrak{D}^*, C'')$, où C'' signifie le plan d'une variable complexe w, holomorphiquement et biunivoquement par $g^*(p)$. En ce moment, l'image de E^{**} par $g^*(p)$ est évidemment un domaine d'holomorphie dans l'espace de τ et w. Désignons-le par W et par $K(\tau)$ le rayon de *Hartogs*[7] du domaine W, relatif à l'origine comme centre.

Maintenant nous allons voir, d'après le théorème de *Koebe*, qu'on a identiquement

$$K(\tau)>\chi$$

7) Voir, par exemple, K. Oka, loc. cit., p. 184.

dans $\mathfrak{D}$ et, de plus, pour tout point τ de l'image inverse e^* de e^0 par $\mu(\tau)$, on a

$$K(\tau) > M^0.$$

En effet, posont $z' = \lambda(\mu(\tau'))$. La section $E^*_{\tau'}$ de E^* par la droite analytique $\tau = \tau'$ dans l'espace de τ et x' est contenue dans la section $\tilde{R}_{z'}$ de $\tilde{R}$ par la droite analytique $z = z'$ dans l'espace de z et x. D'après l'hypothèse, toute $\tilde{R}_{z'}$ $(z' \in I'^0)$ contient le cercle, situé au-dessus de $|x| < 4\chi$ et contenant $\tilde{O}_{z'}$. De plus, si $\tau' \in e^*$, le rayon (R) de $\tilde{R}_{z'}$ est plus grand que $4M^0$. D'où et du théorème de *Koebe*, on obtient les inégalités.

Posons encore

$$l(\tau) = k^0(\mu(\tau)).$$

C'est aussi une fonction superharmonique dans $\mathfrak{D}$ et harmonique dans $\mathfrak{D} - e^*$. De plus, d'après le même raisonnement comme ci-dessus, il y a un nombre réel positif ρ^* plus petit que l'unité tel que l'on ait

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l(\rho^* e^{i\theta})\, d\theta < \varepsilon.$$

Désignons par $\mathfrak{D}^*$ le cercle $|\tau| < \rho^*$ et posons

$$l^*(\tau) = l(\tau) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho^{*2} - \rho^2}{\rho^{*2} + \rho^2 - \rho^*\rho\cos(\theta - \theta')}\, l(\rho^* e^{i\theta})\, d\theta,$$

où $\tau = \rho e^{i\theta'}$. C'est aussi une fonction superharmonique dans $\mathfrak{D}^*$ et harmonique dans $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}^* \frown e^*$, telle que l'on ait $0 < l^*(\tau) < 1$, $l^*(0) > h_0/2$ et que, lorsque τ tend vers un point frontière quelconque de $\mathfrak{D}^*$, $l^*(\tau)$ tende vers nulle.

Or, on aura l'inégarité

$$\log K(\tau) - \log \chi > (\log M^0 - \log x)\cdot l^*(\tau)$$

puisque le membre droite de l'inégalité est, d'après le théorème de *Hartogs*, superharmonique dans $\mathfrak{D}^*$ et que l'inégalité est valable pour tout point frontière de $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}^* \frown e^*$. Par suite, on a

$$\log K(0) - \log \varkappa > 2 \frac{\log \eta_0 - \log \varkappa}{h_0} \frac{h_0}{2}$$

donc

$$K(0) > \eta_0.$$

D'autre part, comme η_0 est le rayon (R) de $\tilde{R}_{z'}$, $K(0)$ doit être plus petit que η_0. C'est une contradiction.

D'après ce que nous avons vu jusqu'ici, on a le

Lemme fondamental. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière de x et y, et Σ_Γ un tube normal autour d'une surface première de f d'ordre un. Supposons que l'ensemble de toutes les valeurs z, telles que la surface première de f avec la valeur z dans Σ_Γ soit simplement connexe et du type parabolique, est de capacité non nulle sur le plan de z. Alors, toute surface première de f dans Σ_Γ est analytiquement homéomorphe ou bien à tout le plan d'une variable complexe ou bien au plan pointillé à l'origine, pourvu qu'elle n'ait aucun point singulier.*

5. Point singulier et topologie d'une surface première

Soit S une surface entière dans l'espace de deux variables complexes x et y. On suppose que S est irréductible dans tout l'espace. Considérons dans l'espace un nombre fini de hypersphères γ_i $(i=1, \cdots, l)$ données par les inégalités

$$|x-a_i|^2 + |y-b_i|^2 < r_i^2,$$

où (a_i, b_i) $(i=1, \cdots, l)$ sont des points dans l'espace et r_i $(i=1, \cdots, l)$ sont des nombres réels positifs, de manière qu'elles soient séparées deux à deux par un hyperplanoïde[8] ne passant par aucun point de $\cup \gamma_i$, mais passant par au moins un point de S.

On aura alors le

8) C'est un hyperplan de 3 dimensions réels.

Lemme 4. *Lorsqu'on trace une courbe simple fermée $\mathfrak{C}_i$ sur chaque partie $S \cap \gamma_i$ $(i=1, \cdots, l)$, on ne peut avoir jamais une partie de S, connexe et compacte, qui est limitée seulement par quelqu'unes de ces courbes $\mathfrak{C}_i$ et qui possède au moins un point en dehors de toutes les hypersphères γ_i.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a une partie de S connexe et compacte, qui est limitée par certaines des courbes $\mathfrak{C}_i$ et qui a au moins un point en dehors de toutes les hypersphères γ_i. Désignons-la par S_0. Alors, d'après le lemme 1, il y a au moins deux courbes qui prendent part à la frontière de S_0. Désignons-les par $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$. Soit H un hyperplanoïde qui sépare γ_1 et γ_2 et qui ne passe par aucun point de $\cup \gamma_i$. Alors, on a évidemment $H \cap S_0 \neq 0$. D'autre part, comme on sait bien, H consiste en une famille de plans analytiques L_t ayant un paramètre réel et continue t, où $-\infty < t < \infty$. Si t tend vers $-\infty$ ou ∞, alors L_t tend vers l'infini. Donc, d'après l'hypothèse, on peut déterminer le plus petit nombre t pour lequel on a $L_t \cap S \neq 0$. En ce moment, aucun point de $L_t \cap S$ ne se trouve sur la frontière de L_t ni sur celle de S. Ceci est en contradiction avec le théorème de la continuité dû à *Hartogs*[9]. Donc le lemme a été certainement démontré.

Revenons encore au tube normal Σ_r pour une fonction entière $f(x, y)$ dans l'espace de x et y. Comme on sait bien, il peut exister dans Σ_r une infinité dénombrable au plus de surfaces premières de f, qui ont au moins un point singulier. D'autre part, pour chaque surface première S de f, on considère le groupe fondamental g_s de S. En ce moment, il y a quelque relation intime entre la topologie et les points singuliers d'une surface première.

Supposons maintenant que l'on peut prendre une borne supérieure M du nombre des générateurs de g_s, S parcourant l'ensemble de toutes les surfaces premières de f dans Σ_r n'ayant aucun point singulier. Alors, on aura le

9) Ceci est facilement démontré au moyen du théorème de *Hurwitz*.

Théorème 3. *L'ensemble e de tous les points p de Γ, tels que la surface première de f passant par p ait au moins un point singulier, n'est dense dans aucune aire sur Γ.*

En effet, supposons, pour le réduire à l'absurde, qu'il y a une aire δ sur Γ dans laquelle l'ensemble considéré e est dense. Alors, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que l'ensemble des premières coordonnées x de tous tels points singuliers n'est pas borné en module, en effectuant, si nécessaire, une transformation linéaire de coordonnées convenable, puisque l'ensemble de tous tels points singuliers dans Σ_Γ n'a aucun point d'accumulation à distance finie. Prenons, d'abord, un point p_0 de $e \cap \delta$ et soit (x_0, y_0) un point singulier de la surface première S_0 de f qui passe par p_0. Décrivons une hypersphère γ_0 de centre (x_0, y_0) et de rayon quelconque r_0

$$|x-x_0|^2+|y-y_0|^2<r_0^2.$$

Alors, on peut trouver, d'après le théorème 2 du mémoire (II)[9], un tube normal Σ_{Γ_1} autour de S_0, où $\Gamma_1 \subset \delta$, tel que, pour toute surface première S de f dans Σ_{Γ_1} n'ayant aucun point singulier, on puisse décrire une courbe simple fermée sur $S \cap \gamma_0$, qui n'est pas continûment contractile à un point sur $S \cap \gamma_0$. Prenons, ensuite, un point p_1 de $e \cap \Gamma_1$ et un point singulier (x_1, y_1) de la surface première S_1 de f passant par p_1, tel que l'on ait

$$|x_1-x_0|>r_0,$$

en tenant compte de la remarque faite plus haut. Traçons une autre hypershère γ_1 de centre (x_1, y_1) de rayon r_1

$$|x-x_1|^2+|y-y_1|^2<r_1^2$$

de manière que l'on ait

$$|x_0-x_1|>r_1+r_2.$$

9) loc. cit., p. 269.

Alors, on peut aussi trouver un tube normal Σ_{Γ_2} autour de S_1, avec $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$, tel que, pour toute surface première S de f n'ayant aucun point singulier dans Σ_{Γ_1}, on puisse décrire une courbe simple fermée sur $S \cap \gamma_1$ qui n'est pas continûment contractile à un point sur $S \cap \gamma_1$; et ainsi de suite. Alors, on obtient $M+1$ hypersphères γ_i $(i=0, 1, \cdots, M)$ de la forme

$$|x-x_i|^2+|y-y_i|^2<r_i^2$$

qui sont séparées deux à deux par un hyerplanoïde ne passant par aucun point de $\cup \gamma_i$. On a aussi un tube normal Σ_{Γ_M}, où $\Gamma_M \subset \delta$, tel que, pour toute surface première S de f n'ayant aucun point singulier dans Σ_{Γ_M}, on puisse décrire sur chaque $S \cap \gamma_i$ $(i=0, 1, \cdots, M)$ une courbe simple fermée $\mathfrak{C}_i$ qui n'est pas continûment contractile à un point sur $S \cap \gamma_i$. C'est en contradiction avec l'hypothèse puisque, d'après le lemme 4, toutes les courbes $\mathfrak{C}_i$ $(i=0, 1, \cdots, M)$ sur S sont des générateurs du groupe fondamental g_s de S. Le théorème a été donc démontré.

6. Période d'une fonction entière ayant un paramètre analytique

Considérons, dans l'espace de deux variables complexes z et w, un domaine cylindrique (D, C), où D est un domaine quelconque sur le plan de z et C signifie tout le plan de w, et une fonction $g(z, w)$ holomorphe dans le domaine (D, C). Soit $z' \in D$. Un nombre complexe α sera dit période de $g(z, w)$ en z' si l'on a

$$g(z', w+\alpha)-g(z', w)\equiv 0.$$

Lorsque $g(z', w)$ est une constante, tout nombre complexe est par définition une période de $g(z, w)$ en z'.

Soit z_0 un point quelconque de D, et soit $\{z_i\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ une suite des points de D qui tend vers z_0, z_i étant supposé tout différente de z_0. S'il y a, pour chaque z_i $(i=1, 2, \cdots)$, une période α_i non nulle de $g(z, w)$ en z_i et si la suite de nombres $\{\alpha_i\}$ $(i=1, 2, \cdots)$ tend vers un nombre α_0, alors α_0 est aussi une période de $g(z, w)$ en z_0.

En effet, considérons la fonction de trois variables complexes z, w

et α donnée par

$$F(z, w, \alpha)=g(z, w+\alpha)-g(z, w).$$

Elle est certainement holomorphe dans le domaine cylindrique de la forme

$$z \in D, \qquad |w|<\infty \qquad \text{et} \qquad |\alpha|<\infty.$$

Par suite, lorsqu'on prende deux suites de points $\{z_i\}$ et $\{\alpha_i\}$ tendant vers z_0 et vers α_0 respectivement, la suite des fonctions

$$F(z_i, w, \alpha_i) \qquad (i=1, 2, \cdots)$$

tend vers $F(z_0, w, \alpha_0)$ uniformément dans tout ensemble borné du plan de w. Donc, comme on a $F(z_i, w, \alpha_i)\equiv 0$ pour tout $i(i=1, 2, \cdots)$, on a aussi $F(z_0, w, \alpha_0)\equiv 0$. Ceci signifie que α_0 est une période de $g(z, w)$ en z_0.

En ce moment, on peut dire que

α_0 ne peut jamais être nulle, pourvu que $\partial g/\partial w$ ne s'annule pas identiquement dans (D, C).

En effet, d'après le théorème de *Weierstrass*, il y a un dicylindre (δ, δ') de la forme

$$\delta: \ |z-z_0|<r \qquad \text{et} \qquad \delta': \ |w|<r'$$

dans lequel on a l'égalité

$$g(z, w)-g(z, 0)=w\cdot(z-z_0)^l\cdot[w^n+a_1(z)w^{n-1}+\cdots+a_n(z)]\cdot\omega(z, w),$$

où l et n sont des nombres entiers positifs pouvant être nuls, $a_i(z)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ sont des fonctions holomorphes dans δ telles que l'on ait $a_i(0)=0$ et $\omega(z, w)$ est une fonction holomorphe dans (δ, δ') qui s'annule jamais dans (δ, δ'). D'autre part, on a toujours

$$g(z_i, m\alpha_i)-g(z_i, 0)=0,$$

quels que soient les nombres entiers positifs i et m. Ceci est évidemment l'absurde, puisque, si $|\alpha_i|<r'/n+2$, la fonction

$$g(z_i, w)-g(z_i, 0)$$

a au moins $n+2$ zéros dans le cercle δ'.

Sous la même configulation ci-dessus, on aura l'énoncé que

Si la fonction $g(z_0, w)$ n'est pas une constante, il y a un voisinage v de z_0 et une fonction $\alpha(z)$ holomorphe dans v tels que, pour tout z' dans v, $\alpha(z')$ sont une période de $g(z, w)$ en z' et que l'on ait

$$\alpha_i=\alpha(z_i),$$

dès que i surpasse un nombre entier N convenable.

En effet, soit (z_0, w_0) un point de (D, C) en lequel on a $\partial g/\partial x \neq 0$, et soit β la valeur de g en (z_0, w_0). Alors, de l'équation

$$g(z, w)-\beta=0, \tag{1}$$

on peut trouver une fonction

$$w=\xi_1(z)$$

holomorphe dans un voisinage convenable v_1 de z_0 telle que l'on ait

$$w_0=\xi_1(z_0), \quad g(z, \xi_1(z))-\beta\equiv 0 \quad \text{et} \quad \partial g(z, \xi_1(z))/\partial w \neq 0$$

dans v_1. Il suit de là que l'on a

$$g(z_0, w_0+\alpha_0)=\beta \quad \text{et} \quad \partial g(z_0, w_0+\alpha_0)/\partial w \neq 0$$

puisque l'on a $g(z_i, \xi_1(z_i)+\alpha_i)=\beta$ et $g(z_i, \xi_1(z_i)+\alpha_i)/\partial w \neq 0$ pour tout z dans v_1. Donc, de l'équation (1), on obtient une autre fonction $\xi_2(z)$ holomorphe dans un voisinage convenable v_2 de z_0 telle que l'on ait

$$w_0+\alpha_0=\xi_2(z_0) \quad \text{et} \quad g(z, \xi_2(z))-\beta\equiv 0$$

dans v_2. Possons dans $v=v_1\cap v_2$

$$\alpha(z)=\xi_2(z)-\xi_1(z).$$

Alors, on aura

$$\alpha_i = \alpha(z_i),$$

dès que i surpasse un nombre entier positif suffisamment grand N. Car, lorsqu'on trace un dicylindre (γ, γ') de la forme

$$\gamma : \ |z - z_0| < \rho \quad \text{et} \quad \gamma' : \ |w - \alpha_0 - w_0| < \rho'$$

de manière que l'on ait $\gamma \subset v$ et que, pour tout point z' dans γ, il n'y ait qu'un point w' dans γ' en lequel on a $g(z', w') = \beta$, les point $\xi_1(z_i) + \alpha(z_i)$ doivent être contenus dans γ' dès que i surpasse un certaine nombre entier N.

Ici, je dit que $\alpha(z)$ est une période de $g(z, w)$ en tout z dans v. Car, la fonction

$$g(z, w + \alpha(z)) - g(z, w)$$

est holomorphe dans le domaine cylindrique (v, C) et de plus, pour tout z_i tel que l'on ait $i > N$, on a

$$g(z_i, w + \alpha(z_i)) - g(z_i, w) = 0,$$

par suite, elle s'annule identiquement dans (v, C). Donc, l'énoncé a été certainement démontré.

Soit, à nouveau, $g(z, w)$ une fonction holomorphe dans le domaine cylindique (D, C) telle que $\partial g / \partial w$ ne s'annule pas identiquement. Supposons qu'il y a une aire δ dans D et une fonction $\alpha(z)$ holomorphe dans δ telles que, pour tout point z' dans δ, $\alpha(z')$ soit une période de $g(z, w)$ en z'. En ce moment, prolongeons analytiquement $\alpha(z)$ suivant tous les chemins possibles ne sortant pas de D. Désignons par la même notation $\alpha(z)$ la fonction analytique ainsi obtenue par le prolongement. Alors, toute valeur de $\alpha(z)$ en z' est aussi une période de $g(z, w)$ en z'. Maintenant, on peut dire que

La fonction analytique $\alpha(z)$ est ou bien uniforme ou bien à deux branches.

En effet, supposons qu'il y a une aire γ dans D, dans laquelle il y a deux fonctions holomorphes $\alpha_1(z)$ et $\alpha_2(z)$ qui sont des branches distinctes de $\alpha(z)$. Alors, à tout z dans γ correspond un nombre rationnel p_z tel que l'on ait

$$\alpha_1(z) = p_z \cdot \alpha_2(z).$$

Puisqu'il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de nombre rationnels, on voit, d'après le théorème de *Baire*, qu'il y a un nombre rationnel p_0 et une aire γ_0 dans γ dans laquelle l'ensemble de tous les points z tels que l'on ait $p_z = p_0$ est partout dense. D'où, on a l'égalité

$$\alpha_1(z) = p_0 \cdot \alpha_2(z)$$

dans γ. Ceci signifie, comme on peut voir facilement, que toutes les fonctions holomorphes $p_0^n \cdot \alpha_2(z)$ sont des branches de $\alpha(z)$ au-dessus de γ, où n est un nombre entier quelconque. Si p_0 était plus petit que l'unité en module, $g(z, w)$ aurait une période infinitésimale en tout $z \in \gamma$. Alors, $\partial g / \partial w$ devrait s'annuler identiquement. Si p_0 était plus grand que l'unité en module, on arrivera à la même sorte de contradiction, en faisant un échange de $\alpha_1(z)$ pour $\alpha_2(z)$. Il résulte de là que, les branches étant supposées distinctes, p_0 est égal à -1. Alors, on a

$$\alpha_1(z) = -\alpha_2(z).$$

On voit aussi tout de suite qu'il n'y a que ces deux branches de $\alpha(z)$. L'énoncé a été donc démontré.

Enfin, on aura l'énoncé que

Sous les mêmes hypothèse, la fonction $\alpha(z)$ est ou bien elle-même une fonction méromorphe dans tout D ou bien racine carrée d'une telle fonction.

En effet, considérons d'abord le cas où $\alpha(z)$ est uniforme et désignons par D_0 le plus grand domaine dans D dans lequel $\alpha(z)$ est holomorphe. Alors, si une suite des points $\{z_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ tend vers un point frontière z_0 de D_0 intérieur à D, et si la fonction $g(z, w)$ n'est pas une constante, alors, d'après ce qu'on a vu jusqu'ici, la suite de valeurs $\alpha(z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ tend toujours vers l'infini. De plus, $\alpha(z)$

ne prend jamais la valeur nulle dans D_0. Donc, d'après le théorème de *Radó*, la fonction $1/\alpha(z)$ est holomorphe dans tout domaine D. Donc, $\alpha(z)$ est méromorphe dans D tout entier. Considérons ensuite le cas où $\alpha(z)$ est a deux branches distinctes $\alpha_1(z)$ et $\alpha_2(z)$. On a vu $\alpha_1(z)=-\alpha_2(z)$. En appliquant le raisonnement précédent à la fonction uniforme $(\alpha_1(z))^2$, on voit que la fonction $1/(\alpha_1(z))^2$ est uniforme et holomorphe dans D tout entier. Donc, l'énoncé a été certainement démontré.

Résumons les résultats obtenus[10].

Théorème 4. *Considérons, dans l'espace de deux variables complexes z et w, un domaine cylindrique (D, C), où D est un domaine quelconque sur le plan de z et C signifie tout le plan de w, et une fonction $g(z, w)$ holomorphe dans (D, C). Supposons qu'il y a une aire δ telle que, pour tout z' dans δ, $g(z, w)$ ait une période en z'. Alors, il y a une fonction $\alpha(z)$, étant ou bien méromorphe dans tout D ou bien racine carée d'une telle fonction, telle que, pour tout z' sauf une infinité dénombrable au plus de points où $\alpha(z)$ est pôle dans D, les valeurs $\alpha(z')$ soient des périodes de $g(z, w)$ en z'.*

On remarqu'ici que, lorsque la fonction $g(z, w)$ est une constante en $z=z'$, il y a réellement deux cas où $\alpha(z)$ est holomorphe en z' ou bien $\alpha(z)$ a un pôle en z'. On en voir, par exemple, pour les fonctions

$$g_1(z, w)=z\cdot e^{w} \quad \text{et} \quad g_2(z, w)=e^{z\cdot w}.$$

D'autre part, $\alpha(z)$ peut avoir un pôle en z' même si la fonction $g(z', w)$ n'etait pas une constante. Voir, par exemple, la fonction

$$g_3(z, w)=\frac{e^{z\cdot w}-1}{z}.$$

Le cas où $\alpha(z)$ a deux branches est réalisé chex la fonction

$$g_4(z, w)=\frac{\sin\sqrt{z}\cdot w}{\sqrt{z}}.$$

10) Je doit quelque l'idée à M. T. Yoshioka pour l'étudier sur la telle période.

7. Théorème principal

Soit f une fonction entière de deux variables complexes x et y. A chaque surface première S d'ordre un et avec la valeur a de f, attribuons un tube normal Σ_Γ autour de S, où Γ est, comme d'habitude, une partie sur une droite analytique L passant transversalement par un point régulier de S, donnée par l'inégalité $|f-a|<\rho$. Le cercle donné par $|z-a|<\rho$ sur le plan d'une variable complexe z sera désigné par Γ^* comme ce qui correspond à Σ_Γ. Alors, on peut couvrir tout l'espace de x et y à l'exception de toutes les surfaces premières d'ordre élevé de f d'une infinité dénombrable au plus de tels tubes normaux. Désignons-les, à nouveau, par Σ_i $(i=1, 2, \cdots)$ et par Γ_i^* les cercles sur le plan de z, chacun correspondant à Σ_i au sens ci-dessus.

Considérons, sur le plan de z, l'ensemble E de tous les points z tels qu'il y ait au moins une surface première avec la valeur z de f qui est simplement connexe et du type parabolique. Supposons, maintenant, que la capacité logarithmique de E n'est pas nulle. Le but de cette section finale, est de voir le fait que toute surface première de telle fonction entière est simplement connexe et du type parabolique. C'est le théorème principal au mémoire actuel.

De l'hypothèse, on peut d'abord dire que

Il y a, parmi les tubes normaux Σ_i $(i=1, 2, \cdots)$, *au moins un tube normal* Σ_i *pour lequel l'ensemble* e_i *de tous les points* z *dans* Γ_i^* *tels qu'il y ait dans* Σ_i *une surface première avec la valeur* z, *simplement connexe et du type parabolique, est de capacité non nulle.*

En effet, sinon, E serait somme d'une infinité dénombrable au plus d'ensemble de capacité nulle. Or, on sait bien que toute somme dénombrable d'ensembles de capacité nulle est aussi capacité nulle.

Prenons un tel tube normal et désignons, de nouveau encore une fois, par Σ_Γ et par Γ^* ce tube normal et le cercle correspondant. Alors, d'après le lemme fondamental, on peut dire que

Toute surface première de f *dans* Σ_Γ *qui n'a aucun point singulier est analytiquement homéomorphe ou bien à tout le plan d'une variable* *complexe* $|w|<\infty$ *ou bien au plan pointillé à l'origine* $0<|w|<\infty$.

Soit ensuite τ l'ensemble de tous les points z dans Γ^* tels que la surface première de f avec la valeur z dans Σ_Γ ait au moins un point singulier. Alors, d'après le théorème 3, on peut dire que

τ n'est dense dans aucune aire dans Γ^*.

Posons $\Gamma^0=\Gamma^*-\bar{\tau}$, où $\bar{\tau}$ signifie la fermeture de τ dans Γ^*, et désignons par Σ_{Γ^0} le tube formé de tous les points dans Σ_Γ en lesquels f prend des valeur dans Γ^0. Je dit ici que

Toute surface première de f dans Σ_{Γ^0} est simplement connexe et du type parabolique.

En effet, considérons le revêtement (U) de Σ_{Γ^0}, que l'on désigne par $\tilde{\Sigma}_{\Gamma^0}$, construit de la manière faite dans la section 3. Alors, d'après le lemme fondamental dans le mémoire (II)[11], on a le fait qu'il y a une fonction holomorphe φ sur $\tilde{\Sigma}_{\Gamma^0}$ telle que la paire des fonctions

$$\begin{cases} z=f(x,\ y) \\ w=\varphi(x,\ y) \end{cases}$$

transforme analytiquement et biunivoquement Σ_{Γ^0} au domaine cylindrique (Γ^0, C) dans l'espace de z et w. Dénotons

$$\begin{cases} x=\xi(z,\ w) \\ y=\eta(z,\ w) \end{cases}$$

la transformation inverse de cette transformation-ci et envisageons la fonction $\xi(z, w)$. Si une surface première de f avec la valeur z_0 dans Σ_{Γ^0} n'est pas simplement connexe, $\xi(z, w)$ a une période non nulle en z_0. De plus, il y a un voisinage δ de z_0 dans Γ^0 tel que, pour tout point z' dans δ, $\xi(z, w)$ a une période en z'. Donc, d'après le théorème 4, pour tout point z' sauf une infinité dénombrable au plus de points dans Γ^0, la fonction $\xi(z, w)$ a une période non nulle en z'. C'est en contradiction avec l'hypothèse puisque l'ensemble d'une infinité dénom-

11) loc. cit., p. 253.

brable au plus de points dans Γ^* est certainement de capacité nulle. L'énoncé a été donc démontré.

D'après le théorème 2 du mémoire (II)[12], toute surface première de f qui est limite d'une suite de surfaces premières simplement connexes de f n'a aucun point singulier. D'où et de ce que nous avons dit jusqu'ici, on a le fait que

Toute surface première de f dans Σ_Γ est simplement connexe et du type parabolique.

Revenons encore aux tubes normaux Σ_i qui couvrent tout l'espace de x et y à l'exception de les surfaces premières d'ordre élevé de f. Pour tout tube normal Σ_i, il y a un nombre fini de tubes normaux $\Sigma\nu_j$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ tels que l'on ait

$$\Sigma_\Gamma \cap \Sigma_{\nu_1} \neq 0, \quad \Sigma_{\nu_n} \cap \Sigma_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \Sigma_{\nu_j} \cap \Sigma_{\nu_{j+1}} \neq 0$$
$$(j=1, \cdots, n)$$

Or, on sait que tout ensemble ouvert non vide est de capacité non nulle. Alors, on voit de plus en plus que tous les Σ_i possèdent la même propriété que Σ_Γ. Ainsi, nous sommes arrivés au

Théorème. *Soit $f(x, y)$ une fonction entière de deux variables complexes x et y. Supposons que l'ensemble de toute les valeurs z telles qu'il y ait au moins une surface première de f avec la valeur z, simplement connexe et du type parabolique, est de capacité logarithmique non nulle. Alors, toute surface première de f est aussi simplement connexe et du type parabolique, sans exception.*

D'où et d'après le théorème fondamental du mémoire (II)[13], on voit le fait que

Toute telle fonction se réduit à celle d'une variable complexe par un automorphisme analytique convenable de tout l'espace de x et y.

---

12) loc., cit., p. 269.
13) loc., cit., p. 274.